**PRIRUČNICI TEHNIČKOG VELEUČILIŠTA U ZAGREBU**

MANUALIA POLYTECHNICI STUDIORUM ZAGRABIENSIS

# Repetitorij vjerojatnosti i statistike za studente elektrotehnike i graditeljstva

*Bojan Kovačić*

*Luka Marohnić*

*Mandi Orlić Bachler*

Zagreb, 2023.

Repetitorij vjerojatnosti i statistike za studente elektrotehnike i graditeljstva



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU ZAGREB UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES


**izdavač** Tehničko veleučilište u Zagrebu
Vrbik 8, Zagreb

**za izdavača** prof. dr. sc. Jana Žiljak Gršić

**autori** Bojan Kovačić, Luka Marohnić i Mandi Orlić Bachler

**recenzenti** dr. sc. Ana Perišić, Prirodoslovno-matematički fakultet u Splitu
izv. prof. dr. sc. Tin Perkov, Učiteljski fakultet Sveučilišta u Zagrebu

**vrsta djela** priručnik

Objavljivanje je odobrilo Vijeće Tehničkog veleučilišta u Zagrebu odlukom broj: 375–01–23–425 od 19. 9. 2023.

**ISBN** 978–953–8444–10–4

# Predgovor

Ovaj nastavni materijal namijenjen je studentima 2. godine stručnog studija elektrotehnike odnosno graditeljstva na Tehničkom veleučilištu u Zagrebu kao pomoć prilikom polaganja pismenog ispita iz predmeta *Vjerojatnost i statistika*.

Tekst je pisan tako da redoslijed tematskih cjelina odgovara redoslijedu obrade tih cjelina u izvedbi navedenog predmeta. Radi boljeg razumijevanja obrađene materije, osim matematičkih formula i postupaka, čije se poznavanje provjerava na ispitu, navedene su i neke teorijske činjenice. To ni u kojem slučaju ne znači da ovaj materijal može zamijeniti nastavne materijale prema kojima se održavaju predavanja i vježbe, nego mu je osnovna svrha poslužiti kao koristan podsjetnik na definicije, svojstva i formule koje se na ispitu možda zaborave.

Ugodna nam je dužnost zahvaliti svima koji su nam na bilo koji način pomogli u nastajanju ovoga priručnika. Tu ponajprije mislimo na recenzente izv. prof. dr. sc. Tina Perkova i dr. sc. Anu Perišić, prof. struč. stud. čije su nam vrlo korisne primjedbe, prijedlozi i savjeti bili od neprocjenjive koristi. Rukopis je s puno pažnje pročitala i izv. prof. dr. sc. Dragana Jankov Maširević, pa smo i njezine korisne primjedbe i prijedloge uvrstili u tekst. Zahvalnost na objavi priručnika dugujemo i dekanici Tehničkog veleučilišta u Zagrebu prof. dr. sc. Jani Žiljak Gršić, pročelniku Elektrotehničkog odjela Tehničkog veleučilišta u Zagrebu dr. sc. Stjepanu Tvoriću, višem predavaču i pročelniku Graditeljskog odjela Tehničkog veleučilišta u Zagrebu dr. sc. Draženu Arbutini, dipl. ing. arh. Posebno zahvaljujemo svim studentima koji su svojim pitanjima na nastavi i konzultacijama utjecali da u priručnik uvrstimo i neke tematske cjeline bitne za druge predmete na stručnim studijima elektrotehnike i graditeljstva.

Pokude za sve „preživjele" nenamjerne pogreške, kojih u tekstu nesmunjivo ima i nakon višestrukih korektura, preuzimamo isključivo na sebe. Unaprijed zahvaljujemo svima koji nas obavijeste o bilo kojoj uočenoj pogrešci ili nekom drugom propustu.

Svim korisnicima ovog priručnika želimo uspješno korištenje.

U Zagrebu, listopada 2023.

*Autori*

# Sadržaj


**1 Osnove kombinatorike** **1**
1.1 Prebrojavanje konačnih skupova . . . 1
1.2 Permutacije i kombinacije. Binomni teorem . . . 1

**2 Osnove diskretne teorije vjerojatnosti** **3**
2.1 Slučajni pokus i događaji . . . 3
2.1.1 Operacije s događajima . . . 3
2.1.2 Neke posebne relacije među događajima . . . 4
2.1.3 Korisni identiteti s događajima . . . 4
2.2 Vjerojatnosni prostor . . . 4
2.2.1 Vjerojatnost . . . 4
2.2.2 Konačni i klasični vjerojatnosni prostori . . . 5
2.2.3 Beskonačni vjerojatnosni prostor . . . 6
2.2.4 Geometrijska vjerojatnost . . . 6
2.3 Uvjetna vjerojatnost . . . 7
2.3.1 Uvjetna vjerojatnost i nezavisnost događaja . . . 7
2.3.2 Potpun sustav događaja. Bayesova formula . . . 7
2.3.3 Bernoullijeva shema . . . 8

**3 Osnove deskriptivne statistike** **9**
3.1 Modaliteti i njihove frekvencije . . . 9
3.2 Srednje vrijednosti . . . 10
3.3 Mjere raspršenja . . . 12

**4 Diskretne slučajne varijable** **15**
4.1 Diskretna jednolika (uniformna) razdioba . . . 17
4.2 Binomna razdioba . . . 17
4.3 Poissonova razdioba . . . 18
4.4 Geometrijska razdioba . . . 19
4.5 Hipergeometrijska razdioba . . . 20

**5 Neprekidne (kontinuirane) slučajne varijable** **21**
5.1 Neprekidna jednolika (uniformna) razdioba . . . 23
5.2 Eksponencijalna razdioba . . . 23
5.3 Normalna razdioba . . . 24
5.4 Čebiševljeva nejednakost i pravilo $3\sigma$ . . . 25
5.5 Nezavisne slučajne varijable. Središnji granični teorem . . . 26
5.6 Granični teoremi u Bernoullijevoj shemi . . . 27

5.7 Neprekidne slučajne varijable vezane uz gama funkciju . . . . . 27
5.7.1 Studentova ili t-razdioba . . . . . 28
5.7.2 $\chi^2$-razdioba . . . . . 28

**6 Statistika** **29**
6.1 Osnove teorije uzoraka . . . . . 29
6.2 Točkaste procjene . . . . . 29
6.3 Intervalne procjene . . . . . 30
6.3.1 Intervalna procjena očekivanja normalne razdiobe s poznatom varijancom 31
6.3.2 Intervalna procjena očekivanja normalne razdiobe s nepoznatom varijancom 31
6.3.3 Intervalna procjena varijance normalne razdiobe s poznatim očekivanjem 32
6.3.4 Intervalna procjena varijance normalne razdiobe s nepoznatim očekivanjem 32
6.3.5 Intervalna procjena vjerojatnosti binomne razdiobe . . . . . 32
6.4 Testiranje hipoteza . . . . . 33
6.4.1 Testiranje hipoteze za očekivanje normalne razdiobe s poznatom varijancom 33
6.4.2 Testiranje hipoteze za očekivanje normalne razdiobe s nepoznatom varijancom . . . . . 34
6.4.3 Testiranje hipoteze za varijancu normalne razdiobe . . . . . 35
6.5 Linearna korelacija . . . . . 35
6.6 Jednostavna linearna regresija . . . . . 37
6.7 Slike . . . . . 39

**7 Dodatak** **41**
7.1 Pregled osnovnih pojmova teorije skupova . . . . . 41
7.2 Pregled formula diferencijalnog i integralnog računa . . . . . 42
7.3 Pregled korisnih naredbi u nekim softverskim paketima . . . . . 43
7.4 Tablice . . . . . 46

**Indeks pojmova** **53**

# 1 Osnove kombinatorike

## 1.1 Prebrojavanje konačnih skupova

**Teorem 1** (pravilo jednakosti (bijekcije)). *Neka su $S$ i $T$ konačni skupovi. Tada je* $\mathrm{card}(S) = \mathrm{card}(T)$ *ako i samo ako postoji bijekcija među skupovima $S$ i $T$.*

**Teorem 2** (pravilo zbroja). *Neka su $n \in \mathbb{N}$ i $S_1, \ldots, S_n$ konačni međusobno disjunktni skupovi (tj. vrijedi $S_i \cap S_j = \emptyset \iff i \neq j$). Tada je njihova unija $S := \bigcup_{i=1}^{n} S_i$ konačan skup i vrijedi:*

$$\mathrm{card}(S) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{card}(S_i).$$

**Teorem 3** (pravilo množenja (produkta)). *Neka su $n \in \mathbb{N}$ i $S_1, \ldots, S_n$ konačni skupovi. Tada je Kartezijev umnožak $\prod_{k=1}^{n} S_k = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ konačan skup i vrijedi:*

$$\mathrm{card}\left(\prod_{k=1}^{n} S_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{card}(S_k).$$

## 1.2 Permutacije i kombinacije. Binomni teorem

Neka su $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ te neka je $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ bilo koji $n$-člani skup.

**Permutacija (bez ponavljanja)** skupa $S$ je bilo koja bijekcija $f : S \to S$. Ekvivalentno, permutacija skupa $S$ je svaka uređena $n$-torka svih njegovih članova, gdje je $n = \mathrm{card}(S)$. Ukupan broj svih međusobno različitih permutacija skupa $S$ jednak je:

$$P_n = n!.$$

*Napomena* 1. Dogovorno se uzima $0! = 1$.

Neka u nizu $s_1, s_2, \ldots, s_n$ postoje prva skupina od $k_1$ jednakih elemenata, druga skupina od $k_2$ jednakih elemenata, $\ldots$, $m$-ta skupina od $k_m$ jednakih elemenata, pri čemu je $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$.

Bilo koji razmještaj elemenata toga niza nazivamo **permutacija s ponavljanjem**. Njihov ukupan broj jednak je

$$P_n^{k_1,\ldots,k_m} = \binom{n}{k_1,\ldots,k_m} := \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!} = \frac{(\sum_{i=1}^m k_i)!}{\prod_{i=1}^m (k_i!)}.$$

Broj $\binom{n}{k_1,\ldots,k_m}$ naziva se **multinomni koeficijent**.

$k$**-permutacija bez ponavljanja** (ili kraće: $k$**-permutacija**) skupa $S$ je bilo koja uređena $k$-torka međusobno različitih elemenata toga skupa. Ukupan broj svih različitih $k$-permutacija jednak je

$$P(n,k) = \prod_{i=0}^{k-1}(n-i) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

$k$**-permutacija s ponavljanjem** skupa $S$ je bilo koja uređena $k$-torka (ne nužno različitih) elemenata skupa $S$. Ukupan broj svih različitih $k$-permutacija s ponavljanjem skupa $S$ jednak je

$$\bar{P}(n,k) = n^k.$$

$k$**-kombinacija bez ponavljanja** (ili kraće: $k$**-kombinacija**) skupa $S$ je bilo koji $k$-člani podskup toga skupa. Ukupan broj svih različitih $k$-kombinacija skupa $S$ jednak je

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n\,(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Broj $\binom{n}{k}$ naziva se **binomni koeficijent** i čita „en povrh ka".

Pretpostavimo da iz skupa $S$ biramo točno $k$ elemenata tako da svaki element možemo izabrati više puta, a poredak elemenata nije bitan. Svaki takav izbor naziva se $k$**-kombinacija s ponavljanjem** skupa $S$. Ukupan broj svih različitih $k$-kombinacija s ponavljanjem skupa $S$ jednak je

$$\left(\binom{n}{k}\right) := \bar{C}(n,k) = \binom{n+k-1}{k}.$$

**Teorem 4** (neka svojstva binomnih koeficijenata i **binomni teorem**)**.** *Za sve cijele brojeve $n, k \geq 0$ i za sve $x, y \in \mathbb{C}$ vrijede sljedeće jednakosti:*

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{2} = \frac{n\,(n+1)}{2}, \ldots, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$,
2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.
3. $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k}\, y^k$ *(binomna formula).*

# 2 Osnove diskretne teorije vjerojatnosti

## 2.1 Slučajni pokus i događaji

**Slučajni pokus** je svaki pokus čiji ishod nije unaprijed određen. Ishod takvog pokusa naziva se **elementarni događaj** ili **mogući ishod** i uobičajeno označava s $\omega$. Skup svih elementarnih događaja označava se s $\Omega$. Ne istaknemo li drugačije, pretpostavljamo da je $\Omega$ konačan skup.

**Algebra događaja** je svaka familija $\mathcal{F}$ podskupova skupa $\Omega$ sa sljedećim svojstvima:

**A1.** $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$,

**A2.** $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$, pri čemu je $A^c := \Omega \setminus A$ **komplement** skupa $A$ u skupu $\Omega$,

**A3.** $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cup B \in \mathcal{F}$.

Elementi familije $\mathcal{F}$ nazivaju se **događaji** i označavaju s $A, B, C, \ldots$. Kažemo da se događaj $A$ **ostvario** ako za ishod $\omega$ slučajnog pokusa vrijedi $\omega \in A$.

Posebno, skup $\Omega$ je događaj koji se ostvaruje pri svakom ishodu pokusa. Zbog toga se $\Omega$ naziva **siguran događaj**. Prazan skup $\emptyset$ (koji je po definiciji podskup skupa $\Omega$) naziva se **nemoguć događaj** i ne može se ostvariti pri realizaciji pokusa.

### 2.1.1 Operacije s događajima

1. **Zbroj ili unija događaja:** $A + B := A \cup B$
   *Interpretacija:* $A + B$ se ostvaruje ako se ostvario barem jedan od događaja $A$ i $B$.

2. **Umnožak ili presjek događaja:** $A\,B := A \cap B$
   *Interpretacija:* $A\,B$ se ostvaruje ako su se ostvarila oba događaja $A$ i $B$.

3. **Razlika događaja:** $A - B := A \setminus B$
   *Interpretacija:* $A - B$ se ostvaruje ako se ostvario $A$ i nije se ostvario $B$.

### 2.1.2 Neke posebne relacije među događajima

1. Događaj $A$ **povlači** događaj $B$ ako vrijedi $A \subseteq B$.
2. Događaji $A$ i $B$ su **jednaki** ili **ekvivalentni** ako vrijedi $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$.
3. Događaji $A$ i $B$ su **disjunktni** ili **međusobno isključivi** ako vrijedi $A\,B = \emptyset$, tj. ako se ne mogu ostvariti istovremeno.
4. Događaj $A^c$ naziva se **komplement** ili **suprotan događaj** događaja $A$. On se ostvaruje ako i samo ako se $A$ nije ostvario.

### 2.1.3 Korisni identiteti s događajima

Za bilo koje događaje $A, B, C \in \mathcal{F}$ vrijede sljedeće jednakosti.

1. $A - B = A\,B^c$
2. $(A^c)^c = A$
3. $(A + B)^c = A^c\,B^c$ (prva de Morganova formula)
4. $(A\,B)^c = A^c + B^c$ (druga de Morganova formula)
5. $A\,(B + C) = A\,B + A\,C$
6. $(A + B)\,(A + C) = A + B\,C$

## 2.2 Vjerojatnosni prostor

### 2.2.1 Vjerojatnost

**Vjerojatnost** na algebri događaja $\mathcal{F}$ je svako preslikavanje $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ sa svojstvima:

**P1 (normiranost).** $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$,

**P2 (monotonost).** $A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B)$,

**P3 (aditivnost).** $A\,B = \emptyset \implies P(A + B) = P(A) + P(B)$.

**Neka korisna svojstva vjerojatnosti.**

Za bilo koje $A, B, C \in \mathcal{F}$ vrijede sljedeće jednakosti.

1. $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A\,B)$
2. $P(A+B) = P(A) + P(B\,A^c)$
3. $P(A) = P(A\,B^c) + P(A\,B)$
4. $P(A^c) = 1 - P(A)$
5. $P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A\,B) - P(A\,C) - P(B\,C) + P(A\,B\,C)$

### 2.2.2 Konačni i klasični vjerojatnosni prostori

Uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdje je $\mathcal{F}$ algebra događaja na skupu $\Omega$ a $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ vjerojatnost, naziva se **vjerojatnosni prostor**.

Neka je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ i $\mathcal{F}$ algebra događaja na $\Omega$. Neka su $p_i = P(\omega_i)$ vjerojatnosti elementarnih događaja za $i = 1, 2, \ldots, n$. Ti brojevi imaju sljedeća svojstva:

1. $p_i > 0$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$,
2. $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Funkciju vjerojatnosti $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ sada za svaki neprazan skup $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_k}\} \in \mathcal{F}$ definiramo formulom:

$$P(A) = \sum_{j=1}^{k} p_{i_j}.$$

Uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ se tada naziva **konačni vjerojatnosni prostor**. Obično se za $\mathcal{F}$ uzima *partitivni skup* skupa $\Omega$, tj. skup svih podskupova od $\Omega$, u oznaci $\mathcal{P}(\Omega)$.

Posebno, **klasični vjerojatnosni prostor** je konačni vjerojatnosni prostor u kojemu vrijedi $p_i = \frac{1}{n}$ za $i = 1, 2, \ldots, n$ i $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Tada za svaki $A \subset \Omega$ vrijedi

$$P(A) = \frac{\operatorname{card} A}{\operatorname{card} \Omega} = \frac{\text{broj povoljnih ishoda za } A}{\text{ukupan broj mogućih ishoda}}.$$

### 2.2.3 Beskonačni vjerojatnosni prostor

Neka je skup $\Omega$ svih elementarnih događaja beskonačan. Tada algebra događaja $\mathcal{F}$ u vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mora biti **$\sigma$-algebra**, tj. za bilo koji niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathcal{F}$ vrijedi

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}.$$

Vjerojatnost $P$ definirana na $\sigma$-algebri $\mathcal{F}$ mora ispunjavati uvjet **prebrojive aditivnosti**, tj. za bilo koji niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathcal{F}$ takav da je $A_i\, A_j = \emptyset$ za $i \neq j$, vrijedi

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Ovaj uvjet ekvivalentan je uvjetu

$$A_1 \subset A_2 \cdots \subset A_n \subset \cdots \implies P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_n P(A_n).$$

Ako je skup $\Omega$ prebrojiv, tada se, kao i u slučaju konačnog skupa $\Omega$, za algebru događaja $\mathcal{F}$ može uzeti partitivni skup $\mathcal{P}(\Omega)$ skupa $\Omega$, tj. bilo koji podskup od $\Omega$ može biti događaj.

### 2.2.4 Geometrijska vjerojatnost

Neka su $\Omega$ i $A \subseteq \Omega$ *ograničeni* i *izmjerivi*[1] podskupovi skupa $\mathbb{R}^n$ za $n \in \{1, 2, 3\}$. Vjerojatnost događaja $A$ s obzirom na $\Omega$ definiramo formulom

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)},$$

gdje je $m$ **mjera** skupa. Takvu vjerojatnost nazivamo **geometrijska vjerojatnost**.

Ako je $A \in \mathbb{R}^n$ izmjeriv skup, tada je mjera $m(A)$ jednaka duljini od $A$ za $n = 1$, površini od $A$ za $n = 2$ odnosno volumenu od $A$ za $n = 3$. Posebno, vrijede sljedeće tvrdnje.

1. Mjera bilo kojeg *jednočlanog* skupa jednaka je nuli.

2. Mjera bilo koje krivulje u $\mathbb{R}^2$ (npr. pravac, kružnica, elipsa itd.) jednaka je nuli.

3. Mjera bilo koje plohe u $\mathbb{R}^3$ (npr. sfera, plašt kocke itd.) jednaka je nuli.

[1] Skup $S$ je *izmjeriv* ako postoji njegova mjera $m(S)$.

## 2.3 Uvjetna vjerojatnost

### 2.3.1 Uvjetna vjerojatnost i nezavisnost događaja

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i $B \in \mathcal{F}$ takav da je $P(B) > 0$. **Uvjetna vjerojatnost** uz uvjet $B$ je funkcija $P_B : \mathcal{F} \to [0,1]$ definirana formulom

$$P_B(A) := \frac{P(A\,B)}{P(B)}, \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Vjerojatnost događaja $A$ uz uvjet $B$ označava se s $P(A|B)$. Iz definicije uvjetne vjerojatnosti slijedi

$$P(A\,B) = P(B)\,P(A|B).$$

Kažemo da su događaji $A, B \in \mathcal{F}$ **nezavisni** ako vrijedi

$$P(A\,B) = P(A)\,P(B).$$

Općenito, za $n$ događaja $A_1, \ldots, A_n$ kažemo da su **međusobno nezavisni** ako za *svaki* skup indeksa $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ takav da je $\mathrm{card}(I) \geq 2$ vrijedi

$$P\left(\prod_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i).$$

Npr. događaji $A_1$, $A_2$ i $A_3$ su nezavisni ako vrijedi

$$\begin{aligned} P(A_1\,A_2) &= P(A_1)\,P(A_2), \\ P(A_1\,A_3) &= P(A_1)\,P(A_3), \\ P(A_2\,A_3) &= P(A_2)\,P(A_3), \\ P(A_1\,A_2\,A_3) &= P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3). \end{aligned}$$

### 2.3.2 Potpun sustav događaja. Bayesova formula

Pretpostavimo da skup $\Omega$ možemo zapisati kao uniju $n$ događaja

$$\Omega = H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_n$$

takvih da vrijedi:

1. $H_i\,H_j = \emptyset$ za sve $i \neq j$,
2. $P(H_i) > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Događaje $H_1, H_2, \ldots, H_n$ nazivamo **hipoteze**. Tijekom realizacije pripadnog pokusa ostvaruje se točno jedna hipoteza.

Vjerojatnosti $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$ nazivamo **apriorne vjerojatnosti** hipoteza.

Vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1.$$

Familiju $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ nazivamo **potpun sustav događaja**.

Za svaki događaj $A \subset \Omega$ vrijedi **formula potpune vjerojatnosti**:

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k)\, P(A|H_k).$$

Za primjenu ove formule potrebno je znati apriornu vjerojatnost svake hipoteze te odgovarajuće uvjetne vjerojatnosti događaja $A$.

Obratno, ako treba odrediti **aposteriorne vjerojatnosti** pojedinih hipoteza uz uvjet da se dogodio događaj $A$, tada primjenjujemo **Bayesovu formulu**:

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k\, A)}{P(A)} = \frac{P(H_k)\, P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\, P(A|H_i)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

### 2.3.3 Bernoullijeva shema

Pretpostavimo da neki slučajni pokus ponavljamo ukupno $n$ puta i da nas u svakom pokusu zanima hoće li se dogoditi događaj $A$. Pritom ishod bilo kojeg pokusa *ne* ovisi o ishodima prijašnjih pokusa. Vjerojatnost da se dogodi događaj $A$ u svakom je pokusu jednaka $p$. Ovakvu shemu događaja nazivamo **Bernoullijeva shema**.

Vjerojatnost da se u $n$ pokusa točno $k$ puta dogodi događaj $A$ jednaka je

$$p_k = \binom{n}{k} p^k\, (1-p)^k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

# 3 Osnove deskriptivne statistike

## 3.1 Modaliteti i njihove frekvencije

Neka je $y_1, y_2, \ldots, y_n$ konačan niz (ne nužno numeričkih) podataka dobivenih mjerenjem određenog statističkog obilježja. Svaki element toga niza naziva se **modalitet** toga statističkog obilježja. Prirodan broj $n$ naziva se **duljina statističkog niza**.

Pretpostavimo da se u nizu $y_1, \ldots, y_n$ pojavljuje točno $k$ međusobno različitih modaliteta, koje označimo s $x_1, \ldots, x_k$. Sljedeće definicije vrijede za svaki $i = 1, 2, \ldots, k$.

**Apsolutna frekvencija $f_i$ modaliteta** $x_i$ jednaka je ukupnom broju pojavljivanja dotičnog modaliteta u danom nizu. Pritom vrijedi

$$\sum_{i=1}^{k} f_i = n.$$

**Relativna frekvencija $r_i$ modaliteta** $x_i$ iskazuje se u postocima i definira formulom

$$r_i = \frac{f_i}{n} \cdot 100\ [\%].$$

Pretpostavimo da je niz $y_1, \ldots, y_n$ dobiven mjerenjem kvantitativnog redoslijednog obilježja. Tada su svaka dva različita modaliteta međusobno usporediva. Zbog toga možemo pretpostaviti da su svi međusobno različiti modaliteti $x_1, \ldots, x_k$ označeni tako da vrijedi:

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_k.$$

**Kumulativna frekvencija „veće od" $f_i^>$ modaliteta** $x_i$ jednaka je zbroju apsolutnih frekvencija svih modaliteta jednakih ili većih od $x_i$:

$$f_i^> = \sum_{x_j \geq x_i} f_j.$$

**Kumulativna frekvencija „manje od" $f_i^<$ modaliteta** $x_i$ jednaka je zbroju apsolutnih frekvencija svih modaliteta jednakih ili manjih od $x_i$:

$$f_i^< = \sum_{x_j \leq x_i} f_j.$$

Kumulativne frekvencije „veće od" i „manje od" tvore **kumulativne nizove apsolutnih frekvencija**.

**Kumulativna relativna frekvencija „veće od"** $r_i^>$ **modaliteta** $x_i$ iskazuje se u postocima i definira formulom

$$r_i^> = \frac{f_i^>}{n} \cdot 100\ [\%].$$

**Kumulativna relativna frekvencija „manje od"** $r_i^<$ **modaliteta** $x_i$ iskazuje se u postocima i definira formulom

$$r_i^< = \frac{f_i^<}{n} \cdot 100\ [\%].$$

Kumulativne relativne frekvencije „veće od" i „manje od" tvore **kumulativne nizove relativnih frekvencija**.

Ako je broj međusobno različitih modaliteta relativno velik, podatke je pogodno grupirati u **(ne)prave zatvorene razrede**. Zatvoreni razred je svaki interval oblika $\langle a, b] \subset \mathbb{R}$. Ako zatvorene razrede možemo poredati u niz $\langle a, b], \langle b, c], \langle c, d], \ldots$ tada takve razrede nazivamo **pravi razredi**. U suprotnom, ako između bilo kojih dvaju uzastopnih razreda postoji razmak, razredi su **nepravi** ili **nominalni**.

Neka je zadan razred $\langle a, b]$. Broj $a$ nazivamo **donja granica razreda**, broj $b$ **gornja granica razreda**, broj $b - a$ **širina razreda**, a broj $\frac{a+b}{2}$ **sredina razreda**.

Osim tablično, modalitete i njihove apsolutne i relativne frekvencije prikladno je prikazati i grafički npr. strukturnim krugom, jednostavnim stupcima, strukturnim stupcima i slično.

**Poligon apsolutnih frekvencija** je otvorena poligonalna crta dobivena spajanjem uređenih parova točaka $(x_i, f_i)$ i $(x_{i+1}, f_{i+1})$ u ravnini, za svaki $i = 1, 2, \ldots, k - 1$. Analogno se definira **poligon relativnih frekvencija**.

**Histogram** je grafikon kojega tvori konačan niz zatvorenih pravokutnika. Duljine osnovicâ tih pravokutnika odgovaraju širinama pravih razreda. *Površine* tih pravokutnika jednake su apsolutnim/relativnim frekvencijama dotičnih razreda.

## 3.2 Srednje vrijednosti

Niz *numeričkih* podataka pogodno je opisivati tzv. **srednjim vrijednostima**. Srednje vrijednosti dijele se na **potpune** (u njihovom izračunavanju sudjeluju svi članovi niza) i **položajne** (u izračunu se koristi položaj dotične vrijednosti unutar numeričkog niza).

*Potpune* srednje vrijednosti su **aritmetička sredina**, **geometrijska sredina** i **harmonijska sredina**. Formule za izračun tih vrijednosti navedene su u tablici 3.1 na str. 12.

U *položajne* srednje vrijednosti ubrajamo **mod** i **kvantile**.

**Mod** je modalitet s najvećom apsolutnom/relativnom frekvencijom. To je jedina srednja vrijednost koja može opisivati i kvalitativna i kvantitativna obilježja.

Zavisno o broju modova, razdiobe dijelimo na **bezmodalne** (nemaju ni jedan mod), **unimodalne** (imaju jedinstven mod), **bimodalne** (imaju točno dva različita moda) i **multimodalne** (imaju barem tri različita moda).

Ako su podaci grupirani u $m \in \mathbb{N}$ pravih razreda, za određivanje moda najprije treba izračunati **korigiranu apsolutnu/relativnu frekvenciju** svakog razreda. Ta se frekvencija za $i$-ti razred dobiva dijeljenjem originalne apsolutne/relativne frekvencije razreda njegovom širinom $s_i$:

$$f_i^{\text{corr}} = \frac{f_i}{s_i}, \quad r_i^{\text{corr}} = \frac{r_i}{s_i},$$

za sve $i = 1, 2, \ldots, m$. Potom se odredi razred s najvećom korigiranom frekvencijom. Taj razred naziva se **modalni razred**. Tada se mod procjenjuje prema formuli

$$\text{Mo} = L + \frac{f^{\text{corr}} - f_-^{\text{corr}}}{2\, f^{\text{corr}} - (f_-^{\text{corr}} + f_+^{\text{corr}})} \cdot s,$$

gdje su $L$ donja granica **modalnog razreda** (razreda s najvećom korigiranom frekvencijom), $s$ širina modalnog razreda, $f^{\text{corr}}$ korigirana frekvencija modalnog razreda, a $f_-^{\text{corr}}$ odnosno $f_+^{\text{corr}}$ korigirane frekvencije razreda koji je prethodnik odnosno sljedbenik modalnog razreda. Ukoliko modalni razred nema prethodnika, uzima se $f_-^{corr} = 0$. Analogno postupamo u slučaju da modalni razred nema sljedbenika: tada je $f_+^{corr} = 0$.

**Napomena:** Ako su podaci grupirani u prave razrede jednakih širina, nije potrebno računati korigirane frekvencije. U tom slučaju su korigirane frekvencije jednake originalnim frekvencijama razreda, odnosno $f_i^{corr} = f_i$ za sve $i = 1, 2, \ldots, m$.

**Kvantili** su položajne vrijednosti ili mjere lokacije koje uređeni numerički niz dijele na ukupno $n$ jednakobrojnih dijelova, pri čemu je $n \in \mathbb{N}$ i $n \geq 2$. Ima ih ukupno $n - 1$. Za $n = 2$ dobiva se **medijan**, za $n = 4$ **kvartili**, za $n = 10$ **decili** a za $n = 100$ **percentili**. (Definiciju kvantila u slučaju neprekidne slučajne varijable vidjeti na str. 23.)

**Percentili** su položajne vrijednosti koje dijele numerički niz na 100 jednakobrojnih dijelova. Pritom $k$-ti percentil $P_k$ ima svojstvo da ukupno $k\%$ članova niza nije veće od $P_k$, odnosno da $(100 - k)\%$ članova niza nije manje od $P_k$. Percentile iz negrupiranih podataka računamo pomoću formule:

$$P_k = \begin{cases} y_{\lceil n\,k/100 \rceil}, & \text{ako } n \text{ nije djeljiv sa 100,} \\ \frac{1}{2}\left(y_{n\,k/100} + y_{n\,k/100+1}\right), & \text{ako je } n \text{ djeljiv sa 100.} \end{cases}$$

Ako su podaci grupirani, tada percentile procjenjujemo pomoću formule:

$$P_k = L + \frac{s}{f_i}\left(\frac{n\,k}{100} - f_{i-1}^{<}\right),$$

pri čemu se pretpostavlja da su podaci grupirani u ukupno $m$ sortiranih razreda, $i \leq m$ je redni broj prvog člana kumulativnog niza apsolutnih frekvencija „manje od" koji obuhvaća ukupno $\lceil \frac{n\,k}{100} \rceil$ podataka, $\langle L, U]$ je pripadni razred a $s = U - L$ njegova širina.

Za $k \in \{10, 20, \ldots, 90\}$ govorimo o **decilima**. Prvi decil jednak je desetom percentilu, drugi decil dvadesetom percentilu itd. Za $k \in \{25, 50, 75\}$ govorimo o **kvartilima**. Prvi ili **donji** kvartil je 25. percentil, drugi kvartil ili **medijan** je 50. percentil, a treći ili **gornji** kvartil je 75. percentil. Donji kvartil, medijan i gornji kvartil označavamo s $Q_1$, $Q_2$ i $Q_3$, redom. Kvartile, decile i percentile zajedničkim imenom nazivamo **mjere lokacije**. Formule za izračun svih triju kvartila iz (ne)grupiranih podataka navedene su u tablici 3.2.

Tablica 3.1: Formule za izračun potpunih srednjih vrijednosti

| *srednja vrijednost* | *negrupirani podaci* | *grupirani podaci* |
|---|---|---|
| aritmetička sredina | $A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$ | $A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} f_i\, x_i$ |
| geometrijska sredina | $G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} y_i}$ | $G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{k} x_i^{f_i}}$ |
| harmonijska sredina | $H = n \left( \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{y_i} \right)^{-1}$ | $H = n \left( \sum_{i=1}^{k} \frac{f_i}{x_i} \right)^{-1}$ |

Tablica 3.2: Formule za izračun srednjih položajnih vrijednosti

| *kvartil* | *izračun iz negrupiranih podataka* | *procjena iz grupiranih podataka* |
|---|---|---|
| $Q_1$ | $\begin{cases} \frac{1}{2}\left(y_{n/4} + y_{1+n/4}\right), & n \text{ djeljiv s } 4, \\ y_{\lceil n/4 \rceil}, & \text{inače} \end{cases}$ | $L + \frac{s}{f_m}\left(\frac{n}{4} - f^{<}_{m-1}\right)$ |
| $Q_2$ | $\begin{cases} \frac{1}{2}\left(y_{n/2} + y_{1+n/2}\right), & n \text{ djeljiv s } 2, \\ y_{(n+1)/2}, & \text{inače} \end{cases}$ | $L + \frac{s}{f_m}\left(\frac{n}{2} - f^{<}_{m-1}\right)$ |
| $Q_3$ | $\begin{cases} \frac{1}{2}\left(y_{3\,n/4} + y_{1+3\,n/4}\right), & n \text{ djeljiv s } 4, \\ y_{\lceil 3\,n/4 \rceil}, & \text{inače} \end{cases}$ | $L + \frac{s}{f_m}\left(\frac{3n}{4} - f^{<}_{m-1}\right)$ |

**Napomena**: Ako su podaci grupirani u prave razrede, najprije treba formirati kumulativni niz „manje od". Potom treba odrediti prvi član toga niza koji obuhvaća ukupno $\lceil \frac{n}{4} \rceil$ podataka (u slučaju donjega kvartila), $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ podataka (u slučaju medijana), odnosno $\lceil \frac{3n}{4} \rceil$ podataka (u slučaju gornjega kvartila). Tom članu odgovara razred $\langle L, U]$. Broj $m$ je redni broj toga razreda u uzlazno sortiranom poretku svih razreda, dok je $s = U - L$ pripadna razredna širina.

## 3.3 Mjere raspršenja

Reprezentativnost pojedine srednje vrijednosti iskazuje se pomoću odgovarajućih mjera **raspršenja** (**disperzije**). Mjere raspršenja dijele se na **apsolutne** i **relativne**.

Apsolutne mjere raspršenja su **raspon varijacije**, **interpercentil**, **srednje apsolutno odstupanje**, **varijanca** i **standardna devijacija** (**standardno odstupanje**).

Relativne mjere raspršenja su **koeficijent kvartilne devijacije** i **koeficijent varijacije**.

**Raspon varijacije** je razlika najveće i najmanje vrijednosti numeričkog niza. Označavamo je slovom $R$.

**Interpercentil** je razlika $P_k - P_l$ dvaju percentila $P_k$ i $P_l$ pri čemu je $k \geq l$. Time se označava raspon varijacije odgovarajućih $(k-l)\%$ članova niza. Posebno, za $k = 75$ i $l = 25$ dobiva se **interkvartil** $I_q$ koji je jednak razlici gornjeg i donjeg kvartila, a označava raspon varijacije središnje polovice članova niza.

**Odstupanje** $\Delta y_i$ elementa $y_i$ niza $y_1, \ldots, y_n$ od aritmetičke sredine $A$ svih elemenata tog niza definirano je formulom

$$\Delta y_i := y_i - A, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

**Srednje apsolutno odstupanje** (oznaka: MAD) niza $y_1, \ldots, y_n$ definira se kao aritmetička sredina svih elemenata niza $|\Delta y_1|, \ldots, |\Delta y_n|$. Ono se obično interpretira kao prosjek svih apsolutnih vrijednosti odstupanja elemenata niza od njihove aritmetičke sredine.

**Varijanca** ili **srednje kvadratno odstupanje** (oznaka: $\sigma^2$) niza $y_1, \ldots, y_n$ definira se kao aritmetička sredina svih elemenata niza $(\Delta y_1)^2, \ldots, (\Delta y_n)^2$. Ono se obično interpretira kao prosjek svih vrijednosti kvadrata odstupanja elemenata niza od njihove aritmetičke sredine.

**Standardno odstupanje** ili **standardna devijacija** (oznaka: $\sigma$) niza $y_1, \ldots, y_n$ definira se kao drugi korijen iz varijance. U praksi se obično interpretira kao prosječno odstupanje elemenata niza od njihove aritmetičke sredine.

Formule za izračunavanje srednjeg apsolutnog odstupanja, varijance i standardne devijacije dane su u tablici 3.3 na str. 14.

**Koeficijent kvartilne devijacije** $V_q$ jednak je omjeru interkvartila $I_q$ i zbroja prvog i trećeg kvartila:

$$V_q = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}.$$

Taj se koeficijent interpretira kao intenzitet varijabilnosti središnje polovice statističkog niza. Koristi se u slučajevima u kojima je medijan (tj. drugi kvartil) reprezentativnija srednja vrijednost od aritmetičke sredine. Jedan od kriterija za interpretaciju intenziteta varijabilnosti iskazanog koeficijentom kvartilne devijacije naveden je u tablici 3.4 na str. 14.

**Koeficijent varijacije** $V$ jednak je količniku standardne devijacije i aritmetičke sredine, iskazanom u postocima:

$$V = \frac{\sigma}{A} \cdot 100\ [\%].$$

Ova mjera predstavlja relativno prosječno odstupanje vrijednosti numeričkog niza od njegove aritmetičke sredine. Primjenjuje se u slučajevima u kojima je aritmetička sredina dobar re-

prezentant numeričkog niza. Jedan od kriterija za interpretaciju intenziteta varijabilnosti niza iskazanog koeficijentom varijacije naveden je u tablici 3.5.

**Teorem 5** (Čebiševljevo pravilo u opisnoj statistici)**.** *Neka je $y_1, \ldots, y_n$ niz vrijednosti kvantitativnog obilježja te neka su $A$ i $\sigma$ pripadna aritmetička sredina odnosno standardna devijacija, redom. Tada se za svaki $\alpha > 0$ u segmentu $[A - \alpha\,\sigma, A + \alpha\,\sigma]$ nalazi najmanje $\left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right) \cdot 100\,\%$ članova zadanog niza. Posebno:*

1. *u segmentu $[A - 2\sigma, A + 2\sigma]$ nalazi se najmanje 75% članova niza,*

2. *u segmentu $[A - 3\sigma, A + 3\sigma]$ nalazi se najmanje 89% članova niza.*

Za usporedbu raznorodnih numeričkih nizova koristi se **standardizirano obilježje**. Neka je $y_1, \ldots, y_n$ niz vrijednosti kvantitativnog obilježja te neka su $A$ i $\sigma$ pripadna aritmetička sredina i standardna devijacija, redom. Tada je **niz standardiziranih vrijednosti** toga obilježja niz $(z_n)$ čiji je opći član dan formulom

$$z_n = \frac{y_n - A}{\sigma}.$$

Standardizacija vrijednosti numeričkog obilježja se obično provodi prilikom određivanja vrijednosti funkcije razdiobe vjerojatnosti normalne slučajne varijable.

Tablica 3.3: Formule za izračun mjera raspršenja (disperzije)

| *mjera raspršenja* | *negrupirani podaci* | *grupirani podaci* |
|---|---|---|
| srednje apsolutno odstupanje | $\mathrm{MAD} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lvert y_i - A\rvert$ | $\mathrm{MAD} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i \lvert x_i - A\rvert$ |
| varijanca | $\mathrm{Var} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - A)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - A^2$ | $\mathrm{Var} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i\,(x_i - A)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i\,x_i^2 - A^2$ |
| standardna devijacija | $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}}$ | $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}}$ |

Tablica 3.4: Interpretacija intenziteta varijabilnosti niza pomoću koeficijenta kvartilne devijacije

| $V_q$ | 0.0 – 0.1 | 0.1 – 0.2 | 0.2 – 0.3 | 0.3 – 0.5 | 0.5 – 1.0 |
|---|---|---|---|---|---|
| *stupanj varijabilnosti* | vrlo visok | relativno visok | umjeren | relativno nizak | nizak |

Tablica 3.5: Interpretacija intenziteta varijabilnosti niza pomoću koeficijenta varijacije

| $V$ [%] | 0 – 10 | 10 – 30 | 30 – 50 | 50 – 70 | $\geq 70$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *stupanj varijabilnosti* | vrlo nizak | relativno nizak | umjeren | relativno visok | visok |

# 4 Diskretne slučajne varijable

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i neka je $S = \{x_1, x_2, \dots\}$ *konačan* ili *prebrojiv* skup. (Najčešće uzimamo da je $S \subseteq \mathbb{Z}$.)

**Diskretna slučajna varijabla** je svako preslikavanje $X : \Omega \to S$ takvo da je za svaki $x_k \in S$ skup $A_k := \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_k\}$ događaj.

Kažemo da je skup $S$ **slika** diskretne slučajne varijable $X$. Pišemo $R(X) = S$.

Ne istaknemo li drugačije, u daljnjem tekstu ovoga poglavlja pretpostavljamo je $X$ diskretna slučajna varijabla sa slikom $S = \{x_1, x_2, \dots\}$.

Svakom elementu $x_k \in S$ jednoznačno je pridružen broj $p_k := P(A_k)$. Često pišemo ovako:

$$p_k = P(X = x_k).$$

Ti brojevi imaju sljedeća svojstva:

1. $p_k > 0$,
2. $\sum_k p_k = 1$.

**Zakon razdiobe slučajne varijable** $X$ sastoji se od njezine slike i odgovarajućih vjerojatnosti. Pišemo:

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_k & \cdots \end{pmatrix}.$$

Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ takav da je $S = R(X) \subseteq A$ te neka je $f : A \to \mathbb{R}$ funkcija. Tada je $Y = f \circ X$ slučajna varijabla čiji je zakon razdiobe

$$Y \sim \begin{pmatrix} f(x_1) & f(x_2) & \cdots & f(x_k) & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_k & \cdots \end{pmatrix}.$$

Pišemo $Y = f(X)$.

Zakon razdiobe varijable $Y$ dovodimo u *reducirani oblik*

$$Y \sim \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots \\ q_1 & q_2 & \cdots \end{pmatrix},$$

gdje su $y_1, y_2, \dots$ sve međusobno različite vrijednosti slike funkcije $f \circ X$. Ako je

$$y_k = f(x_{k_1}) = f(x_{k_2}) = \cdots,$$

tada je

$$q_k = p_{k_1} + p_{k_2} + \cdots .$$

**Funkcija gustoće vjerojatnosti** slučajne varijable $X$ je funkcija $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$ definirana formulom:

$$f(x) = \begin{cases} p_k = P(X = x_k), & \text{za } x = x_k, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Osnovno svojstvo funkcije gustoće vjerojatnosti je

$$\sum_k f(x_k) = \sum_k p_k = 1.$$

**Funkcija razdiobe vjerojatnosti** (ili kraće: **funkcija razdiobe**) slučajne varijable $X$ je funkcija $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ definirana formulom

$$F(x) = P(X \leq x) := \sum_{x_k \leq x} P(X = x_k) = \sum_{x_k \leq x} p_k.$$

Funkcija razdiobe je *stepenasta* funkcija sa „skokovima" u točkama $x_1, x_2, \ldots$. Iznosi tih „skokova" su vjerojatnosti $p_1, p_2, \ldots$.

Neka korisna svojstva funkcije razdiobe vjerojatnosti su sljedeća.

1. $F$ je neopadajuća, tj. $x_1 < x_2 \implies F(x_1) \leq F(x_2)$.
2. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$.
3. $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$,
4. $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$, za sve $a, b \in \mathbb{R}$ takve da je $a < b$.

**Matematičko očekivanje** (ili jednostavno **očekivanje**) $\mathrm{E}(X)$ slučajne varijable $X$ je definirano formulom:

$$\mathrm{E}(X) = \sum_k x_k \, p_k.$$

Ono se obično interpretira kao vjerojatnosni analogon *težinske* aritmetičke sredine.

**Varijanca** $\mathrm{Var}(X)$ i **standardna devijacija** $\sigma(X)$ slučajne varijable $X$ definirane su formulama:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}(X))^2\right),$$
$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$

Njihove interpretacije su potpuno analogne interpretacijama varijance, odnosno standardne devijacije u opisnoj statistici, pri čemu se umjesto aritmetičke sredine promatra očekivanje slučajne varijable. Npr. varijanca slučajne varijable interpretira se kao očekivano kvadratno odstupanje vrijednosti slučajne varijable od njezinog očekivanja itd.

Za slučajnu varijablu $X$ te $a, b \in \mathbb{R}$ takve da je $a \neq 0$ vrijede sljedeća svojstva.

1. $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$, gdje je $\mathrm{E}(X^2) = \sum_k x_k^2\, p_k$.

2. $\mathrm{Var}(a\,X + b) = a^2\ \mathrm{Var}(X)$.

3. $\sigma(a\,X + b) = |a|\,\sigma(X)$.

**Teorem 6** (Čebiševljev teorem za diskretne slučajne varijable)**.** *Neka je $X$ diskretna slučajna varijabla s očekivanjem $\mathrm{E}(X)$ i standardnom devijacijom $\sigma$. Tada za svaki $\alpha > 0$ vrijedi nejednakost*

$$P\left(\mathrm{E}(X) - \alpha\,\sigma \leq X \leq \mathrm{E}(X) + \alpha\,\sigma\right) > 1 - \frac{1}{\alpha^2}.$$

## 4.1 Diskretna jednolika (uniformna) razdioba

Kažemo da diskretna slučajna varijabla $X$ ima **jednoliku** ili **uniformnu razdiobu** ako je $S = R(X) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ i vrijedi

$$P(X = x_k) = \frac{1}{n}, \quad \forall k = 1, \ldots, n.$$

Pišemo $X \sim U(n)$ i kažemo da je $X$ **diskretna jednolika (uniformna) slučajna varijabla s parametrom** $n$.

Pretpostavimo li da je $S = \{1, 2, \ldots, n\}$, tada su očekivanje, varijanca i standardna devijacija slučajne varijable $X \sim U(n)$ redom dani formulama:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \frac{n+1}{2}, \\
\mathrm{Var}(X) &= \frac{n^2 - 1}{12}, \\
\sigma(X) &= \frac{1}{6}\sqrt{3\,n^2 - 3}.
\end{aligned}$$

## 4.2 Binomna razdioba

Neka su $n \in \mathbb{N}$ i $p \in \langle 0, 1\rangle$ proizvoljni ali fiksirani te neka je $X$ slučajna varijabla koja označava ukupan broj pojavljivanja nekog događaja („uspjeha”) u $n$-terostrukom nezavisnom ponavljanju slučajnog pokusa modeliranog Bernoullijevom shemom (vidi stranicu 8). Tada kažemo da je $X$ **binomna slučajna varijabla s parametrima $n$ i $p$.**

Pišemo $X \sim B(n, p)$ i kažemo da $X$ ima **binomnu razdiobu**.

Slika slučajne varijable $X$ je skup $\{0, 1, \ldots, n\}$. Vrijednosti pripadne funkcije gustoće vjerojatnosti slučajne varijable $X$ dane su formulom:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad \forall k = 0, 1, \ldots, n.$$

Očekivanje, varijanca i standardna devijacija slučajne varijable $X \sim B(n, p)$ su redom dani formulama:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= n\,p, \\ \mathrm{Var}(X) &= n\,p\,(1-p), \\ \sigma(X) &= \sqrt{n\,p\,(1-p)}. \end{aligned}$$

## 4.3 Poissonova razdioba

**Poissonova slučajna varijabla** je slučajna varijabla koja broji pojavljivanja nekog događaja („uspjeha") u *jediničnom* vremenskom intervalu uz sljedeće pretpostavke (tzv. **Poissonov model**):

1. Vjerojatnost pojave „uspjeha" ne ovisi o tome u kojem će se jediničnom intervalu on dogoditi.

2. Broj „uspjeha" koji su se pojavili u jednom jediničnom intervalu neovisan je o broju „uspjeha" koji su se pojavili u nekom drugom jediničnom intervalu.

3. Očekivani broj „uspjeha" isti je za sve jedinične intervale i jednak je broju $\lambda > 0$.

Kažemo da slučajna varijabla $X$ ima **Poissonovu razdiobu s parametrom** $\lambda > 0$ ako je $R(X) = \mathbb{N} \cup \{0\}$ te ako su vrijednosti pripadne funkcije gustoće vjerojatnosti slučajne varijable $X$ dane formulom:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}, \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Pišemo $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$ i kažemo da je $X$ **Poissonova slučajna varijabla s parametrom** $\lambda$.

Neke vrijednosti funkcije gustoće vjerojatnosti slučajne varijable $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$, za različite vrijednosti parametra $\lambda$, dane su u tablici 7.5 na str. 46.

Očekivanje, varijanca i standardna devijacija slučajne varijable $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$ su redom dani formulama:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) = \mathrm{Var}(X) &= \lambda, \\ \sigma(X) &= \sqrt{\lambda}. \end{aligned}$$

Za velike $n$ i male $p$ binomnu slučajnu varijablu $X \sim B(n, p)$ možemo dobro aproksimirati Poissonovom slučajnom varijablom s parametrom $\lambda = n\,p$. Preciznije, vrijedi sljedeća tvrdnja.

**Teorem 7** (Poisson)**.** *Neka je $X_n \sim B(n, p_n)$ niz binomnih slučajnih varijabli takav da vrijedi $\lim_n p_n = 0$ i $\lim_n n\,p_n = \lambda > 0$. Tada za svaki $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ vrijedi*

$$\lim_n P(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}.$$

## 4.4 Geometrijska razdioba

Pretpostavimo da neki slučajni pokus koji ima točno dva ishoda, „uspjeh" i „neuspjeh", ponavljamo nezavisno sve dok se prvi put ne dogodi „uspjeh". Neka je $p$ vjerojatnost ostvarivanja „uspjeha" u svakom ponavljanju pokusa te neka je $X$ slučajna varijabla koja označava ukupan broj ponavljanja pokusa sve do pojave „uspjeha" (uračunavajući i pokus čiji je ishod „uspjeh").

Slučajnu varijablu $X$ nazivamo **geometrijska slučajna varijabla s parametrom** $p$. Pišemo $X \sim G(p)$ i kažemo da $X$ ima **geometrijsku razdiobu**.

Slika slučajne varijable $X$ je skup $\mathbb{N}$, a vrijednosti pripadne funkcije gustoće vjerojatnosti dane su formulom:

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Pripadna funkcija razdiobe vjerojatnosti $F : \mathbb{N} \to [0, 1]$ dana je formulom:

$$F(k) = 1 - (1-p)^k.$$

Iz definicije funkcije $F$ slijedi, za svaki $k \in \mathbb{N}$:

$$P(X \leq k) = 1 - (1-p)^k,$$
$$P(X > k) = (1-p)^k.$$

Očekivanje, varijanca i standardna devijacija slučajne varijable $X \sim G(p)$ su redom dani formulama:

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{p},$$
$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2},$$
$$\sigma(X) = \frac{\sqrt{1-p}}{p}.$$

Geometrijska razdioba može se karakterizirati sljedećim osnovnim svojstvom.

**Teorem 8.** *Neka je $X$ slučajna varijabla sa slikom $\mathbb{N}$. Tada je $X$ geometrijska slučajna varijabla ako i samo ako za sve $m, n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$P(X > m + n | X \geq m) = P(X > n).$$

Kažemo da geometrijska slučajna varijabla ima **svojstvo „zaboravljanja"**.

## 4.5 Hipergeometrijska razdioba

Pretpostavimo da u skupu od $N$ elemenata njih točno $M \leq N$ ima obilježje (svojstvo) $O$ (npr. „škart", element 1. klase i sl.). Iz promatranog skupa odaberemo uzorak od $n \leq N$ elemenata bez vraćanja (isti element ne može više puta biti izabran u uzorak). Neka je $X$ slučajna varijabla koja označava ukupan broj elemenata iz tog uzorka koji imaju obilježje $O$.

Slučajnu varijablu $X$ nazivamo **hipergeometrijska slučajna varijabla s parametrima $N$, $M$ i $n$**. Pišemo $X \sim H(N, M, n)$ i kažemo da $X$ ima **hipergeometrijsku razdiobu**.

Slika slučajne varijable $X \sim H(N, M, n)$ je skup

$$S = \{k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \max\{0, n + M - N\} \leq k \leq \min\{M, n\}\},$$

a vrijednosti pripadne funkcije gustoće vjerojatnosti dane su formulom:

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad \forall k \in S.$$

Očekivanje, varijanca i standardna devijacija slučajne varijable $X$ su redom dani formulama:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \frac{M}{N}\, n, \\ \mathrm{Var}(X) &= \frac{M\,(N-M)\,(N-n)\,n}{N^2\,(N-1)}, \\ \sigma(X) &= \frac{1}{N}\sqrt{\frac{M\,(N-M)\,(N-n)\,n}{N-1}}. \end{aligned}$$

*Napomena* 2. U slučaju velikog broja elemenata osnovnog skupa ($N$) i relativno malog broja elemenata uzorka ($n$), hipergeometrijska slučajna varijabla $X \sim H(N, M, n)$ može se dobro aproksimirati binomnom slučajnom varijablom $X' \sim B\left(n, \frac{M}{N}\right)$.

# 5 Neprekidne (kontinuirane) slučajne varijable

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor.

Kažemo da je funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ **neprekidna** ili **kontinuirana slučajna varijabla** ako vrijedi:

1. $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$

2. postoji nenegativna funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da vrijedi

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Slika** slučajne varijable $X$, u oznaci $R(X)$, je najčešće interval u $\mathbb{R}$, unija takvih intervala i sl.

Ne istaknemo li drugačije, u ovom poglavlju pretpostavljamo da je $X$ neprekidna slučajna varijabla.

Za svaku slučajnu varijablu $X$ vrijedi

$$P(X = x) = 0, \quad \forall x \in R(X).$$

Funkcija $f$ iz definicije neprekidne slučajne varijable naziva se **funkcija gustoće vjerojatnosti** ili **gustoća razdiobe vjerojatnosti** slučajne varijable $X$. Ona nije vjerojatnost jer njezina vrijednost može biti strogo veća od 1. Vrijednost $f(x)$ daje informacije o vjerojatnosti realizacije slučajne varijable u okolini točke $x$. Osnovna svojstva funkcije $f$ su:

1. $f(x) \geq 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$ (nenegativnost),

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ (normiranost).

Neka su $X$ neprekidna slučajna varijabla, $f_X$ njezina funkcija gustoće vjerojatnosti i $g : \mathbb{R} \to \mathcal{R}(g)$ strogo monotona derivabilna bijekcija, pri čemu $\mathcal{R}(g)$ označava njezinu sliku $\{g(x) : x \in \mathbb{R}\}$. Tada je $Y = g \circ X$ neprekidna slučajna varijabla čija je funkcija gustoće vjerojatnosti dana formulom

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{f(g^{-1}(y))}{|g'(g^{-1}(y))|}, & \forall y \in \mathcal{R}(g), \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Pišemo $Y = g(X)$.

**Funkcija razdiobe vjerojatnosti** slučajne varijable $X$ je funkcija $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ definirana formulom

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Funkcija $F$ je neprekidna, neopadajuća i određuje vjerojatnost da slučajna varijabla $X$ poprimi vrijednost ne veću od $x$.

Za razliku od funkcije $F$, funkcija $f$ nije nužno neprekidna. Međutim, ako je $f$ neprekidna u $c \in \mathbb{R}$, onda vrijedi

$$F'(c) = f(c).$$

Osnovna svojstva funkcije $F$ su:

1. $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$,

2. $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

Iz definicije funkcije $F$ slijedi:

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

*Napomena* 3. Ako je funkcija $f$ definirana nekom formulom na nekom segmentu, onda dogovorno pretpostavljamo da je izvan tog segmenta ta funkcija jednaka nulfunkciji. Također, ako su funkcije $f$ ili $F$ definirane nekom formulom bez naznake prirodne domene, onda dogovorno pretpostavljamo da je ta domena čitav skup $\mathbb{R}$.

**Očekivanje**, **varijanca** i **standardna devijacija** slučajne varijable $X$ definirani su sljedećim formulama, redom:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\,\mathrm{d}x,\\
\mathrm{Var}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathrm{E}(X))^2\, f(x)\,\mathrm{d}x,\\
\sigma(X) &= \sqrt{\mathrm{Var}(X)}.
\end{aligned}$$

U nastavku su navedena neka korisna svojstva očekivanja, varijance i standardne devijacije slučajne varijable $X$.

1. $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}(X))^2\right) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f(x)\,\mathrm{d}x - \mathrm{E}(X)^2$.

2. Ako je realna funkcija $g$ strogo monotona derivabilna bijekcija i $Y = g(X)$, tada je $Y$ neprekidna slučajna varijabla čije je očekivanje dano formulom

$$\mathrm{E}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. Ako je $Y = a\,X + b$ za neke $a, b \in \mathbb{R}$ pri čemu je $a \neq 0$, tada vrijedi:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Y) &= a\ \mathrm{E}(X) + b, \\ \mathrm{Var}(Y) &= a^2\ \mathrm{Var}(X), \\ \sigma(Y) &= |a|\ \sigma(X). \end{aligned}$$

Neka je $X$ slučajna varijabla, $F$ njezina funkcija razdiobe vjerojatnosti i $q \in \langle 0, 1\rangle$. **$q$-kvantil slučajne varijable** $X$ je broj $t \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi

$$\lim_{x \to t^-} F(x) \leq q \leq F(t).$$

Za $q = 0.25$ vrijednost $t$ naziva se **prvi** ili **donji kvartil** slučajne varijable $X$.
Za $q = 0.5$ vrijednost $t$ naziva se **drugi kvartil** ili **medijan** slučajne varijable $X$.
Za $q = 0.75$ vrijednost $t$ naziva se **gornji** ili **treći kvartil** slučajne varijable $X$.

## 5.1 Neprekidna jednolika (uniformna) razdioba

Neka je $X$ neprekidna slučajna varijabla takva da je $R(X) = [a, b]$ za neke $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Kažemo da je $X$ ima **jednoliku** ili **uniformnu razdiobu na** $[a, b]$ ako je njezina funkcija gustoće vjerojatnosti $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana formulom:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad \forall x \in [a, b].$$

Pišemo $X \sim U(a, b)$ i kažemo da je $X$ **neprekidna jednolika (uniformna) slučajna varijabla s parametrima** $a$ **i** $b$. Pripadna funkcija razdiobe vjerojatnosti $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ dana je formulom:

$$F(X) = \begin{cases} 0, & \text{za } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{za } a < x < b, \\ 1, & \text{za } x \geq b. \end{cases}$$

Očekivanje, varijanca i standardna devijacija slučajne varijable $X \sim U(a, b)$ su redom dani formulama:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \frac{a+b}{2}, \\ \mathrm{Var}(X) &= \frac{(b-a)^2}{12} \\ \sigma(X) &= \frac{\sqrt{3}}{6}\,(b-a). \end{aligned}$$

## 5.2 Eksponencijalna razdioba

Neka je $X$ neprekidna slučajna varijabla takva da je $R(X) = [0, +\infty\rangle$ te neka je $\lambda > 0$. Kažemo da $X$ ima **eksponencijalnu razdiobu** ako je njezina funkcija gustoće vjerojatnosti $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

dana formulom:

$$f(x) = \lambda \, \mathrm{e}^{-\lambda x}, \quad \forall x > 0$$

Pišemo $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ i kažemo da je $X$ **eksponencijalna slučajna varijabla s parametrom** $\lambda$. Pripadna funkcija razdiobe vjerojatnosti $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ dana je formulom:

$$F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}, \forall x > 0.$$

Očekivanje, standardna devijacija i varijanca slučajne varijable $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ su redom dani formulama:

$$\mathrm{E}(x) = \sigma(X) = \frac{1}{\lambda},$$
$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Važna karakterizacija eksponencijalne slučajne varijable iskazana je sljedećim teoremom.

**Teorem 9.** *Neprekidna slučajna varijabla $X$ ima eksponencijalnu razdiobu ako i samo ako $X$ ima tzv.* ***svojstvo „zaboravljanja”****, tj. ako i samo ako za sve $s, t > 0$ vrijedi*

$$P(X > s + t | X > t) = P(X > s).$$

Veza Poissonove i eksponencijalne razdiobe iskazana je sljedećim teoremom.

**Teorem 10.** *Neka je $Y \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$ Poissonova slučajna varijabla koja označava broj pojavljivanja nekog događaja u jediničnom vremenskom intervalu. Neka je $X$ slučajna varijabla koja označava vrijeme proteklo do* prvog *pojavljivanja tog događaja. Tada je $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.*

## 5.3 Normalna razdioba

Neka je $X$ neprekidna slučajna varijabla takva da je $R(X) = \mathbb{R}$ te neka su $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$ konstante. Kažemo da je $X$ ima **normalnu razdiobu** ako je njezina funkcija gustoće vjerojatnosti $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana formulom:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\,\pi}} \, \mathrm{e}^{\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}}.$$

Pišemo $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ i kažemo da je $X$ **normalna slučajna varijabla s parametrima $\mu$ i $\sigma^2$**. Pripadnu funkciju razdiobe vjerojatnosti $F$ nije moguće zapisati pomoću zatvorene formule, pa se njezine vrijednosti približno određuju numeričkim metodama.

Očekivanje $\mathrm{E}(X)$ i standardna devijacija $\sigma(X)$ slučajne varijable $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ su redom jednaki $\mu$ i $\sigma$, dok je varijanca $\mathrm{Var}(X)$ jednaka $\sigma^2$.

Posebno, za $\mu = 0$ i $\sigma = 1$ dobivamo tzv. **standardnu** ili **jediničnu normalnu slučajnu varijablu**. Pišemo $X \sim N(0, 1)$ i kažemo da $X$ ima **standardnu normalnu slučajnu**

**razdiobu**. Pripadna funkcija gustoće te slučajne varijable je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana formulom:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Pripadna funkcija razdiobe vjerojatnosti označava se s $F^*$. Vrijednosti te funkcije prikazane su u tablici 7.6 na stranici 47.

Veza između opće i jedinične normalne slučajne varijable iskazana je sljedećim teoremom.

**Teorem 11.** *Neka su $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$ konstante.*

1. *Ako je $X \sim N(0,1)$, tada je $Y = \sigma\,X + \mu \sim N(\mu, \sigma^2)$.*
2. *Ako je $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, tada je $Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.*

Iz druge tvrdnje gornjeg teorema slijedi da se računanje vrijednosti funkcije razdiobe vjerojatnosti slučajne varijable $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ svodi na računanje vrijednosti funkcije razdiobe vjerojatnosti jedinične normalne slučajne varijable $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$. Slučajnu varijablu $Y$ nazivamo **standardizirana normalna slučajna varijabla**[1].

## 5.4 Čebiševljeva nejednakost i pravilo $3\,\sigma$

**Teorem 12** (Čebišev)**.** *Neka je $X$ neprekidna slučajna varijabla s očekivanjem $\mathrm{E}(X) < +\infty$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi nejednakost*

$$P\left(|X - \mathrm{E}(X)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Ova ocjena može se poboljšati ako je $X$ normalna slučajna varijabla.

**Teorem 13.** *Neka su $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ i $k \in \mathbb{N}$. Tada vrijedi:*

$$P\left(|X - \mu| < k\,\sigma\right) = 2\,F^*(k) - 1.$$

**Korolar 1** (pravilo $3\,\sigma$)**.** *Neka je $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Tada vrijedi:*

$$P(\mu - 3\,\sigma \leq X \leq \mu + 3\,\sigma) = 99.73\%.$$

[1] Općenito, **standardizacija** proizvoljne slučajne varijable $X$ je transformacija oblika $Y = a\,X + b$ za $a, b \in \mathbb{R}$ i $a \neq 0$ takva da za dobivenu slučajnu varijablu $Y$ vrijedi $\mathrm{E}(Y) = 0$ i $\sigma(Y) = 1$.

## 5.5 Nezavisne slučajne varijable. Središnji granični teorem

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor, $S$ konačan ili prebrojiv skup i $X, Y : \Omega \to S$ (diskretne) slučajne varijable.

Slučajne varijable $X$ i $Y$ su **nezavisne** ako za sve $x, y \in S$ vrijedi:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)\, P(Y = y).$$

Ta jednakost je ekvivalentna jednakosti

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)\, P(Y \in B), \quad \forall A, B \subset S.$$

Ova se definicija proširuje na konačan niz slučajnih varijabli. Kažemo da su slučajne varijable $X_1, X_2, \ldots, X_n : \Omega \to S$ **nezavisne** ako za sve $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset S$ vrijedi:

$$P(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \ldots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1)\, P(X_2 \in A_2) \cdots P(X_n \in A_n).$$

Nezavisnost slučajnih varijabli može se definirati i u slučaju beskonačnog niza slučajnih varijabli. Kažemo da su slučajne varijable $X_1, X_2, \cdots : \Omega \to S$ **nezavisne** ako su slučajne varijable $X_i$, $i \in I$ nezavisne za svaki konačan podskup indeksa $I \subset \mathbb{N}$.

Analogne definicije vrijede i za neprekidne slučajne varijable. Npr. ako su $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ (neprekidne) slučajne varijable, onda su $X$ i $Y$ **nezavisne** ako za sve intervale $A, B \subset \mathbb{R}$ vrijedi:

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)\, P(Y \in B).$$

Jedna od važnih primjena nezavisnih slučajnih varijabli iskazana je sljedećim teoremom.

**Teorem 14** (Središnji granični teorem)**.** *Neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli sa zajedničkim očekivanjem $\mu$, nenegativnom i konačnom varijancom te standardnom devijacijom $\sigma$. Neka je*

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

*Tada vrijedi:*

$$\lim_n P\left(\frac{S_n - n\,\mu}{\sigma\,\sqrt{n}} \leq x\right) = F^*(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

*Ekvivalentno,*

$$(\bar{X})_n := \frac{S_n}{n} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \textit{kad } n \to +\infty.$$

Neki posebni slučajevi ovog teorema (tzv. granični teoremi u Bernoullijevoj shemi) iskazani su u sljedećoj točki.

## 5.6 Granični teoremi u Bernoullijevoj shemi

Binomnu razdiobu možemo uz određene uvjete aproksimirati normalnom razdiobom. Preciznije, vrijede sljedeći **granični teoremi**.

**Teorem 15** (lokalni de Moivrè-Laplaceov teorem)**.** *Ako je $p \in \langle 0,1\rangle$, $n \in \mathbb{N}$ dovoljno velik broj i $X \sim B(n,p)$ binomna slučajna varijabla, tada vrijedi:*

$$P(X=k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,n\,p\,(1-p)}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(k-n\,p)^2}{2\,n\,p\,(1-p)}}, \quad \forall k = 0,1,\ldots,n.$$

**Teorem 16** (integralni de Moivrè-Laplaceov teorem)**.** *Neka je $p \in \langle 0,1\rangle$, $n \in \mathbb{N}$ dovoljno velik broj i $X \sim B(n,p)$ binomna slučajna varijabla. Tada za sve $a, b \in \mathbb{R}$ takve da je $a \leq b$ vrijedi:*

$$P(a \leq X \leq b) \approx F^*\left(\frac{b-n\,p}{\sqrt{n\,p\,(1-p)}}\right) - F^*\left(\frac{a-n\,p}{\sqrt{n\,p\,(1-p)}}\right).$$

*Napomena* 4. Gornje aproksimacije su dobre već za $n \geq 10$. One su tim bolje (i točnije za relativno male vrijednosti $n$) što je vrijednost $p$ bliža 0.5.

## 5.7 Neprekidne slučajne varijable vezane uz gama funkciju

Funkciju $\Gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ zadanu formulom

$$\Gamma\,(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t} dt,$$

nazivamo **gama funkcijom**. Graf te funkcije prikazan je na slici 6.1 na stranici 39. Sljedeći teoremi ukazuju na činjenicu kako gama funkcija predstavlja proširenje faktorijelne funkcije na skup pozitivnih realnih brojeva.

**Teorem 17.** *Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada vrijedi*

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

**Teorem 18.** *Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $x \in \langle 0,1\rangle$. Tada vrijedi*

$$\Gamma(n+x) = (n+x-1)\,(n+x-2)\,\cdots\,(x+1)\,x\,\Gamma(x).$$

### 5.7.1 Studentova ili t-razdioba

Neka je $X$ neprekidna slučajna varijabla čija je slika skup $\mathbb{R}$ te neka je $n \in \mathbb{N}$. Kažemo da $X$ ima **$t$-razdiobu** ili **Studentovu razdiobu s $n$ stupnjeva slobode**[2] ako je njezina funkcija gustoće vjerojatnosti $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana formulom:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{n\,\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

Pišemo $X \sim t(n)$. Vrijednosti inverza pripadne funkcije razdiobe vjerojatnosti (vidi napomenu 5) prikazane su u Tablici 7.8 na stranici 49.

Očekivanje i varijanca slučajne varijable $X \sim t(n)$ su redom:

$$\mathrm{E}(X) = 0 \quad \text{za } n \geq 2 \text{ (za } n = 1 \text{ očekivanje ne postoji)},$$
$$\mathrm{Var}(X) = \frac{n}{n-2} \quad \text{za } n \geq 3 \text{ (za } n = 1 \text{ i } n = 2 \text{ varijanca ne postoji)}.$$

Za dovoljno velike $n$ (npr. $n > 30$) Studentova razdioba može se aproksimirati standardnom normalnom razdiobom $X \sim N(0, 1)$.

### 5.7.2 $\chi^2$-razdioba

Neka je $X$ neprekidna slučajna varijabla čija je slika $\langle 0, \infty\rangle$ te neka je $n \in \mathbb{N}$. Kažemo da $X$ ima **$\chi^2$-razdiobu s $n$ stupnjeva slobode** ako je njezina funkcija gustoće vjerojatnosti $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana formulom:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)}\, x^{\frac{n}{2}-1}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}, & x > 0. \end{cases}$$

Pišemo $X \sim \chi^2(n)$.

Vrijednosti inverza pripadne funkcije razdiobe vjerojatnosti (vidi napomenu 5) prikazane su u Tablici 7.7 na stranici 48.

Očekivanje, varijanca i standardna devijacija slučajne varijable $X \sim \chi^2(n)$ su redom:

$$\mathrm{E}(X) = n,$$
$$\mathrm{Var}(X) = 2\,n,$$
$$\sigma(X) = \sqrt{2\,n}.$$

*Napomena* 5. U praktičnoj primjeni $\chi^2$-razdiobe i $t$-razdiobe, npr. na intervalne procjene statističkih parametara i testiranja hipoteza (vidjeti poglavlje 6), značajno važnije su vrijednosti inverza funkcija razdiobe vjerojatnosti, pa su zbog toga tabelirane upravo te vrijednosti.

[2] Stupanj slobode je ukupan broj varijabli u procjeni nekog statističkog parametra čije se vrijednosti mogu proizvoljno mijenjati.

# 6 Statistika

## 6.1 Osnove teorije uzoraka

**Osnovni (generalni) skup** ili **populacija** skup je elemenata koji se žele obuhvatiti istraživanjem. Uzorak je dio populacije koji je odabran za proučavanje. Uzorak kod kojeg je svaki element slučajno izabran iz populacije naziva se **slučajni uzorak**. Element populacije ili uzorka je subjekt ili objekt o kojem se prikuplja informacija.

Neka je $X$ slučajna varijabla (statističko obilježje populacije) s funkcijom razdiobe $F$. Slučajni vektor $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, čije su komponente međusobno nezavisne slučajne varijable sa jednakom funkcijom razdiobe vjerojatnosti $F$, zove se **slučajni uzorak veličine** $n$.

Ako je izmjerena vrijednost slučajne varijable $X_i$ jednaka $x_i \in \mathbb{R}(X), i = 1, ..., n$ tada je opažena vrijednost slučajnog uzorka uređena $n$-torka $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Za diskretnu slučajnu varijablu $X$, $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ je diskretni slučajni uzorak. Ako je $X$ neprekidna slučajna varijabla tada je $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ kontinuirani slučajni uzorak.

## 6.2 Točkaste procjene

**Točkasta procjena** parametra je procjena kod koje se vrijednost procjenitelja uzima kao procjena parametra promatrane razdiobe.

**Procjenitelj** ili **statistika** nepoznatog parametra $t$ je funkcija $\hat{T} = h(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ slučajnog uzorka $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, koja je i sama slučajna varijabla. Procjenitelj $\hat{T}$ je **nepristran**, ako je očekivanje $E(\hat{T})$ slučajne varijable $\hat{T}$ jednako točnoj vrijednosti parametra koji se procjenjuje.

**Uzoračka aritmetička sredina** je statistika

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

i predstavlja slučajnu varijablu čije su vrijednosti dobivene tako da se od svake moguće realizacije uzorka duljine $n$ iz populacije pronađe aritmetička sredina.

Ako se pojedine vrijednosti pojavljuju više puta, opažena vrijednost uzoračke aritmetičke sredine može se izraziti formulom:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} f_i \, x_i = \sum_{i=1}^{m} r_i \, x_i$$

gdje je $f_i$ frekvencija vrijednosti $x_i$, odnosno $r_i$ relativna frekvencija.

Svojstva uzoračke aritmetičke sredine:

1. $E\left(\bar{X}\right) = \mu$ — pokazuje da je uzoračka aritmetička sredina nepristrani procjenitelj očekivanja,

2. $\sigma_{\bar{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ — pokazuje da je rasipanje manje što je veći uzorak.

**Varijanca uzorka** ili jednostavno **varijanca** je statistika

$$\hat{\Sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2,$$

odnosno ako se pojedine vrijednosti pojavljuju više puta tada se njena opažena vrijednost može izraziti kao:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} f_i\,(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} f_i\,x_i^2 - \bar{x}^2,$$

gdje je $f_i$ frekvencija vrijednosti $x_i$.

**Korigirana (uzoračka) varijanca** je statistika

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2,$$

odnosno ako se pojedine vrijednosti pojavljuju više puta tada se ona može izraziti kao:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{m} f_i\,(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{m} f_i\,x_i^2 - n\,\bar{x}^2\right),$$

gdje je $f_i$ frekvencija vrijednosti $x_i$.

## 6.3 Intervalne procjene

**Intervalna procjena** podrazumijeva konstruiranje intervala oko točkovne procjene pri čemu on sadrži nepoznatu vrijednost parametra promatrane razdiobe s određenom pouzdanošću. Razina pouzdanosti je vjerojatnost da promatrani interval sadrži vrijednost nepoznatog parametra promatrane razdiobe. Uobičajeno se uzima da je razina pouzdanosti 0.9, 0.95 ili 0.99.

Za danu pouzdanost $\gamma \in [0,1]$, slučajni uzorak $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ iz $X$ i statistike $L_n = f\,(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ i $D_n = g\,(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ kažemo da je

$$[L_n, D_n]$$

**interval povjerenja pouzdanosti** $\gamma$ za parametar $\hat{T}$ ako je $P(L_n \leq \hat{T} \leq D_n) \geq \gamma$. Za parametar $\hat{T}$ se najčešće uzima očekivanje ili varijanca.

### 6.3.1 Intervalna procjena očekivanja normalne razdiobe s poznatom varijancom

Neka je $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ slučajni uzorak slučajne varijable $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ s poznatom varijancom $\sigma^2$. Interval povjerenja za očekivanje $\mu$ s pouzdanošću $\gamma$ je

$$\left\langle \bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\rangle,$$

gdje je $z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantil standardne normalne razdiobe $F^*\left(z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) = \frac{1+\gamma}{2}$. Naime, brojevi $z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ su zapravo vrijednosti $z_{\frac{1+\gamma}{2}} = G^*\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$, gdje je $G^*$ inverz funkcije $F^*$. Najčešće korištene vrijednosti funkcije $G^*$ navedene su u Tablici 6.1.

Tablica 6.1: Najčešće korištene vrijednosti funkcije $G^*$

| $\gamma$ | $\frac{1+\gamma}{2}$ | $z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ |
|---|---|---|
| 0.90 | 0.95 | 1.64485 |
| 0.95 | 0.975 | 1.95996 |
| 0.99 | 0.995 | 2.57583 |

Širina intervala je

$$\delta = 2 \cdot z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Najmanja veličina uzorka potrebna za procjenu intervala za očekivanje $\mu$ s pouzdanošću $\gamma$ i širinom $\delta$ je:

$$n \geq 4 \cdot z^2_{\frac{1+\gamma}{2}} \cdot \frac{\sigma^2}{\delta^2}.$$

### 6.3.2 Intervalna procjena očekivanja normalne razdiobe s nepoznatom varijancom

Neka je $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ slučajni uzorak slučajne varijable $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ s nepoznatom varijancom $\sigma^2$. Interval povjerenja za očekivanje $\mu$ s pouzdanošću $\gamma$ je

$$\left\langle \bar{X} - t_{\frac{1+\gamma}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\frac{1+\gamma}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right\rangle,$$

gdje je $t_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantil Studentove razdiobe $t(n-1)$ s $n-1$ stupnjeva slobode.

Vrijednosti za $t_{\frac{1+\gamma}{2}}$ prikazane su u Tablici 7.8 na stranici 49.

Širina intervala je

$$\delta = 2 \cdot t_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}.$$

### 6.3.3 Intervalna procjena varijance normalne razdiobe s poznatim očekivanjem

Neka je $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ slučajni uzorak slučajne varijable $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ s poznatim očekivanjem $\mu$. Interval povjerenja za varijancu $\sigma^2$ s pouzdanošću $\gamma$ je

$$\left\langle \frac{1}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2, \frac{1}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 \right\rangle,$$

gdje su $\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}$ i $\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}$ kvantili hikvadrat razdiobe $\chi^2(n)$.

Vrijednosti za $\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}$ i $\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}$ prikazane su u Tablici 7.7 na stranici 48.

Širina intervala je

$$\delta = \left( \frac{1}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}} - \frac{1}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}} \right) \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2.$$

### 6.3.4 Intervalna procjena varijance normalne razdiobe s nepoznatim očekivanjem

Neka je $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ slučajni uzorak slučajne varijable $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ s nepoznatim očekivanjem $\mu$. Interval povjerenja za varijancu $\sigma^2$ s pouzdanošću $\gamma$ je

$$\left\langle \frac{n-1}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}} \cdot S^2, \frac{n-1}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}} \cdot S^2 \right\rangle,$$

gdje su $\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}$ i $\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}$ kvantili hikvadrat razdiobe $\chi^2(n-1)$ s $n-1$ stupnjeva slobode.

Vrijednosti za $\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}$ i $\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}$ prikazane su u Tablici 7.7 na stranici 48.

Širina intervala je

$$\delta = (n-1) S^2 \left( \frac{1}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}} - \frac{1}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}} \right).$$

### 6.3.5 Intervalna procjena vjerojatnosti binomne razdiobe

Neka je $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ slučajni uzorak slučajne varijable $X \sim B(n, p)$. Interval povjerenja za vjerojatnost $p$ s pouzdanošću $\gamma$ je

$$\left\langle \bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\bar{X}\left(1-\bar{X}\right)}{n}}, \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\bar{X}\left(1-\bar{X}\right)}{n}} \right\rangle,$$

gdje je $z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ kvantil standardne normalne razdiobe $F^*\left(z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) = \frac{1+\gamma}{2}$. Vrijednosti za $z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ nalaze se u Tablici 7.6 na stranici 47 (ili Tablici 6.1 na stranici 31).

Širina intervala je

$$\delta = 2 \cdot z_{\frac{1+\gamma}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\bar{X}\left(1-\bar{X}\right)}{n}}.$$

## 6.4 Testiranje hipoteza

Neka je $X$ slučajna varijabla koja modelira ishode slučajnog pokusa. **Statistička hipoteza** je bilo koja pretpostavka o razdiobi slučajne varijable $X$. **Neparametarska hipoteza** je pretpostavka o funkciji razdiobe slučajne varijable $X$. **Parametarska hipoteza** je pretpostavka o parametrima poznate razdiobe slučajne varijable $X$. Statističke hipoteze su **nul-hipoteza** $H_0$ i **alternativna hipoteza** $H_1$.

**Testiranje statističkih hipoteza** je postupak donošenja odluke o odbacivanju ili ne odbacivanju nul-hipoteze $H_0$ na osnovu informacije dobivene iz opažanja slučajnog uzorka. **Test-statistika** ili **statistika** je slučajna varijabla pomoću koje se donosi odluka o odbacivanju ili ne odbacivanju nul-hipoteze $H_0$.

**Kritično područje** ili područje male vjerojatnosti razdiobe testa je područje odbacivanja nul-hipoteze $H_0$. Ovisno o tome sastoji li se kritično područje od dva ili jednog otvorenog intervala govorimo o dvostranom, odnosno jednostranom testu. Kod dvostranog testa promatramo razliku empirijske vrijednosti parametra i kritične vrijednosti toga parametra, ali ne i smjer te razlike. Kod jednostranog testa bitan je i smjer navedene razlike, odnosno koji je od tih podataka veći.

Greška odbacivanja nul-hipoteze, ako je ona stvarno ispravna, zove se **greška prve vrste**. Vjerojatnost $\alpha$ pogreške odbacivanja istinite nul-hipoteze naziva se **razina značajnosti** ili **nivo signifikantnosti**.

Greška ne odbacivanja nul-hipoteze, ako je alternativna hipoteza ispravna, zove se **greška druge vrste**. Vjerojatnost greške druge vrste označavamo s $\beta$. Vjerojatnost $1-\beta$ zove se **jakost testa**.

Napomena: U praksi se prije provođenja testa odabire razina značajnosti (najčešće ona iznosi 0.01 ili 0.05), potom se odredi kritično područje, a naknadno se izračuna vrijednost $\beta$. Ukoliko je njegova vrijednost prevelika, potrebno je ponoviti testiranje s većim uzorkom.

### 6.4.1 Testiranje hipoteze za očekivanje normalne razdiobe s poznatom varijancom

Neka je $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ slučajni uzorak slučajne varijable $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ s poznatom varijancom $\sigma^2$ i neka je zadana razina značajnosti testa $\alpha$ (vjerojatnost da se hipoteza odbaci iako je

ispravna).

*Test-statistika* je

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$$

čija je vrijednost jednaka

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\,.$$

(a) Za dvostrani test $\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu \neq \mu_0 \end{cases}$ kritično područje je $\left\langle -\infty, z_{\frac{\alpha}{2}} \right] \cup \left[ z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty \right\rangle$.

(b) Za desni jednostrani test $\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu > \mu_0 \end{cases}$ kritično područje je $[z_{1-\alpha}, \infty\rangle$.

(c) Za lijevi jednostrani test $\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu < \mu_0 \end{cases}$ kritično područje je $[-\infty, z_{\alpha}\rangle$.

Brojevi $z_\alpha$, $z_{1-\alpha}$, $z_{\frac{\alpha}{2}}$ i $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ su odgovarajući kvantili normalne razdiobe (Tablica 7.6 na stranici 47).

Na slici 6.2 na stranici 39 prikazani su funkcija gustoće vjerojatnosti test-statistike $Z \sim N(0,1)$ i kritična područja kod dvostranog, odnosno jednostranog testa.

### 6.4.2 Testiranje hipoteze za očekivanje normalne razdiobe s nepoznatom varijancom

Neka je $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ slučajni uzorak slučajne varijable $X \sim N(\,\mu, \sigma^2)$ s nepoznatom varijancom $\sigma^2$ i neka je zadana razina značajnosti testa $\alpha$.

*Test-statistika* je

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S}\sqrt{n} \sim t(n-1)$$

čija je vrijednost jednaka

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n}\,.$$

(a) Za dvostrani test $\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu \neq \mu_0 \end{cases}$ kritično područje je $\left\langle -\infty, t_{\frac{\alpha}{2}} \right] \cup \left[ t_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty \right\rangle$.

(b) Za desni jednostrani test $\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu > \mu_0 \end{cases}$ kritično područje je $[t_{1-\alpha}, \infty\rangle$.

(c) Za lijevi jednostrani test $\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu < \mu_0 \end{cases}$ kritično područje je $[-\infty, t_\alpha\rangle$.

Brojevi $t_\alpha$, $t_{1-\alpha}$, $t_{\frac{\alpha}{2}}$ i $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ su odgovarajući kvantili Studentove razdiobe s $n-1$ stupnjeva slobode (tablica 7.8 na stranici 49).

### 6.4.3 Testiranje hipoteze za varijancu normalne razdiobe

Neka je $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ slučajni uzorak slučajne varijable $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ i neka je zadana razina značajnosti testa $\alpha$.

*Test-statistika* je

$$U = \frac{n-1}{\sigma^2} S^2 \sim \chi^2(n-1)$$

čija je vrijednost jednaka

$$u = \frac{n-1}{\sigma_0^2} s^2 .$$

(a) Za dvostrani test $\begin{cases} H_0: & \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: & \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$ kritično područje je $\left\langle -\infty, u_{\frac{\alpha}{2}} \right] \cup \left[ u_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty \right\rangle$.

(b) Za desni jednostrani test $\begin{cases} H_0: & \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: & \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases}$ kritično područje je $[u_{1-\alpha}, \infty\rangle$.

(c) Za lijevi jednostrani test $\begin{cases} H_0: & \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: & \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{cases}$ kritično područje je $\langle -\infty, u_\alpha]$.

Brojevi $u_\alpha$, $u_{1-\alpha}$, $u_{\frac{\alpha}{2}}$ i $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ su kvantili hikvadrat razdiobe $\chi^2(n-1)$ s $n-1$ stupnjeva slobode (tablica 7.7 na stranici 48).

Na slici 6.3 na stranici 39 prikazana su funkcija gustoće vjerojatnosti test-statistike $U \sim \chi^2(n-1)$ i kritična područja kod dvostranog, odnosno jednostranog testa.

## 6.5 Linearna korelacija

Korelacijska analiza utvrđuje postojanje i jačinu statističke veze među pojavama. Jačina veze između dvije varijable mjeri se koeficijentom korelacije. Pearsonov koeficijent korelacije koristi se u slučajevima kad su varijable promatranog modela normalno raspodijeljene i kad između njih postoji linearna povezanost.

Pretpostavimo da imamo ukupno $n$ uređenih parova $(x_i, y_i)$ vrijednosti varijabli $X$ i $Y$. **Pearsonov koeficijent linearne korelacije** $r$ računamo po formuli:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}},$$

Svojstva koeficijenta $r$ su:

1. $-1 \leq r \leq 1$

2. Ako je $r > 0$ varijable su **pozitivno korelirane**. Naime, za promatrane varijable kažemo da su pozitivno korelirane ako povećanjem vrijednosti jedne varijable dolazi do povećanja vrijednosti druge varijable. Ako je $r = 1$ varijable su **potpuno pozitivno korelirane**.

3. Ako je $r < 0$ varijable su **negativno korelirane**. Naime, za promatrane varijable kažemo da su negativno korelirane ako povećanjem vrijednosti jedne varijable dolazi do smanjenja vrijednosti druge varijable. Ako je $r = -1$ varijable su **potpuno negativno korelirane**.

4. Ako je $r = 0$ varijable su **nekorelirane**. Napomena: Iako su za $r = 0$ varijable nekorelirane, to ne znači da možemo zaključiti kako među promatranim varijablama ne postoji nikakva korelacija. Naime, Pearsonov koeficijent se odnosi samo na linearnu korelaciju i ništa ne govori o drugim mogućim nelinearnim oblicima povezanosti među varijablama poput eksponencijalne, logaritamske korelacije, itd.

Interpretacija vrijednosti koeficijenta $r$ može se iskazati sljedećom ljestvicom:

Tablica 6.2: Interpretacija vrijednosti koeficijenta $r$

| *pozitivna linearna veza* | *negativna linearna veza* | *interpretacija veze* |
|---|---|---|
| $r = 1$ | $r = -1$ | potpuna |
| $0 < r \leq 0.25$ | $-0.25 < r < 0$ | slaba |
| $0.25 < r \leq 0.65$ | $-0.65 < r \leq -0.25$ | srednje jaka |
| $0.65 < r < 1$ | $-1 < r \leq -0.65$ | čvrsta |
| $r = 0$ | | ne postoji linearna veza |

Postojanje i smjer korelacijske veze među varijablama može se odrediti i grafički odnosno dijagramom rasipanja. Dijagram rasipanja je grafički prikaz točaka u koordinatnom sustavu, koje su određene kao uređeni parovi $(x_i, y_i)$. Na slici 6.4 na stranici 40 prikazani su primjeri dijagrama rasipanja.

## 6.6 Jednostavna linearna regresija

**Model jednostavne linearne regresije** izražava vezu između jedne zavisne varijable $Y$ i jedne nezavisne varijable $X$, pri čemu su svi ostali utjecaji zanemareni. Opći oblik tog modela je

$$Y = aX + b + \varepsilon$$

gdje su $a, b \in \mathbb{R}$ parametri modela, a $\varepsilon$ slučajna varijabla koja predstavlja odstupanje od funkcijskog dijela regresijskog modela.

Regresijskom analizom određuje se procijenjena jednadžba regresijskog pravca koja je dana formulom:

$$\hat{y} = a\,x + b.$$

Parametri $a$ i $b$ su nepoznati regresijski parametri, čije su vrijednosti, u smislu metode najmanjih kvadrata, jednake:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2}, \qquad b = \bar{y} - a \cdot \bar{x},$$

pri čemu su $\bar{x}$ i $\bar{y}$ redom aritmetičke sredine varijable $x$ odnosno varijable $y$. Parametar $a$ zove se **regresijski koeficijent** i predstavlja očekivanu prosječnu promjenu zavisne varijable $y$ kada se nezavisna varijabla $x$ poveća za jednu jedinicu mjere. Parametar $b$ zove se **konstantni član** i predstavlja očekivanu vrijednost zavisne varijable $y$ kada je vrijednost nezavisne varijable $x$ jednaka nuli.

**Rezidualna odstupanja** su odstupanja stvarnih (izmjerenih) vrijednosti zavisne varijable od regresijskih vrijednosti i označavaju se s $\varepsilon_i$. Model regresije je reprezentativniji što su manja rezidualna odstupanja.
Apsolutna rezidualna odstupanja: $\varepsilon_i = y_i - \hat{y}_i$.
Relativna rezidualna odstupanja: $\varepsilon_{i,rel} = \dfrac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \cdot 100$.

Pokazatelji reprezentativnosti regresijskog modela su:

1. varijanca regresijskog modela:

$$\sigma_{\hat{y}}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2,$$

2. standardna devijacija modela ili prosječno odstupanje podataka od regresijskih vrijednosti je $\sigma_{\hat{y}}$, odnosno drugi korijen iz varijance,

3. koeficijent varijacije:

$$V_{\hat{y}} = \frac{\sigma_{\hat{y}}}{A} \cdot 100\ [\%]\,,$$

4. koeficijent determinacije

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - A)^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - A)^2}, \quad 0 \le R^2 \le 1.$$

Tablica 6.3: Chaddockova ljestvica

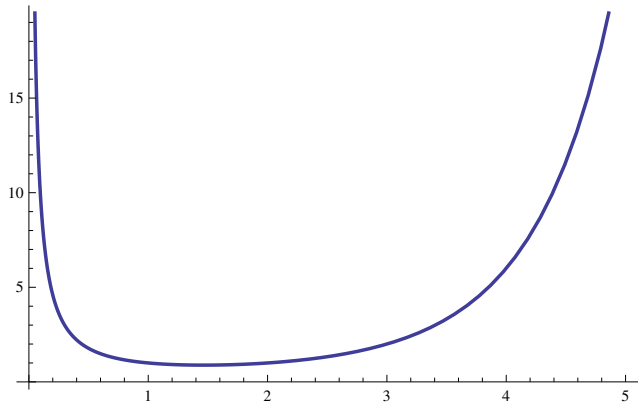
| $R^2$ | značenje |
|---|---|
| 0 | odsutnost veze |
| 0 - 0.25 | slaba veza |
| 0.25 - 0.65 | veza srednje jakosti |
| 0.65 - 1 | čvrsta veza |
| 1 | potpuna veza |

Interpretacija vrijednosti koeficijenta $r^2$ prikazuje se Chaddockovom ljestvicom (Tablica 6.3). U slučaju jednostavne linearne regresije koeficijent determinacije i Pearsonov koeficijent linearne korelacije vezani su relacijom:

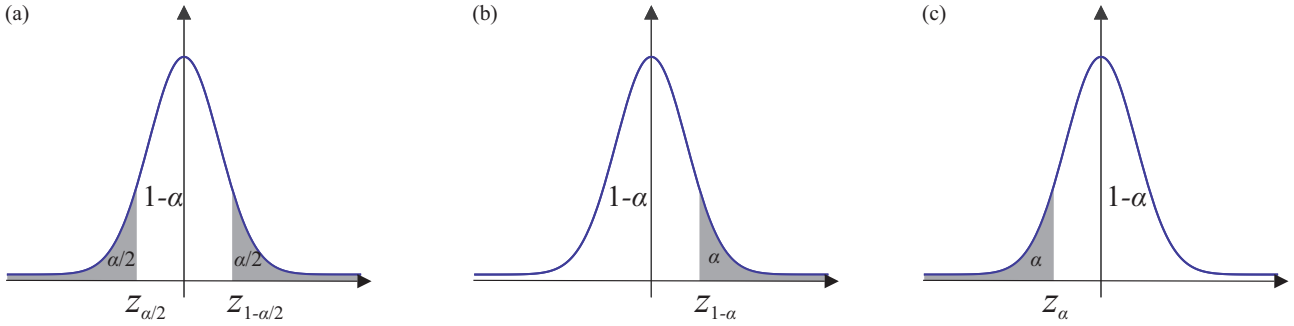
$$r = \pm\sqrt{R^2},$$

pri čemu je predznak Pearsonova koeficijenta linearne korelacije jednak predznaku regresijskog koeficijenta $a$.

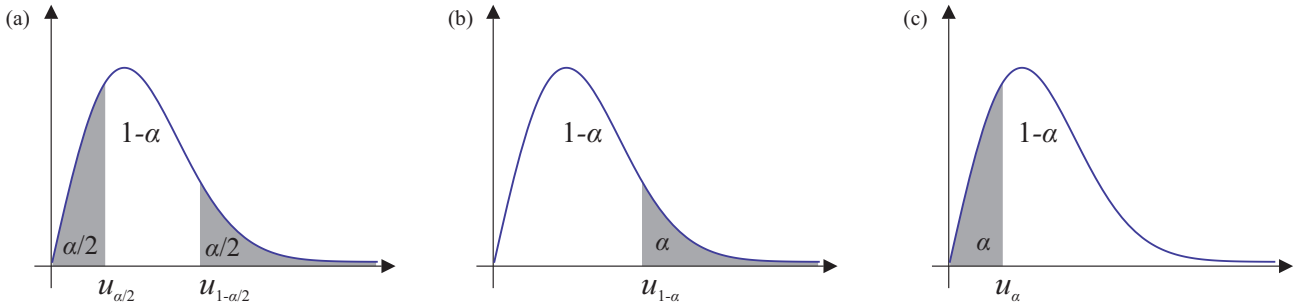
## 6.7 Slike



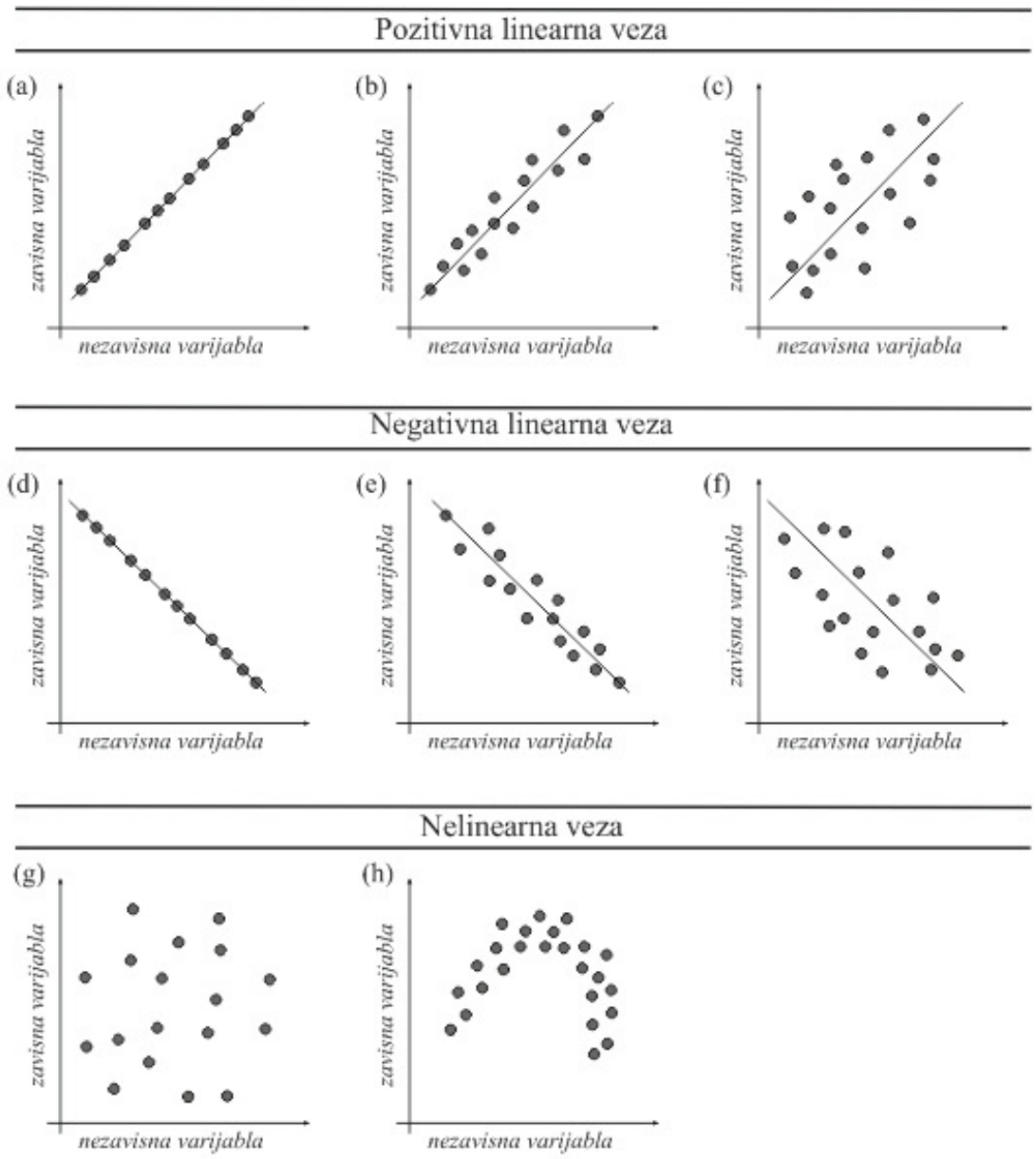

Slika 6.1: *Graf gama-funkcije na intervalu* $\langle 0, 5]$.




Slika 6.2: *Na grafovima je prikazana funkcija gustoće test-statistike* $Z \sim N(0,1)$*, a sivom bojom osjenčana su kritična područja (područja odbacivanja nul-hipoteze). Neosjenčano područje ispod grafa krivulje predstavlja područje ne odbacivanja nul-hipoteze. Na slici su prikazana tri grafa koja ovisno o kritičnom području predstavljaju sljedeće vrste testova: (a) dvostrani test, (b) jednostrani desni test, (c) lijevi jednostrani test.*




Slika 6.3: *Na grafovima je prikazana funkcija gustoće test-statistike* $U \sim \chi^2(n-1)$*, a sivom bojom osjenčana su kritična područja (područja odbacivanja nul-hipoteze). Neosjenčano područje ispod grafa krivulje predstavlja područje ne odbacivanja nul-hipoteze. Na slici su prikazana tri grafa koja ovisno o kritičnom području predstavljaju sljedeće vrste testova: (a) dvostrani test, (b) jednostrani desni test, (c) lijevi jednostrani test.*




Slika 6.4: *Na slici su prikazani primjeri dijagrama rasipanja. (a) Potpuna pozitivna linearna veza, (b) Jaka pozitivna linearna veza, (c) Slaba pozitivna linearna veza, (d) Potpuna negativna linearna veza, (e) Jaka negativna linearna veza, (f) Slaba negativna linearna veza, (g) Ne postoji veza, (h) Nelinearna (krivolinijska) veza*

# 7 Dodatak

## 7.1 Pregled osnovnih pojmova teorije skupova

Kažemo da je skup $A$ **podskup** skupa $B$ i pišemo $A \subseteq B$ ako $x \in A \implies x \in B$, tj. ako svaki element skupa $A$ pripada skupu $B$. Skup $A$ je **pravi podskup** od $B$ ako je $A \subseteq B$ i postoji barem jedan $x \in B$ takav da je $x \notin A$. U tom slučaju pišemo $A \subset B$.

Neka je $A$ bilo koji skup. Tada skup $\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}$ nazivamo **partitivni skup** skupa $A$ ($\mathcal{P}(A)$ je skup svih podskupova od $A$).

Kažemo da su skupovi $A$ i $B$ **jednaki** i pišemo $A = B$ ako vrijedi $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$. U suprotnom, kažemo da su skupovi $A$ i $B$ **različiti** i pišemo $A \neq B$.

#### Osnovne operacije sa skupovima

- **presjek skupova**: $A \cap B := \{x : x \in A \wedge x \in B\}$ — skup kojeg tvore svi zajednički elementi skupova $A$ i $B$
- **unija skupova**: $A \cup B := \{x : x \in A \vee x \in B\}$ — skup kojeg tvore elementi koji pripadaju skupu $A$ ili skupu $B$ (može i njihovom presjeku)
- **razlika skupova**: $A \setminus B := \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$ — skup kojeg tvore elementi koji pripadaju skupu $A$ ali ne i skupu $B$
- **simetrična razlika skupova**: $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ — skup kojega tvore elementi koji pripadaju ili skupu $A$ ili skupu $B$, ali ne i njihovom presjeku
- **komplement skupa**: ako je $S$ *univerzalni* skup i $A \subseteq S$, tada je $A^c := \{x : x \in S \wedge x \notin A\}$ skup koji nazivamo **komplement** skupa $A$ s obzirom na $S$, a tvore ga svi elementi skupa $S$ koji ne pripadaju skupu $A$

Kažemo da su skupovi $A$ i $B$ **disjunktni** ako je $A \cap B = \emptyset$, tj. ako $A$ i $B$ nemaju zajedničkih elemenata.

Kažemo da je *beskonačan* skup $A$ **prebrojiv** ako postoji bijekcija $f : \mathbb{N} \to A$, tj. ako elemente skupa $A$ možemo poredati u niz. Npr. skupovi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$, svi njihovi beskonačni podskupovi te

unije takvih podskupova su prebrojivi. Ako beskonačan skup $A$ nije prebrojiv, tada kažemo da je $A$ **neprebrojiv** (takvi su npr. intervali u skupu $\mathbb{R}$, bilo otvoreni, zatvoreni ili poluotvoreni).

## 7.2 Pregled formula diferencijalnog i integralnog računa

L'Hôpital-Bernoullijevo pravilo: $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, pri čemu vrijedi $f(c) = g(c) = 0$ ($c$ je izolirana nultočka funkcije $g$) ili $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ i $\lim_{x\to c} g(x) = \infty$.

Formula djelomične (parcijalne) integracije: $\int u\,\mathrm{d}v = u\,v - \int v\,\mathrm{d}u$.

Neka osnovna svojstva integrala:

$$\int (f(x) + g(x))\ \mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int a\,f(x)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Newton-Leibnizova formula: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, pri čemu je $F$ bilo koja primitivna funkcija (npr. standardna antiderivacija) funkcije $f$.

Nepravi integrali:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Laplaceova transformacija: $\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-s\,x}\,\mathrm{d}x$, $\forall s > 0$.

Tablica 7.1: Tablica nekih standardnih antiderivacija

| $f(x)$ | Standardna antiderivacija $F(x)$ |
|---|---|
| $a$, $a \in \mathbb{R}$ | $a\,x$ |
| $x^n$, $n \neq -1$ | $\frac{1}{n+1}\,x^{n+1}$ |
| $a^x$, $a > 0$ | $\frac{1}{\ln a}\,a^x$ |
| $\mathrm{e}^{a\,x}$, $a \neq 0$ | $\frac{1}{a}\,\mathrm{e}^{a\,x}$ |
| $\sin(a\,x)$, $a \neq 0$ | $-\frac{1}{a}\cos(a\,x)$ |
| $\cos(a\,x)$, $a \neq 0$ | $\frac{1}{a}\sin(a\,x)$ |

Tablica 7.2: Tablica nekih Laplaceovih transformata

| $f(x)$ | $\mathcal{L}\{f\}(s)$ |
|---|---|
| $a$, $a \in \mathbb{R}$ | $\frac{a}{s}$ |
| $x^n$, $n \in \mathbb{N}$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ |
| $\mathrm{e}^{-a\,x}$, $a > 0$ | $\frac{1}{s+a}$ |
| $x\,\mathrm{e}^{-a\,x}$, $a > 0$ | $\frac{1}{(s+a)^2}$ |
| $x^2\,\mathrm{e}^{-a\,x}$, $a > 0$ | $\frac{2}{(s+a)^3}$ |

## 7.3 Pregled korisnih naredbi u nekim softverskim paketima

U sljedećoj tablici navedene su neke od funkcija ugrađenih u softverske pakete Octave i Matlab koje se koriste u vjerojatnosti i statistici.

| *funkcija* | *značenje* |
|---|---|
| `bar` | prikaz grafa s uspravnim stupcima |
| `barh` | prikaz grafa s vodoravnim stupcima |
| `betacdf` | funkcija razdiobe vjerojatnosti beta slučajne varijable |
| `betainv` | inverz funkcije `betacdf` |
| `betapdf` | funkcija gustoće beta slučajne varijable |
| `betastat` | očekivanje i varijanca beta slučajne varijable |
| `binocdf` | funkcija razdiobe vjerojatnosti binomne slučajne varijable |
| `binoinv` | inverz funkcije `binocdf` |
| `binopdf` | funkcija gustoće binomne slučajne varijable |
| `binostat` | očekivanje i varijanca binomne slučajne varijable |
| `cdf` | funkcija razdiobe vjerojatnosti određene slučajne varijable |
| `expcdf` | funkcija razdiobe vjerojatnosti eksponencijalne slučajne varijable |
| `expinv` | inverz funkcije `expcdf` |
| `exppdf` | funkcija gustoće eksponencijalne slučajne varijable |
| `expstat` | očekivanje i varijanca eksponencijalne slučajne varijable |
| `factorial` | $n!$ |
| `geocdf` | funkcija razdiobe vjerojatnosti geometrijske slučajne varijable |
| `geoinv` | inverz funkcije `geocdf` |
| `geomean` | geometrijska sredina niza podataka |
| `geopdf` | funkcija gustoće geometrijske slučajne varijable |
| `geostat` | očekivanje i varijanca geometrijske slučajne varijable |
| `harmmean` | harmonijska sredina niza podataka |
| `hist` | prikaz histograma (negrupirani podaci) |
| `histc` | prikaz histograma (podaci grupirani u razrede) |
| `hygecdf` | funkcija razdiobe vjerojatnosti hipergeometrijske slučajne varijable |
| `hygeinv` | inverz funkcije `hygecdf` |
| `hygepdf` | funkcija gustoće hipergeometrijske slučajne varijable |
| `hygestat` | očekivanje i varijanca hipergeometrijske slučajne varijable |
| `icdf` | inverz funkcije razdiobe vjerojatnosti određene slučajne varijable |
| `iqr` | interkvartil niza podataka |
| `kurtosis` | koeficijent zaobljenosti niza podataka |
| `mad` | srednje apsolutno odstupanje niza podataka |
| `max` | najveći element niza podataka |
| `mean` | aritmetička sredina niza podataka (očekivanje neke slučajne varijable) |
| `median` | medijan niza podataka |
| `min` | najmanji element niza podataka |
| `mode` | mod niza podataka |
| `moment` | središnji momenti niza podataka |
| `nchoosek` | binomni koeficijent |
| `normcdf` | funkcija razdiobe vjerojatnosti normalne slučajne varijable |
| `norminv` | inverz funkcije `normcdf` |

| | |
|---|---|
| `normstat` | očekivanje i varijanca normalne slučajne varijable |
| `odf` | funkcija gustoće vjerojatnosti određene slučajne varijable |
| `perms` | ispis svih permutacija nekog konačnog skupa |
| `poisscdf` | funkcija razdiobe vjerojatnosti Poissonove slučajne varijable |
| `poissinv` | inverz funkcije `poisscdf` |
| `poisspdf` | funkcija gustoće vjerojatnosti Poissonove slučajne varijable |
| `poisstat` | očekivanje i varijanca Poissonove slučajne varijable |
| `prctile` | percentili niza podataka |
| `quantile` | kvantili niza podataka |
| `range` | raspon varijacije niza podataka |
| `skewness` | koeficijent asimetrije niza podataka |
| `std` | standardna devijacija niza podataka ili neke slučajne varijable |
| `tabulate` | tablično grupiranje podataka |
| `tiedrank` | rang modaliteta |
| `unidcdf` | funkcija razdiobe vjerojatnosti jednolike slučajne varijable |
| `unidinv` | inverz funkcije `unidcdf` |
| `unidpdf` | funkcija gustoće vjerojatnosti jednolike slučajne varijable |
| `unidstat` | očekivanje i varijanca jednolike slučajne varijable |
| `var` | varijanca niza podataka ili neke slučajne varijable |
| `zscore` | standardizirana vrijednost |
| `ztest` | testiranje hipoteze o očekivanju |
| `paramci` | interval povjerenja |
| `corrcoef` | Pearsonov koeficijent korelacije |

U sljedećoj tablici navedene su neke od funkcija ugrađenih u MS Excel koje se koriste u vjerojatnosti i statistici.

| *funkcija* | *značenje* |
|---|---|
| `AVEDEV` | srednje apsolutno odstupanje niza podataka |
| `AVERAGE` | aritmetička sredina niza podataka |
| `BETADIST` | funkcija razdiobe vjerojatnosti beta slučajne varijable |
| `BINOMDIST` | funkcija razdiobe vjerojatnosti binomne slučajne varijable |
| `COMBIN` | binomni koeficijent |
| `CONFIDENCE.NORM` i `CONFIDENCE` | interval povjerenja |
| `EXPONDIST` | funkcija razdiobe vjerojatnosti eksponencijalne slučajne varijable |
| `FACT` | funkcija $n!$ |
| `FACTDOUBLE` | funkcija $n!!$ |
| `GEOMEAN` | geometrijska sredina niza podataka |
| `HARMEAN` | harmonijska sredina niza podataka |
| `HYPGEOM.DIST` | funkcija razdiobe vjerojatnosti hipergeometrijske slučajne varijable |
| `KURT` | koeficijent zaobljenosti niza podataka |
| `MAX` | najveći element niza podataka |
| `MEDIAN` | medijan niza podataka |
| `MIN` | najmanji element niza podataka |
| `MODE.SNGL` i `MODE` | mod niza podataka |
| `MULTINOMIAL` | multinomni koeficijent |
| `NORM.DIST` i `NORMDIST` | funkcija razdiobe vjerojatnosti normalne slučajne varijable |
| `NORM.S.INV` i `NORMSINV` | inverz funkcije razdiobe normalne slučajne varijable |
| `NORM.S.DIST` i `NORMSDIST` | funkcija razdiobe vjerojatnosti standardne normalne slučajne varijable |
| `NORMSINV` | inverz funkcije razdiobe standardne normalne slučajne varijable |
| `PEARSON` | Pearsonov koeficijent linearne korelacije |

| | |
|---|---|
| PERCENTILE.INC i PERCENTILE | percentili niza podataka |
| PERMUT | ukupan broj $k$-permutacija (bez ponavljanja) $n$-članog skupa |
| PERMUTATIONA | ukupan broj $k$-permutacija s ponavljanjem $n$-članog skupa |
| POISSON.DIST i POISSON | funkcija razdiobe vjerojatnosti Poissonove slučajne varijable |
| PROB | vjerojatnost da neki broj pripada određenom intervalu |
| QUARTILE.INC i QUARTILE | kvartili niza podataka |
| RANK.EQ i RANK | rang modaliteta |
| SKEW | koeficijent asimetrije niza podataka |
| STANDARDIZE | standardizirana vrijednost |
| STDEV.S i STDEV | korigirana uzoračka standardna devijacija |
| STDEV.P i STDEVP | standardna devijacija čitave populacije podataka |
| VAR.S i VAR | varijanca uzorka |
| VAR.P i VARP | varijanca čitave populacije podataka |
| Z.TEST i ZTEST | testiranje hipoteza |

## 7.4 Tablice

Tablica 7.5: Vrijednosti funkcije vjerojatnosti za Poissonovu slučajnu varijablu $X \sim \text{Pois}(\lambda)$

| | $\lambda$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k$ | **0.1** | **0.2** | **0.3** | **0.4** | **0.5** | **0.6** | **0.7** | **0.8** | **0.9** |
| 0 | 0.904837 | 0.818731 | 0.740818 | 0.670320 | 0.606531 | 0.548812 | 0.496585 | 0.449329 | 0.406570 |
| 1 | 0.090484 | 0.163746 | 0.222245 | 0.268128 | 0.303265 | 0.329287 | 0.347610 | 0.359463 | 0.365913 |
| 2 | 0.004524 | 0.016375 | 0.033337 | 0.053626 | 0.075816 | 0.098786 | 0.121663 | 0.143785 | 0.164661 |
| 3 | 0.000151 | 0.001092 | 0.003334 | 0.007150 | 0.012636 | 0.019757 | 0.028388 | 0.038343 | 0.049398 |
| 4 | 0.000004 | 0.000055 | 0.000250 | 0.000715 | 0.001580 | 0.002964 | 0.004968 | 0.007669 | 0.011115 |
| 5 | 0 | 0.000002 | 0.000015 | 0.000057 | 0.000158 | 0.000356 | 0.000696 | 0.001227 | 0.002001 |
| 6 | 0 | 0 | 0.000001 | 0.000004 | 0.000013 | 0.000036 | 0.000081 | 0.000164 | 0.000300 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.000001 | 0.000003 | 0.000008 | 0.000019 | 0.000039 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.000001 | 0.000002 | 0.000004 |

| | $\lambda$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 0 | 0.367879 | 0.135335 | 0.049787 | 0.018316 | 0.006738 | 0.002479 | 0.000912 | 0.000335 | 0.000123 |
| 1 | 0.367879 | 0.270671 | 0.149361 | 0.073263 | 0.033690 | 0.014873 | 0.006383 | 0.002684 | 0.001111 |
| 2 | 0.183940 | 0.270671 | 0.224042 | 0.146525 | 0.084224 | 0.044618 | 0.022341 | 0.010735 | 0.004998 |
| 3 | 0.061313 | 0.180447 | 0.224042 | 0.195367 | 0.140374 | 0.089235 | 0.052129 | 0.028626 | 0.014994 |
| 4 | 0.015328 | 0.090224 | 0.168031 | 0.195367 | 0.175467 | 0.133853 | 0.091226 | 0.057252 | 0.033737 |
| 5 | 0.003066 | 0.036089 | 0.100819 | 0.156293 | 0.175467 | 0.160623 | 0.127717 | 0.091604 | 0.060727 |
| 6 | 0.000511 | 0.012030 | 0.050409 | 0.104196 | 0.146223 | 0.160623 | 0.149003 | 0.122138 | 0.091090 |
| 7 | 0.000073 | 0.003437 | 0.021604 | 0.059540 | 0.104445 | 0.137677 | 0.149003 | 0.139587 | 0.117116 |
| 8 | 0.000009 | 0.000859 | 0.008102 | 0.029770 | 0.065278 | 0.103258 | 0.130377 | 0.139587 | 0.131756 |
| 9 | 0.000001 | 0.000191 | 0.002701 | 0.013231 | 0.036266 | 0.068838 | 0.101405 | 0.124077 | 0.131756 |
| 10 | 0 | 0.000038 | 0.000810 | 0.005292 | 0.018133 | 0.041303 | 0.070983 | 0.099262 | 0.118580 |
| 11 | 0 | 0.000007 | 0.000221 | 0.001925 | 0.008242 | 0.022529 | 0.045171 | 0.072190 | 0.097020 |
| 12 | 0 | 0.000001 | 0.000055 | 0.000642 | 0.003434 | 0.011264 | 0.026350 | 0.048127 | 0.072765 |
| 13 | 0 | 0 | 0.000013 | 0.000197 | 0.001321 | 0.005199 | 0.014188 | 0.029616 | 0.050376 |
| 14 | 0 | 0 | 0.000003 | 0.000056 | 0.000472 | 0.002228 | 0.007094 | 0.016924 | 0.032384 |
| 15 | 0 | 0 | 0.000001 | 0.000015 | 0.000157 | 0.000891 | 0.003311 | 0.009026 | 0.019431 |
| 16 | 0 | 0 | 0 | 0.000004 | 0.000049 | 0.000334 | 0.001448 | 0.004513 | 0.010930 |
| 17 | 0 | 0 | 0 | 0.000001 | 0.000014 | 0.000118 | 0.000596 | 0.002124 | 0.005786 |
| 18 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.000004 | 0.000039 | 0.000232 | 0.000944 | 0.002893 |
| 19 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.000001 | 0.000012 | 0.000085 | 0.000397 | 0.001370 |
| 20 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.000004 | 0.000030 | 0.000159 | 0.000617 |
| 21 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.000001 | 0.000010 | 0.000061 | 0.000264 |
| 22 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.000003 | 0.000022 | 0.000108 |
| 23 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.000001 | 0.000008 | 0.000042 |
| 24 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.000003 | 0.000016 |
| 25 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.000001 | 0.000006 |
| 26 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.000002 |
| 27 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.000001 |

**Uputa za primjenu tablica**: vrijednost parametra $\lambda$ treba potražiti u stupcima, a vrijednost $k$ u recima. Na primjer, za $\lambda = 0.2$ i $k = 2$ je $P(X = 2) = 0.016375$, a za $\lambda = 5$ i $k = 8$ je $P(X = 8) = 0.065278$.

Tablica 7.6: Vrijednosti funkcije razdiobe vjerojatnosti za slučajnu varijablu $X \sim N(0,1)$

| $x$ | **0.00** | **0.01** | **0.02** | **0.03** | **0.04** | **0.05** | **0.06** | **0.07** | **0.08** | **0.09** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0.0** | 0.50000 | 0.50399 | 0.50798 | 0.51197 | 0.51595 | 0.51994 | 0.52392 | 0.52790 | 0.53188 | 0.53586 |
| **0.1** | 0.53983 | 0.54380 | 0.54776 | 0,55172 | 0.55567 | 0.55962 | 0.56356 | 0.56749 | 0.57142 | 0.57535 |
| **0.2** | 0.57926 | 0.58317 | 0.58706 | 0.59095 | 0.59483 | 0.59871 | 0.60257 | 0.60642 | 0.61026 | 0.61409 |
| **0.3** | 0.61791 | 0.62172 | 0.62552 | 0.62930 | 0.63307 | 0.63683 | 0.64058 | 0.64431 | 0.64803 | 0.65173 |
| **0.4** | 0.65542 | 0.65910 | 0.66276 | 0.66640 | 0.67003 | 0.67364 | 0.67724 | 0.68082 | 0.68439 | 0.68793 |
| **0.5** | 0.69146 | 0.69497 | 0.69847 | 0.70194 | 0.70540 | 0.70884 | 0.71226 | 0.71566 | 0.71904 | 0.72240 |
| **0.6** | 0.72575 | 0.72907 | 0.73237 | 0.73565 | 0.73891 | 0.74215 | 0.74537 | 0.74857 | 0.75175 | 0.75490 |
| **0.7** | 0.75804 | 0.76115 | 0.76424 | 0.76730 | 0.77035 | 0.77337 | 0.77637 | 0.77935 | 0.78230 | 0.78524 |
| **0.8** | 0.78814 | 0.79103 | 0.79389 | 0.79673 | 0.79955 | 0.80234 | 0.80511 | 0.80785 | 0.81057 | 0.81327 |
| **0.9** | 0.81594 | 0.81859 | 0.82121 | 0.82381 | 0.82639 | 0.82894 | 0.83147 | 0.83398 | 0.83646 | 0.83891 |
| **1.0** | 0.84134 | 0.84375 | 0.84614 | 0.84849 | 0.85083 | 0.85314 | 0.85543 | 0.85769 | 0.85993 | 0.86214 |
| **1.1** | 0.86433 | 0.86650 | 0.86864 | 0.87076 | 0.87286 | 0.87493 | 0.87698 | 0.87900 | 0.88100 | 0.88298 |
| **1.2** | 0.88493 | 0.88686 | 0.88877 | 0.89065 | 0.89251 | 0.89435 | 0.89617 | 0.89796 | 0.89973 | 0.90147 |
| **1.3** | 0.90320 | 0.90490 | 0.90658 | 0.90824 | 0.90988 | 0.91149 | 0.91309 | 0.91466 | 0.91621 | 0.91774 |
| **1.4** | 0.91924 | 0.92073 | 0.92220 | 0.92364 | 0.92507 | 0.92647 | 0.92785 | 0.92922 | 0.93056 | 0.93189 |
| **1.5** | 0.93319 | 0.93448 | 0.93574 | 0.93699 | 0.93822 | 0.93943 | 0.94062 | 0.94179 | 0.94295 | 0.94408 |
| **1.6** | 0.94520 | 0.94630 | 0.94738 | 0.94845 | 0.94950 | 0.95053 | 0.95154 | 0.95254 | 0.95352 | 0.95449 |
| **1.7** | 0.95543 | 0.95637 | 0.95728 | 0.95818 | 0.95907 | 0.95994 | 0.96080 | 0.96164 | 0.96246 | 0.96327 |
| **1.8** | 0.96407 | 0.96485 | 0.96562 | 0.96638 | 0.96712 | 0.96784 | 0.96856 | 0.96926 | 0.96995 | 0.97062 |
| **1.9** | 0.97128 | 0.97193 | 0.97257 | 0.97320 | 0.97381 | 0.97441 | 0.97500 | 0.97558 | 0.97615 | 0.97670 |
| **2.0** | 0.97725 | 0.97778 | 0.97831 | 0.97882 | 0.97932 | 0.97982 | 0.98030 | 0.98077 | 0.98124 | 0.98169 |
| **2.1** | 0.98214 | 0.98257 | 0.98300 | 0.98341 | 0.98382 | 0.98422 | 0.98461 | 0.98500 | 0.98537 | 0.98574 |
| **2.2** | 0.98610 | 0.98645 | 0.98679 | 0.98713 | 0.98745 | 0.98778 | 0.98809 | 0.98840 | 0.98870 | 0.98899 |
| **2.3** | 0.98928 | 0.98956 | 0.98983 | 0.99010 | 0.99036 | 0.99061 | 0.99086 | 0.99111 | 0.99134 | 0.99158 |
| **2.4** | 0.99180 | 0.99202 | 0.99224 | 0.99245 | 0.99266 | 0.99286 | 0.99305 | 0.99324 | 0.99343 | 0.99361 |
| **2.5** | 0.99379 | 0.99396 | 0.99413 | 0.99430 | 0.99446 | 0.99461 | 0.99477 | 0.99492 | 0.99506 | 0.99520 |
| **2.6** | 0.99534 | 0.99547 | 0.99560 | 0.99573 | 0.99585 | 0.99598 | 0.99609 | 0.99621 | 0.99632 | 0.99643 |
| **2.7** | 0.99653 | 0.99664 | 0.99674 | 0.99683 | 0.99693 | 0.99702 | 0.99711 | 0.99720 | 0.99728 | 0.99736 |
| **2.8** | 0.99744 | 0.99752 | 0.99760 | 0.99767 | 0.99774 | 0.99781 | 0.99788 | 0.99795 | 0.99801 | 0.99807 |
| **2.9** | 0.99813 | 0.99819 | 0.99825 | 0.99831 | 0.99836 | 0.99841 | 0.99846 | 0.99851 | 0.99856 | 0.99861 |
| **3.0** | 0.99865 | 0.99869 | 0.99874 | 0.99878 | 0.99882 | 0.99886 | 0.99889 | 0.99893 | 0.99896 | 0.99900 |

**Uputa za primjenu tablice**: Znamenku jedinica i znamenku desetinki treba pronaći u recima, dok znamenku stotinki treba pronaći u stupcima. Na primjer, $F^*(1.23)$ očitava se u presjeku retka **1.2** i stupca **0.03**, tj. vrijedi $F^*(1.23) \approx 0.89065$. Vrijednosti funkcije $F^*$ za $x \in [-3, 0\rangle$ dobivaju se primjenom svojstva $F^*(-x) = 1 - F^*(x)$ (vidi točku 5.3 na stranici 24). Na primjer, $F^*(-1.23) = 1 - F^*(1.23) \approx 1 - 0.89065 = 0.10935$.

Tablica 7.7: Kvantili $\chi^2$-razdiobe

| $n$ | **0.005** | **0.025** | **0.05** | **0.1** | **0.9** | **0.95** | **0.975** | **0.995** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0.0000 | 0.0010 | 0.0039 | 0.0158 | 2.7055 | 3.8415 | 5.0239 | 7.8794 |
| **2** | 0.0100 | 0.0506 | 0.1026 | 0.2107 | 4.6052 | 5.9915 | 7.3778 | 10.5965 |
| **3** | 0.0717 | 0.2158 | 0.3518 | 0.5844 | 6.2514 | 7.8147 | 9.3484 | 12.8381 |
| **4** | 0.2070 | 0.4844 | 0.7107 | 1.0636 | 7.7794 | 9.4877 | 11.1433 | 14.8602 |
| **5** | 0.4118 | 0.8312 | 1.1455 | 1.6103 | 9.2363 | 11.0705 | 12.8325 | 16.7496 |
| **6** | 0.6757 | 1.2373 | 1.6354 | 2.2041 | 10.6446 | 12.5916 | 14.4494 | 18.5475 |
| **7** | 0.9893 | 1.6899 | 2.1673 | 2.8331 | 12.0170 | 14.0671 | 16.0128 | 20.2777 |
| **8** | 1.3444 | 2.1797 | 2.7326 | 3.4895 | 13.3616 | 15.5073 | 17.5345 | 21.9549 |
| **9** | 1.7349 | 2.7004 | 3.3251 | 4.1682 | 14.6837 | 16.9190 | 19.0228 | 23.5893 |
| **10** | 2.1558 | 3.2470 | 3.9403 | 4.8652 | 15.9872 | 18.3070 | 20.4832 | 25.1881 |
| **11** | 2.6032 | 3.8157 | 4.5748 | 5.5778 | 17.2750 | 19.6752 | 21.9200 | 26.7569 |
| **12** | 3.0738 | 4.4038 | 5.2260 | 6.3038 | 18.5493 | 21.0261 | 23.3367 | 28.2997 |
| **13** | 3.5650 | 5.0087 | 5.8919 | 7.0415 | 19.8119 | 22.3620 | 24.7356 | 29.8193 |
| **14** | 4.0747 | 5.6287 | 6.5706 | 7.7895 | 21.0641 | 23.6848 | 26.1189 | 31.3194 |
| **15** | 4.6009 | 6.2621 | 7.2609 | 8.5468 | 22.3071 | 24.9958 | 27.4884 | 32.8015 |
| **16** | 5.1422 | 6.9077 | 7.9616 | 9.3122 | 23.5418 | 26.2962 | 28.8453 | 34.2671 |
| **17** | 5.6973 | 7.5642 | 8.6718 | 10.0852 | 24.7690 | 27.5871 | 30.1910 | 35.7184 |
| **18** | 6.2648 | 8.2307 | 9.3904 | 10.8649 | 25.9894 | 28.8693 | 31.5264 | 37.1564 |
| **19** | 6.8439 | 8.9065 | 10.1170 | 11.6509 | 27.2036 | 30.1435 | 32.8523 | 38.5821 |
| **20** | 7.4338 | 9.5908 | 10.8508 | 12.4426 | 28.4120 | 31.4104 | 34.1696 | 39.9969 |
| **21** | 8.0336 | 10.2829 | 11.5913 | 13.2396 | 29.6151 | 32.6706 | 35.4789 | 41.4009 |
| **22** | 8.6427 | 10.9823 | 12.3380 | 14.0415 | 30.8133 | 33.9245 | 36.7807 | 42.7957 |
| **23** | 9.2604 | 11.6885 | 13.0905 | 14.8480 | 32.0069 | 35.1725 | 38.0756 | 44.1814 |
| **24** | 9.8862 | 12.4011 | 13.8484 | 15.6587 | 33.1962 | 36.4150 | 39.3641 | 45.5584 |
| **25** | 10.5196 | 13.1197 | 14.6114 | 16.4734 | 34.3816 | 37.6525 | 40.6465 | 46.9280 |
| **26** | 11.1602 | 13.8439 | 15.3792 | 17.2919 | 35.5632 | 38.8851 | 41.9231 | 48.2898 |
| **27** | 11.8077 | 14.5734 | 16.1514 | 18.1139 | 36.7412 | 40.1133 | 43.1945 | 49.6450 |
| **28** | 12.4613 | 15.3079 | 16.9279 | 18.9392 | 37.9159 | 41.3372 | 44.4608 | 50.9936 |
| **29** | 13.1211 | 16.0471 | 17.7084 | 19.7677 | 39.0875 | 42.5569 | 45.7223 | 52.3355 |
| **30** | 13.7867 | 16.7908 | 18.4927 | 20.5992 | 40.2560 | 43.7730 | 46.9792 | 53.6719 |
| **31** | 14.4577 | 17.5387 | 19.2806 | 21.4336 | 41.4217 | 44.9853 | 48.2319 | 55.0025 |
| **32** | 15.1340 | 18.2908 | 20.0719 | 22.2706 | 42.5847 | 46.1942 | 49.4804 | 56.3280 |
| **33** | 15.8152 | 19.0467 | 20.8665 | 23.1102 | 43.7452 | 47.3999 | 50.7251 | 57.6483 |
| **34** | 16.5013 | 19.8062 | 21.6643 | 23.9522 | 44.9032 | 48.6024 | 51.9660 | 58.9637 |
| **35** | 17.1917 | 20.5694 | 22.4650 | 24.7966 | 46.0588 | 49.8018 | 53.2033 | 60.2746 |
| **36** | 17.8868 | 21.3359 | 23.2686 | 25.6433 | 47.2122 | 50.9985 | 54.4373 | 61.5811 |
| **37** | 18.5859 | 22.1056 | 24.0749 | 26.4921 | 48.3634 | 52.1923 | 55.6680 | 62.8832 |
| **38** | 19.2888 | 22.8785 | 24.8839 | 27.3430 | 49.5126 | 53.3835 | 56.8955 | 64.1812 |
| **39** | 19.9958 | 23.6543 | 25.6954 | 28.1958 | 50.6598 | 54.5722 | 58.1201 | 65.4753 |
| **40** | 20.7066 | 24.4331 | 26.5093 | 29.0505 | 51.8050 | 55.7585 | 59.3417 | 66.7660 |
| **41** | 21.4208 | 25.2145 | 27.3256 | 29.9071 | 52.9485 | 56.9424 | 60.5606 | 68.0526 |
| **42** | 22.1384 | 25.9987 | 28.1440 | 30.7654 | 54.0902 | 58.1240 | 61.7767 | 69.3360 |
| **43** | 22.8596 | 26.7854 | 28.9647 | 31.6255 | 55.2302 | 59.3035 | 62.9903 | 70.6157 |
| **44** | 23.5836 | 27.5745 | 29.7875 | 32.4871 | 56.3685 | 60.4809 | 64.2014 | 71.8923 |
| **45** | 24.3110 | 28.3662 | 30.6123 | 33.3504 | 57.5053 | 61.6562 | 65.4101 | 73.1660 |
| **46** | 25.0413 | 29.1600 | 31.4390 | 34.2152 | 58.6405 | 62.8296 | 66.6165 | 74.4367 |
| **47** | 25.7745 | 29.9562 | 32.2676 | 35.0814 | 59.7743 | 64.0011 | 67.8206 | 75.7039 |
| **48** | 26.5107 | 30.7545 | 33.0981 | 35.9491 | 60.9066 | 65.1708 | 69.0226 | 76.9689 |
| **49** | 27.2494 | 31.5549 | 33.9303 | 36.8182 | 62.0375 | 66.3387 | 70.2224 | 78.2306 |
| **50** | 27.9908 | 32.3574 | 34.7642 | 37.6886 | 63.1671 | 67.5048 | 71.4202 | 79.4898 |

**Upute za primjenu tablice**: Broj $\chi^2_{(1+\gamma)/2}$ jednak je vrijednosti $F^{-1}((1+\gamma)/2)$ gdje je $F$ funkcija razdiobe vjerojatnosti slučajne varijable $\chi^2(n)$. Npr. ako su $n = 5$ i $\gamma = 0.95$, onda se broj $\chi^2_{(1+0.95)/2} = \chi^2_{0.975}$ očita u presjeku retka **5** i stupca **0.975**, pa je $\chi^2_{0.975} = 12.8325$.

Tablica 7.8: Kvantili Studentove razdiobe

| $d$ | **0.9** | **0.95** | **0.975** | **0.995** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 3.078 | 6.314 | 12.706 | 63.657 |
| **2** | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 9.925 |
| **3** | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 5.841 |
| **4** | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 4.604 |
| **5** | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 4.032 |
| **6** | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 3.707 |
| **7** | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 3.499 |
| **8** | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 3.355 |
| **9** | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 3.250 |
| **10** | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 3.169 |
| **11** | 1.363 | 1.796 | 2.201 | 3.106 |
| **12** | 1.356 | 1.782 | 2.179 | 3.055 |
| **13** | 1.350 | 1.771 | 2.160 | 3.012 |
| **14** | 1.345 | 1.761 | 2.145 | 2.977 |
| **15** | 1.341 | 1.753 | 2.131 | 2.947 |
| **16** | 1.337 | 1.746 | 2.120 | 2.921 |
| **17** | 1.333 | 1.740 | 2.110 | 2.898 |
| **18** | 1.330 | 1.734 | 2.101 | 2.878 |
| **19** | 1.328 | 1.729 | 2.093 | 2.861 |
| **20** | 1.325 | 1.725 | 2.086 | 2.845 |
| **21** | 1.323 | 1.721 | 2.080 | 2.831 |
| **22** | 1.321 | 1.717 | 2.074 | 2.819 |
| **23** | 1.319 | 1.714 | 2.069 | 2.807 |
| **24** | 1.318 | 1.711 | 2.064 | 2.797 |
| **25** | 1.316 | 1.708 | 2.060 | 2.787 |
| **26** | 1.315 | 1.706 | 2.056 | 2.779 |
| **27** | 1.314 | 1.703 | 2.052 | 2.771 |
| **28** | 1.313 | 1.701 | 2.048 | 2.763 |
| **29** | 1.311 | 1.699 | 2.045 | 2.756 |
| **30** | 1.310 | 1.697 | 2.042 | 2.750 |

**Upute za primjenu tablice**: Broj $t_{(1+\gamma)/2}$ jednak je vrijednosti $F^{-1}((1+\gamma)/2)$ gdje je $F$ funkcija razdiobe vjerojatnosti slučajne varijable $t(d+1)$ s $d$ stupnjeva slobode. Npr. ako su $d = 10$ i $\gamma = 0.9$, onda se broj $t_{(1+0.9)/2} = \chi^2_{0.95}$ očita u presjeku retka **10** i stupca **0.95**, pa je $t_{0.95} = 1.812$.

# Popis oznaka sa stalnim značenjem

| oznaka | značenje |
|---|---|
| $:=$ | definira se |
| $\mathbb{N}$ | skup prirodnih brojeva |
| $\mathbb{Z}$ | skup cijelih brojeva |
| $\mathbb{Q}$ | skup racionalnih brojeva |
| $\mathbb{R}$ | skup realnih brojeva |
| $\lvert\cdot\rvert$ | apsolutna vrijednost |
| $\emptyset$ | prazan skup |
| card | kardinalni broj skupa |
| $\subseteq$ | podskup skupa |
| $\subset$ | pravi podskup skupa |
| $\cap$ | presjek skupova |
| $\cup$ | unija skupova |
| $\setminus$ | razlika skupova |
| $^c$ | komplement skupa |
| $\langle a, b\rangle$ | otvoreni interval od $a$ do $b$, tj. $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ |
| $[a, b\rangle$ | poluzatvoreni (poluotvoreni) interval $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ |
| $\langle a, b]$ | poluzatvoreni (poluotvoreni) interval $\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ |
| $[a, b]$ | segment $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ |
| $\sum_{k=1}^{n} x_k$ | zbroj $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ |
| $\prod_{k=1}^{n} x_k$ | umnožak $x_1\, x_2 \cdots x_n$ |
| $\lceil x \rceil$ | najmanji cijeli broj veći ili jednak $x$ |
| $\times$ | Kartezijev umnožak skupova |
| $n!$ | $n$ faktorijela, tj. umnožak prvih $n$ prirodnih brojeva |
| $P(n, k)$ | broj $k$-permutacija $n$-članog skupa |
| $\binom{\sum_{i=1}^{n} k_i}{k_1, \ldots, k_n}$ | multinomni koeficijent $\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right)!}{\prod_{i=1}^{n}(k_i!)}$ |
| $\binom{n}{k}$ | binomni koeficijent $\frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$ |
| $\bar{C}(n, k)$ | broj $k$-kombinacija s ponavljanjem $n$-članog skupa |
| $f_i$ | apsolutna frekvencija modaliteta $x_i$ |
| $r_i$ | relativna frekvencija modaliteta $x_i$ |
| $f_i^{>}$ | apsolutna frekvencija „veće od” modaliteta $x_i$ |
| $r_i^{>}$ | relativna frekvencija „veće od” modaliteta $x_i$ |
| $f_i^{<}$ | apsolutna frekvencija „manje od” modaliteta $x_i$ |
| $r_i^{<}$ | relativna frekvencija „manje od” modaliteta $x_i$ |
| $\bar{\cdot}$ | aritmetička sredina numeričkog niza |
| Mo | mod niza |

| | |
|---|---|
| $Q_1$ | prvi (donji) kvartil |
| $Q_2$ | drugi kvartil (medijan) |
| $Q_3$ | treći (gornji) kvartil |
| $R$ | raspon varijacije niza |
| $I_q$ | interkvartil |
| $V_q$ | koeficijent kvartilne devijacije |
| MAD | srednje apsolutno odstupanje |
| Var | varijanca (disperzija) |
| $\sigma$ | standardna devijacija |
| $V$ | koeficijent varijacije |
| $E$ | (matematičko) očekivanje |
| $F^*$ | funkcija razdiobe standardne normalne slučajne varijable |

# Popis tablica


3.1 Formule za izračun potpunih srednjih vrijednosti . . . . . 12
3.2 Formule za izračun srednjih položajnih vrijednosti . . . . . 12
3.3 Formule za izračun mjera raspršenja (disperzije) . . . . . 14
3.4 Interpretacija intenziteta varijabilnosti niza pomoću koeficijenta kvartilne devijacije . . . . . 14
3.5 Interpretacija intenziteta varijabilnosti niza pomoću koeficijenta varijacije . . . . . 14

6.1 Najčešće korištene vrijednosti funkcije $G^*$ . . . . . 31
6.2 Interpretacija vrijednosti koeficijenta $r$ . . . . . 36
6.3 Chaddockova ljestvica . . . . . 38

7.1 Tablica nekih standardnih antiderivacija . . . . . 42
7.2 Tablica nekih Laplaceovih transformata . . . . . 42
7.5 Vrijednosti funkcije vjerojatnosti za Poissonovu slučajnu varijablu $X \sim \text{Pois}(\lambda)$ . . . . . 46
7.6 Vrijednosti funkcije razdiobe vjerojatnosti za slučajnu varijablu $X \sim N(0,1)$ . . . . . 47
7.7 Kvantili $\chi^2$-razdiobe . . . . . 48
7.8 Kvantili Studentove razdiobe . . . . . 49

# Indeks pojmova

$k$-permutacija, 2
$\sigma$-algebra, 6
$k$-kombinacija
    bez ponavljanja, 2
    s ponavljanjem, 2
$k$-permutacija
    bez ponavljanja, 2
    s ponavljanjem, 2
$q$-kvantil slučajne varijable, 23
Čebiševljeva nejednakost, 25
Čebiševljevo pravilo u opisnoj statistici, 14

algebra događaja, 3
alternativna hipoteza, 33
apsolutna frekvencija, 9
    korigirana, 11
    kumulativni niz, 10

Bayesova formula, 8
Bernoullijeva shema, 8
binomna formula, 2
binomna slučajna varijabla, 17
binomni koeficijent, 2

de Morganove formule, 4
decili, 12
duljina statističkog niza, 9

eksponencijalna slučajna varijabla, 24

formula potpune vjerojatnosti, 8
funkcija
    gustoće vjerojatnosti, 16
    razdiobe vjerojatnosti, 16

geometrijska slučajna varijabla, 19

hipergeometrijska slučajna varijabla, 20
hipoteze, 7
histogram, 10

interval povjerenja pouzdanosti, 30

za procjenu očekivanja, 31
za procjenu varijance, 32
izmjeriv skup, 6

jednolika (uniformna) slučajna varijabla
diskretna, 17
neprekidna, 23
jednostavna linearna regresija, 37

koeficijent
kvartilne devijacije, 13
varijacije, 13
koeficijent determinacije, 38
kritično područje, 33
kumulativna frekvencija
„manje od", 9
„veće od", 9
kumulativna relativna frekvencija
„manje od", 10
„veće od", 10
kvartili, 12

medijan, 12
mjera skupa, 6
mjere lokacije, 12
mjere raspršenja, 12
formule za izračun, 14
mod, 11
modalitet obilježja, 9
multinomni koeficijent, 2

nezavisnost
događaja, 7
slučajnih varijabli, 26
normalna slučajna varijabla, 24

o nekim svojstvima binomnih koeficijenata, 2
očekivanje, 16

partitivni skup, 5
Pearsonov koeficijent korelacije, 36
percentili, 11
permutacija, 1
Poissonov model, 18
Poissonova slučajna varijabla, 18
poligon frekvencija
apsolutnih, 10
relativnih, 10
potpun sustav događaja, 8
pravilo $3\,\sigma$, 25

prebrojiva aditivnost, 6
procjenitelj, 29
    nepristran, 29
prostor elementarnih događaja, 3

raspon varijacije, 13
razdioba, 11
    $\chi^2$-razdioba, 28
    bimodalna, 11
    binomna, 17
    diskretna jednolika (uniformna), 17
    eksponencijalna, 23
    geometrijska, 19
    hipergeometrijska, 20
    multimodalna, 11
    neprekidna jednolika (uniformna), 23
    normalna, 24
    Poissonova, 18
    standardna normalna, 25
    Studentova, 28
    unimodalna, 11
relativna frekvencija, 9
    korigirana, 11
    kumulativni niz, 10

slučajna varijabla
    diskretna, 15
    standardna normalna, 24
slučajni pokus, 3
slučajni uzorak, 29
    diskretni, 29
    kontinuirani, 29
sredina
    aritmetička, 10
    geometrijska, 10
    harmonijska, 10
    razredna, 10
srednja vrijednost
    formule za izračun položajnih srednjih vrijednosti, 12
    formule za izračun potpunih srednjih vrijednosti, 12
srednje apsolutno odstupanje, 13
srednje vrijednosti, 10
    položajne, 10
    potpune, 10
standardizirano obilježje, 14
standardna devijacija, 13, 16

teorem
    Čebiševljev za diskretne slučajne varijable, 17

integralni de Moivrè-Laplaceov, 27
lokalni de Moivrè-Laplaceov, 27
Poissonov, 19
pravilo jednakosti (bijekcije), 1
pravilo umnoška, 1
pravilo zbroja, 1
središnji granični, 26
testiranje hipoteza, 33
za očekivanje, 34
za varijancu, 35

varijanca, 13, 16
korigirana uzoračka, 30
uzoračka, 30
vjerojatnosni prostor, 5
beskonačan, 6
klasičan, 5
konačan, 5
vjerojatnost, 4
aposteriorna, 8
apriorna, 8
geometrijska, 6
uvjetna, 7

zatvoreni razred, 10

# Literatura


[1] M. Benšić i N. Šuvak, *Uvod u vjerojatnost i statistiku*, Odjel za matematiku Sveučilišta u Osijeku, 2014.

[2] N. Elezović, *Vjerojatnost i statistika*, Element, Zagreb, 2018.

[3] Ž. Pauše, *Uvod u matematičku statistiku*, Školska knjiga, Zagreb, 2013.

[4] S. Suljagić, *Vjerojatnost i statistika*, interna skripta, Tehničko veleučilište u Zagrebu, Zagreb, 2003.

[5] D. Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.

[6] N. Adžaga, A. Martinčić Špoljarić i N. Sandrić, *Vjerojatnost i statistika*, web skripta 2017., dostupno na `https://www.grad.unizg.hr/_download/repository/VIS.pdf`

[7] M. Benšić i N. Šuvak, *Primijenjena statistika*, Web skripta, 2013., dostupno na `http://www.mathos.unios.hr/ptfstatistika/00_statistika.pdf`

[8] V. Čuljak, *Vjerojatnost i statistika*, web skripta, 2011., dostupno na `http://www.grad.hr/vera/webnastava/vjerojatnostistatistika/vis-pdf.pdf`

[9] B. Kovačić, L. Marohnić i T. Strmečki, *Repetitorij matematike za studente elektrotehnike*, e-priručnik, Tehničko Veleučilište, Zagreb, 2016.

[10] D. C. Montgomery i G. C. Runger, *Applied Statistics and Probability for Engineers*, John Wiley and Sons, inc. 2002.

[11] T. T. Soong, *Fundamentals of Probability and Statistics for Engineers*, John Wiley and Sons, inc. 2004.