Matematika 1

Zbirka zadataka s rješenjima

Autor: Reni Banov, Martina Benković, Mandi Orlić Bachler

Institucija: Tehničko Veleučilište Zagreb

Datum: 30. rujna, 2024

Verzija: 1.0

ElegantLaTeX Program

PRIRUČNICI TEHNIČKOG VELEUČILIŠTA U ZAGREBU
MANUALIA POLYTECHNICI STUDIORUM ZAGRABIENSIS

Matematika 1

zbirka zadataka s rješenjima

Reni Banov

Martina Benković
Mandi Orlić Bachler

Zagreb, 2024.

Matematika 1 – zbirka zadataka s rješenjima

izdavač Tehničko veleučilište u Zagrebu
Vrbik 8, Zagreb

za izdavača prof. dr.sc. Jana Žiljak Gršić

autori Reni Banov, Martina Benković, Mandi Orlić Bachler

recenzenti prof. dr. sc. Predrag Vuković, Učiteljski fakultet Sveučilišta u Zagrebu
izv. prof. dr. sc. Tin Perkov, Učiteljski fakultet Sveučilišta u Zagrebu

vrsta djela priručnik

Objavljivanje je odobrilo Vijeće Tehničkog veleučilišta u Zagrebu
odlukom broj: 6612-11/24 od 30.09.2024.

ISBN 978-953-8444-15-9

Predgovor

Ovaj nastavni materijal namijenjen je studentima prve godine prijediplomskog stručnog studija graditeljstva Tehničkog veleučilišta u Zagrebu koji slušaju predmet Matematika 1.

Koncepcija zbirke je organizirana na sličan način kao što su složene vrijedne zbirke i repetitorij drugih autora za tehničke fakultete: B. Apsen ([1]), L. Čaklović ([2]), B.P. Demidovič ([3]), V. Devide ([4], [5]), V.P. Minorski ([6]), M. Orlić i T. Perkov ([7]), S. Suljagić ([8]). Zbirka se sastoji od devet poglavlja koja prate tematske cjeline izvedbenog nastavnog programa tog predmeta: realni brojevi, matrični račun, vektori, analitička geometrija, polarni koordinatni sustav i kompleksni brojevi, nizovi i redovi, limes funkcije, derivacija funkcije, tok funkcije. Osim riješenih zadataka i zadataka za vježbanje, radi boljeg razumijevanja obrađenog gradiva u zbirci su navedene definicije, teoremi i svojstva. Na kraju zbirke nalaze se dva priloga, formule i primjeri pismenih ispitnih rokova te kolokvija s rješenjima.

Posebnu zahvalnost dugujemo recenzentima prof.dr.sc. Predragu Vukoviću i izv.prof.dr.sc. Tinu Perkovu na uloženom trudu. Njihovi savjeti i prijedlozi znatno su doprinijeli kvaliteti teksta. Unaprijed zahvaljujemo svima koji nas obavijeste o bilo kojoj uočenoj pogrešci ili nekom drugom propustu.

Autori

Sadržaj

Poglavlje

Realni brojevi

Uvod

- *Jednadžbe i nejednadžbe*
- *Binomni poučak*

1.1 Jednadžbe i nejednadžbe

Primjer 1.1 Riješite nejednadžbu $\dfrac{2x+1}{x+1} > 1$.

Rješenje *Prisjetimo se, riješiti nejednadžbu znači pronaći sve realne brojeve x za koje vrijedi dana nejednakost. Zadana nejednadžba ekvivalentna je nejednadžbi:*

$$\frac{2x+1}{x+1} - 1 > 0,$$

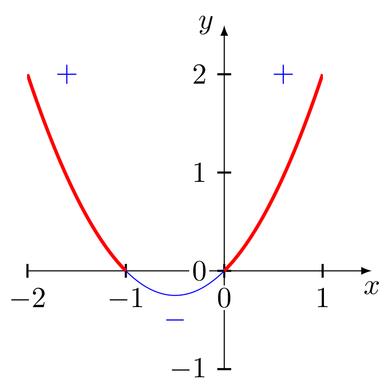
to jest

$$\frac{2x+1-x-1}{x+1} > 0$$
$$\frac{x}{x+1} > 0$$

Problem se sveo na pronalaženje vrijednosti $x \in \mathbb{R}$ za koje će razlomak biti pozitivan. Jedan od načina rješavanja ove nejednadžbe je množenje s kvadratom nazivnika (budući da ne znamo kakav je predznak nazivnika te mijenja li se znak nejednakosti) uz uvjet da je nazivnik različit od 0.

$$\frac{x}{x+1} > 0 \quad \Big/ \cdot (x+1)^2, \quad (x \neq -1)$$
$$x \cdot (x+1) > 0 \Longrightarrow x^2 + x > 0$$

Sada je problem ekvivalentan pronalaženju intervala realnih brojeva x za koje su vrijednosti kvadratne funkcije pozitivne. Odredimo nultočke ove kvadratne funkcije, skicirajmo graf i odredimo intervale za koje vrijedi $x^2 + x > 0$.



Konačno rješenje je $x \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 0, \infty\rangle$.

Definicija 1.1. Apsolutna vrijednost

Realnu funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *zadanu pravilom*

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

nazivamo **apsolutna vrijednost** *realnog broja.*

Primjer 1.2 Riješite jednadžbu $|x+7| - |x-2| = 5$.

Rješenje *Prema definiciji apsolutne vrijednosti imamo:*

$$|x+7| = \begin{cases} x+7, \ \text{za } x+7 \geqslant 0 \Longrightarrow x \geqslant -7 \\ -x-7, \ \text{za } x+7 < 0 \Longrightarrow x < -7 \end{cases}$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, \ \text{za } x-2 \geqslant 0 \Longrightarrow x \geqslant 2 \\ -x+2, \ \text{za } x-2 < 0 \Longrightarrow x < 2 \end{cases}$$

stoga promatramo 4 slučaja:

1. $x \geqslant -7$ *i* $x \geqslant 2$ *tj.* $x \in [2, \infty\rangle$

$$x + 7 - (x-2) = 5 \Longrightarrow 9 = 5$$

   što je netočno te jednadžba nema rješenja u ovom intervalu.

2. $x \geqslant -7$ *i* $x < 2$ *tj.* $x \in [-7, 2\rangle$

$$x + 7 - (-x+2) = 5 \Longrightarrow x = 0$$

3. $x < -7$ *i* $x \geqslant 2$ *u ovom slučaju ne postoji interval u kojem bi tražili rješenje*
4. $x < -7$ *i* $x < 2$ *tj.* $x \in \langle\infty, -7\rangle$

$$-x - 7 - (-x+2) = 5 \Longrightarrow -9 = 5$$

   što je opet netočno te jednadžba nema rješenja niti u ovom intervalu.

Konačno, jednadžba ima jedno rješenje i to $x = 0$.

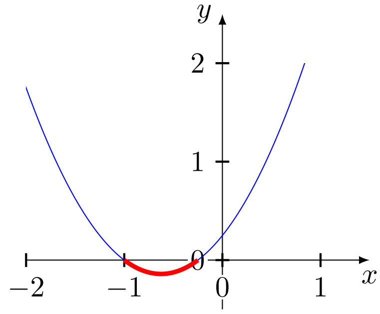
Primjer 1.3 Riješite nejednadžbu $\dfrac{|-x+2|}{x+1} \geq 3$.

Rješenje *Prema definiciji apsolutne vrijednosti imamo dva slučaja i dvije nejednadžbe:*

$$|-x+2| = \begin{cases} -x+2, \ \text{za } -x+2 \geqslant 0 \Longrightarrow -x \geqslant -2 \Longrightarrow x \leq 2 \\ x-2, \ \text{za } -x+2 < 0 \Longrightarrow -x < -2 \Longrightarrow x > 2 \end{cases}$$

(a) $x \leq 2$

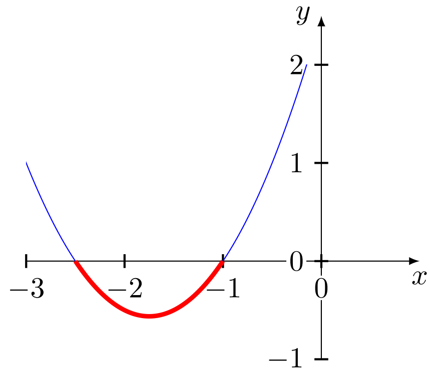
$$\begin{aligned}
\frac{-x+2}{x+1} &\geq 3 \quad (x \neq -1)\\
\frac{-x+2}{x+1} - 3 &\geq 0\\
\frac{-4x-1}{x+1} &\geq 0 \quad \Big/ \cdot (-1)\\
\frac{4x+1}{x+1} &\leq 0 \quad \Big/ \cdot (x+1)^2\\
(4x+1)\cdot(x+1) &\leq 0
\end{aligned}$$



Rješenje (a): $x \in \left\langle -1, -\frac{1}{4} \right]$

(b) $x > 2$

$$\begin{aligned}
\frac{x-2}{x+1} &\geq 3\\
\frac{x-2}{x+1} - 3 &\geq 0\\
\frac{2x+5}{x+1} &\leq 0\\
(2x+5)\cdot(x+1) &\leq 0
\end{aligned}$$



Rješenje (b): $x \in \left[-\frac{5}{2}, -1 \right\rangle$

Budući da $x > 2$*, a dobiveni interval sadrži vrijednosti koje su strogo manje od* 2*, nejednadžba nema rješenja, to jest* $\left[-\frac{5}{2}, -1 \right\rangle \cap \langle 2, +\infty \rangle = \emptyset$.

Konačno rješenje nejednadžbe je $x \in \left\langle -1, -\frac{1}{4} \right]$.

Primjer 1.4 Riješite nejednadžbu $\left| \frac{(x-1)(x+4)}{x^2+4} \right| < 1$.

Rješenje *Budući da je* $x^2 + 4 > 0$ *za sve* $x \in \mathbb{R}$*, možemo maknuti apsolutne vrijednosti iz nazivnika te cijelu nejednadžbu pomnožiti nazivnikom* $x^2 + 4$*:*

$$\begin{aligned}
\frac{|(x-1)(x+4)|}{x^2+4} &< 1 \quad \Big/ \cdot (x^2+4)\\
|x-1| \cdot |x+4| &< x^2 + 4
\end{aligned}$$

Prema definiciji apsolutne vrijednosti imamo:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, \; za \; x-1 \geqslant 0 \Longrightarrow x \geq 1 \\ -x+1, \; za \; x-1 < 0 \Rightarrow x < 1 \end{cases}$$

$$|x+4| = \begin{cases} x+4, \; za \; x+4 \geqslant 0 \Longrightarrow x \geq -4 \\ -x-4, \; za \; x+4 < 0 \Longrightarrow x < -4 \end{cases}$$

stoga promatramo 4 slučaja:

1. $x \geqslant 1$ *i* $x \geqslant -4$ *to jest* $x \in [1, \infty\rangle$

$$(x-1)\cdot(x+4) < x^2+4 \Longleftrightarrow x^2+3x-4 < x^2+4$$
$$x^2+3x-4-x^2-4 < 0 \Longleftrightarrow 3x-8 < 0$$
$$\textit{odakle dobijemo} \quad x < \frac{8}{3} \Longleftrightarrow x \in \left\langle -\infty, \frac{8}{3} \right\rangle$$

Rješenje 1. slučaja: $\left\langle -\infty, \frac{8}{3} \right\rangle \cap [1, \infty\rangle = \left[1, \frac{8}{3} \right\rangle$

2. $x \geqslant 1$ *i* $x < -4$ *to jest* $x \in \emptyset$ *stoga ne postoji interval u kojem možemo tražiti rješenje.*

3. $x < 1$ *i* $x \geqslant -4$ *to jest* $x \in [-4, 1\rangle$

$$(-x+1)\cdot(x+4) < x^2+4 \Longleftrightarrow -x^2-3x+4 < x^2+4$$
$$-2x^2-3x < 0 \Longrightarrow -x(2x+3) < 0$$
$$\textit{odakle dobijemo} \quad x \in \left\langle -\infty, -\frac{3}{2} \right\rangle \cup \langle 0, +\infty\rangle$$

Rješenje 3. slučaja: $\left(\left\langle -\infty, -\frac{3}{2} \right\rangle \cup \langle 0, \infty\rangle\right) \cap [-4, 1\rangle = \left[-4, -\frac{3}{2} \right\rangle \cup \langle 0, 1\rangle$

4. $x < 1$ *i* $x < -4$ *to jest* $x \in \langle -\infty, -4\rangle$

$$(-x+1)\cdot(-x-4) < x^2+4 \Longleftrightarrow x^2+3x-4 < x^2+4$$
$$\textit{odakle dobijemo} \quad x < \frac{8}{3} \Longleftrightarrow x \in \left\langle -\infty, \frac{8}{3} \right\rangle$$

Rješenje 4. slučaja: $\left\langle -\infty, \frac{8}{3} \right\rangle \cap \langle -\infty, -4\rangle = \langle -\infty, -4\rangle$

Konačno rješenje nejednadžbe je unija rješenja svih slučajeva:

$$\langle -\infty, -4\rangle \cup \left[-4, -\frac{3}{2} \right\rangle \cup \langle 0, 1\rangle \cup \left[1, \frac{8}{3} \right\rangle = \left\langle -\infty, -\frac{3}{2} \right\rangle \cup \left\langle 0, \frac{8}{3} \right\rangle.$$

1.2 Binomni poučak

Napomena *Za sve $a, b, c \in \mathbb{R}$ vrijede sljedeće jednakosti:*

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \qquad a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \qquad (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Definicija 1.2. Binomni poučak

Za svaki a, b te za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{n} b^n$$

gdje je **opći član** *binomnog razvoja jednak*

$$A_k = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,\ k = 0, 1, \ldots n \quad (prvi\ (k = 0),\ drugi\ (k = 1), \ldots),$$

binomni koeficijenti *definirani su izrazom*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot k},$$

gdje $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$ definiramo kao umnožak prvih n prirodnih brojeva i nazivamo **faktorijelom** *broja n, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Posebno vrijedi: $0! = 1$.

Svojstvo Svojstva binomnih koeficijenata:

1. $\binom{0}{0} = \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$
2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
3. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Drugo i treće svojstvo vizualno prikazuje **Pascalov trokut:**

$$\begin{array}{lccccccccc}
n = 0: & & & & & 1 & & & & \\
n = 1: & & & & 1 & & 1 & & & \\
n = 2: & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
n = 3: & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
n = 4: & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

Primjer 1.5 Raspišite izraz $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4$.

Rješenje *Koristimo formulu za binomni poučak gdje je*

$$a=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}, b=-\frac{1}{\sqrt{x}}=-x^{-\frac{1}{2}}, n=4$$

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4 &= \binom{4}{0}\cdot(\sqrt{x})^4+\binom{4}{1}\cdot(\sqrt{x})^3\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^1\\ &+\binom{4}{2}\cdot(\sqrt{x})^2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+\binom{4}{3}\cdot(\sqrt{x})^1\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3\\ &+\binom{4}{4}\cdot(\sqrt{x})^0\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4\\ &=x^2+4x\sqrt{x}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)+\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot x\cdot\frac{1}{x}\\ &+\frac{4!}{3!\cdot 1!}\sqrt{x}\cdot\left(-\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)+1\cdot 1\cdot\frac{1}{x^2}\\ &=x^2-4x+\frac{4\cdot 3\cdot 2!}{2!\cdot 2\cdot 1}-\frac{4\cdot 3!}{3!}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\\ &=x^2-4x+6-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

Primjer 1.6 Odredite peti član u razvoju binoma $\left(x^3-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^8$.

Rješenje *Koristimo formulu za opći član:*

$$A_k=\binom{n}{k}a^{n-k}b^k,\ \textit{gdje su}\ a=x^3, b=-\frac{2}{\sqrt{x}}=-2x^{-\frac{1}{2}}, n=8$$

Tražimo peti član, odnosno A_4*, tj. za* $k=4$

$$\begin{aligned}A_4 &= \binom{8}{4}\left(x^3\right)^{8-4}\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^4\\ &=\frac{8!}{4!\cdot 4!}\cdot x^{12}\cdot\frac{2^4}{x^2}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{4!\cdot 4\cdot 3\cdot 2}\cdot x^{12}\cdot\frac{16}{x^2}\\ &=1120x^{10}\end{aligned}$$

Primjer 1.7 Odredite onaj član u razvoju binoma $\left(2x-\frac{1}{x}\right)^8$ koji sadrži x^6.

Rješenje *Opći član je oblika:* $A_k=\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$, *te je* $a=2x$, $b=-\frac{1}{x}$, $n=8$, *dok je* k *potrebno odrediti.*

$$\begin{aligned}A_k &= \binom{8}{k}(2x)^{8-k}\left(-\frac{1}{x}\right)^k=\binom{8}{k}2^{8-k}x^{8-k}(-1)^kx^{-k}=\binom{8}{k}2^{8-k}x^{8-k-k}(-1)^k\\ &=\binom{8}{k}2^{8-k}x^{8-2k}(-1)^k\end{aligned}$$

Tražimo član koji sadrži x^6*, stoga mora vrijediti:* $x^{8-2k}=x^6$ *odakle slijedi:*

$$8-2k=6\implies k=1$$

Prema tome, drugi član u razvoju binoma sadrži x^6.

1.3 Zadaci za vježbu

✍ **Zadatak 1.1** Riješite nejednadžbe:

a) $\dfrac{-x+2}{x-3} \leq -2$

b) $\dfrac{3}{x+3} > \dfrac{x-4}{x}$

c) $\dfrac{(2x-1)(x+3)}{(x-3)(x-2)} < 2$

d) $\dfrac{2x}{x^2-x+2} > x$

e) $\dfrac{x-7}{x} \leq \dfrac{5}{x(x-3)}$

f) $\dfrac{(x+1)^2(x-2)}{(x-1)^2(x+2)} < 0$

g) $x^2 - x + \dfrac{1}{x} > 1$

h) $x \leq \dfrac{2x+5}{x-2}$

i) $\dfrac{x-1}{x} > \dfrac{-2}{x(x+2)}$

Rješenje

a) $\langle 3, 4]$

b) $\langle -3, -2\rangle \cup \langle 0, 6\rangle$

c) $\langle -\infty, 1\rangle \cup \langle 2, 3\rangle$

d) $\langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 0, 1\rangle$

e) $\langle 0, 2] \cup \langle 3, 8]$

f) $\langle -2, 2\rangle \setminus \{-1, 1\}$

g) $\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 0, \infty\rangle \setminus \{1\}$

h) $\langle -\infty, -1] \cup \langle 2, 5]$

i) $\langle -\infty, -2\rangle \cup \langle -1, \infty\rangle$

✍ **Zadatak 1.2** Riješite nejednadžbe:

a) $\dfrac{|-x+3|}{x+1} < 1$

b) $\dfrac{5}{|4-x|} \geq 1$

c) $\dfrac{5x-1}{|2x-3|} \geq 1$

d) $(5-x)(5-|x|) > 9$

e) $|x+3| > |x-2|$

f) $|x-2| \leq |x+4|$

g) $\dfrac{|3-5x|}{x-2} > 6$

h) $\dfrac{|x+2|}{x-1} > 3$

i) $\left|\dfrac{(x+2)(x-1)}{x^2+1}\right| > 1$

j) $2x + \dfrac{1}{x} - 2 > |x|$

k) $\left|x + \dfrac{1}{x} - 2\right| > x$

l) $|7x-2| - |3-x| > 5$

Rješenje

a) $\langle -2, +\infty\rangle$

b) $[-1, 9] \setminus \{4\}$

c) $[4, +\infty\rangle \setminus \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

d) $\langle -4, 2\rangle \cup \langle 8, +\infty\rangle$

e) $[2, +\infty\rangle$

f) $[2, +\infty\rangle$

g) $\langle 2, 9\rangle$

h) $[-2, 1\rangle$

i) $\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, 3\rangle$

j) $\langle 0, +\infty\rangle$

k) $\langle -\infty, 0\rangle$

l) $\langle -\infty, -1\rangle \cup \left\langle \dfrac{5}{4}, +\infty\right\rangle$

✍ **Zadatak 1.3** Raspišite izraze:

a) $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^5$ b) $\left(\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^6$ c) $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^4$

✍ **Zadatak 1.4**

a) Odredite onaj član u razvoju binoma $\left(2x-\frac{1}{x}\right)^8$ koji sadrži x^8.

b) Odredite onaj član u razvoju binoma $\left(\frac{1}{2}x-\frac{4}{x}\right)^{15}$ koji sadrži x^{10}.

c) Odredite onaj član u razvoju binoma $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{12}$ koji sadrži x^3.

d) Odredite onaj član u razvoju binoma $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^{15}$ koji ne sadrži x.

e) Odredite peti član u razvoju binoma $\left(\frac{1}{2}x^2-y\right)^7$.

f) Odredite četvrti član u razvoju binoma $\left(\frac{1}{2}x^2+y\right)^9$.

g) Odredite sedmi član u razvoju binoma $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^9$.

h) Odredite šesti član u razvoju binoma $(3x^2+5y)^6$.

Rješenje

a) prvi član $A_1 = 256x^8$

b) ne postoji takav član jer je $k = \frac{5}{2}$

c) osmi član $A_8 = \binom{12}{7}x^3$

d) deseti član $A_{10} = \binom{15}{9}(-2)^9$

e) $A_5 = \frac{21}{4}x^6y^4$

f) $A_4 = \frac{63}{8}x^{12}y^3$

g) $A_7 = \binom{9}{6}$

h) $A_6 = 56250x^2y^5$

Poglavlje

Matrični račun

Uvod

- *Matrice*
- *Determinanta matrice*
- *Rang i inverz matrice*
- *Sustavi linearnih jednadžbi*

2.1 Matrice

Definicija 2.1. Matrica

Neka su $m, n \in \mathbb{N}$ *prirodni brojevi, a* $D_{mn} = \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ *podskup Kartezijeva produkta skupa prirodnih brojeva. Svako preslikavanje* $A : D_{mn} \longrightarrow \mathbb{R}$ *nazivamo* **realna matrica tipa** (m, n) *i zapisujemo u "tabličnom obliku":*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \text{gdje su } a_{ij} \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Kažemo da matrica $A = [a_{ij}]$ *ima* ***m*** *redaka i* ***n*** *stupaca.* M_{mn} *označava skup svih matrica tipa (m,n). Za realne matrice tipa* (m, n) *pisat ćemo* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Definicija 2.2. Oblici matrica

- *Za matricu* $A = [a_{ij}]$ *tipa* $(1, n)$ *kažemo da je* **matrica redak** *ili* **retčana matrica**.
- *Za matricu* $A = [a_{ij}]$ *tipa* $(m, 1)$ *kažemo da je* **matrica stupac** *ili* **stupčasta matrica**.
- *Matrica kojoj su svi elementi* $a_{ij} = 0$ *naziva se* **nul-matrica**.
- *Za matricu* $A = [a_{ij}]$ *tipa* (m, n) **transponirana matrica** *je matrica kojoj su zamijenjeni retci sa stupcima, to jest* $A^{\intercal} = [a_{ji}]$ *tipa* (n, m).
- *Za matricu* $A = [a_{ij}]$ *kažemo da je* **kvadratna matrica reda n** *ako ima jednak broj redaka i stupaca, to jest* $m = n$. *Skup svih kvadratnih matrica reda* n *označavamo s* M_n.

  Elementi $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ *čine* **glavnu dijagonalu** *kvadratne matrice.*

  Elementi $a_{1n}, a_{2n-1}, \ldots, a_{n1}$ *čine* **sporednu dijagonalu** *kvadratne matrice.*
- *Za kvadratnu matricu* $A = [a_{ij}]$ *reda* n *kažemo da je* **dijagonalna** *ako su joj svi elementi izvan glavne dijagonale jednaki* 0.

- *Dijagonalna matrica koja na dijagonali ima samo jedinice naziva se* **jedinična matrica**.
- *Kvadratna matrica kojoj su iznad (ispod) glavne dijagonale svi elementi jednaki* 0 *naziva se* **donjetrokutasta (gornjetrokutasta) matrica**
- *Kvadratna matrica je* **simetrična** *ako vrijedi* $A^\intercal = A$.
- *Kvadratna matrica je* **antisimetrična** *ako vrijedi* $A^\intercal = -A$ *(na glavnoj dijagonali su nule).*

Definicija 2.3. Operacije nad matricama

- *Matrice* $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in M_{mn}$ *su* **jednake** *ako vrijedi* $a_{ij} = b_{ij}$ *za sve* i, j.
- **Zbroj/razlika** *matrica* **istog tipa** $A = [a_{ij}],\ B = [b_{ij}] \in M_{mn}$ *je matrica* $C \in M_{mn}$ *s elementima* $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$ *za sve* i, j.
- **Umnožak** *matrice* $A = [a_{ij}] \in M_{mn}$ *i* **realnog broja** $\lambda \in \mathbb{R}$ *je nova matrica* $\lambda A \in M_{mn}$ *s elementima* λa_{ij} *za sve* i, j.
- **Umnožak** *matrice* $A \in M_{m\mathbf{p}}$ *i matrice* $B \in M_{\mathbf{p}n}$ *je nova matrica* $C = AB,\ C \in M_{mn}$ *s elementima*
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}.$$

  Važno: *Umnožak matrica* AB *je definiran samo ako je* **broj stupaca od** A *jednak* **broju redaka od** B, *odnosno kažemo da su matrice* **ulančane**.

Primjer 2.1 Zadane su dvije matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2},\ B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$.

Izračunajte matricu $2A + B^\intercal$.

Rješenje *Množenje matrice realnim brojem:*

$$2A = \mathbf{2} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} \cdot 3 & \mathbf{2} \cdot 1 \\ \mathbf{2} \cdot (-1) & \mathbf{2} \cdot 2 \\ \mathbf{2} \cdot 0 & \mathbf{2} \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

Transponiranje matrice:

$$B^\intercal = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}^\intercal = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

Zbrajanje matrica istog tipa:

$$2A + B^{\intercal} = \begin{bmatrix} \mathbf{6} & 2 \\ -2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{2} & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{6}+\mathbf{2} & 2+(-1) \\ -2+0 & 4+1 \\ 0+1 & 2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ -2 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Primjer 2.2 Zadane su dvije matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \; B = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}.$$

Izračunajte $A \cdot B$.

Rješenje

$$A \cdot B = \underbrace{\begin{array}{r} \mathbf{1}.\mathit{redak} \\ 2.\mathit{redak} \end{array} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_{\underline{2}\times 2} \cdot \underbrace{\begin{array}{ccc} \mathbf{1}.\mathit{stupac} & 2.\mathit{stupac} & 3.\mathit{stupac} \\ \end{array} \begin{pmatrix} \mathbf{6} & 5 & 4 \\ \mathbf{3} & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{2\times\underline{3}}$$

$$= \begin{array}{rc} & \begin{array}{ccc} \mathbf{1}.\mathit{stupac} & 2.\mathit{stupac} & 3.\mathit{stupac} \end{array} \\ \begin{array}{r} \mathbf{1}.\mathit{redak} \\ 2.\mathit{redak} \end{array} & \begin{pmatrix} \mathbf{1}\cdot\mathbf{6}+\mathbf{2}\cdot 0,0,0\mathbf{3} & 1\cdot 5+2\cdot 2 & 1\cdot 4+2\cdot 1 \\ 3\cdot 6+4\cdot 3 & 3\cdot 5+4\cdot 2 & 3\cdot 4+4\cdot 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= \underbrace{\begin{array}{rc} & \begin{array}{ccc} \mathbf{1} & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{r} \mathbf{1} \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} \mathbf{12} & 9 & 6 \\ 30 & 23 & 16 \end{pmatrix} \end{array}}_{\underline{2}\times\underline{3}}.$$

Primjer 2.3

Zadane su matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Izračunajte $2A^2 + 3B^{\intercal} - 5I$.

Rješenje

$$B^{\intercal} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
A^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 1 + 2\cdot 0 & 1\cdot 0 + 0\cdot(-1) + 2\cdot 3 & 1\cdot 2 + 0\cdot 1 + \cdot 1 \\ 1\cdot 1 + -1\cdot 1 + 1\cdot 0 & 1\cdot 0 + -1\cdot(-1) + 1\cdot 3 & 1\cdot 2 + -1\cdot 1 + 1\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 3\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot 0 + 3\cdot(-1) + 1\cdot 3 & 0\cdot 2 + 3\cdot 1 + 1\cdot 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2A^2 + 3B^\intercal - 5I = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
= \begin{bmatrix} 2 & 12 & 8 \\ 0 & 8 & 4 \\ 6 & 0 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \\
= \begin{bmatrix} 2+3-5 & 12+3-0 & 8+0-0 \\ 0 & 6 & 7 \\ 9 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 15 & 8 \\ 0 & 6 & 7 \\ 9 & 3 & 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Primjer 2.4 Zadane su matrice

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ x & y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}
$$

Odredite $x, y \in \mathbb{R}$ tako da vrijedi $A \cdot B = B \cdot A$.

Rješenje

$$
A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+2x & -6+2y \\ 15+4x & -18+4y \end{bmatrix}
$$

$$
B \cdot A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & -14 \\ x+3y & 2x+4y \end{bmatrix}
$$

$$A \cdot B = B \cdot A \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 5+2x & -6+2y \\ 15+4x & -18+4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & -14 \\ x+3y & 2x+4y \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 5+2x & = & -13 \\ -6+2y & = & -14 \\ 15+4x & = & x+3y \\ -18+4y & = & 2x+4y \end{array} \right\} \quad \Longrightarrow x = -9,\ y = -4.$$

Napomena *Množenje matrica općenito* **nije komutativno***!*

Primjer 2.5

Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 6 & x & x-y \\ -1 & -7 & x+y-z \\ -3 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

Odredite $x, y, z \in \mathbb{R}$ takve da vrijedi $A = A^{\intercal}$

Rješenje

$$A^{\intercal} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -3 \\ x & -7 & -5 \\ x-y & x+y-z & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & x & x-y \\ -1 & -7 & x+y-z \\ -3 & -5 & -6 \end{bmatrix} = A$$

odakle slijedi

$$\left. \begin{array}{rcl} -1 & = & x \\ -3 & = & x-y \\ -5 & = & x+y-z \end{array} \right\} \Longrightarrow \quad x = -1,\ y = 2,\ z = 6.$$

2.2 Determinanta matrice

Definicija 2.4. Determinanta matrice

Determinanta kvadratne matrice *$A \in M_n$ je preslikavanje* $\det : M_n \to \mathbb{R}$ *koje matrici pridružuje realni broj* $\det A$ *ili* $|A|$*, definirano rekurzivno korištenjem Laplaceova razvoja po retku ili stupcu:*

- *i retku:* $\det A = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ik} \det A_{ik}$
- *j stupcu:* $\det A = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det A_{kj}$

gdje su $\det A_{ik}$*, i* $\det A_{kj}$ *determinante matrica reda* $n-1$.

Za matricu od jednog elementa $A = [a_{11}]$*, definiramo* $\det(A) = a_{11}$.

Red determinante *definira se kao red njezine matrice.*

2.2.1 Računanje determinanti

- Determinanta matrice 2. reda

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Primjer 2.6 Zadana je matrica $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$. Izračunajte determinantu $\det A$.

Rješenje $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 7 \cdot 4 = -7.$

- Sarrusovo pravilo za determinantu matrice (**samo**) 3. reda

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$$

$$- a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}$$

Primjer 2.7 Zadana je matrica $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$. Izračunajte determinantu matrice A pomoću Sarrusovog pravila.

Rješenje *Prepišemo prva dva stupca:*

$$\left|\begin{matrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{matrix}$$

Pomnožimo elemente na glavnim dijagonalama i zbrojimo umnoške:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ 2 & \mathbf{5} & \mathbf{-2} \\ -1 & -2 & \mathbf{2} \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 2 \\ \mathbf{2} & 5 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \end{matrix}$$

Pomnožimo elemente na sporednim dijagonalama i oduzmemo umnoške:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & \mathbf{-1} \\ 2 & \mathbf{5} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{2} \end{vmatrix} \begin{matrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & 5 \\ -1 & -2 \end{matrix}$$

$\det A = 2\cdot5\cdot2+2\cdot(-2)\cdot(-1)+(-1)\cdot2\cdot(-2)-(-1)\cdot5\cdot(-1)-(-2)\cdot(-2)\cdot2-2\cdot2\cdot2 = 7.$

- Determinanta matrice 3. (i višeg) reda - Laplaceov razvoj (po prvom retku):

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= (-1)^2 a_{11} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &+ (-1)^3 a_{12} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &+ (-1)^4 a_{13} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Napomena

Kraći i jednostavniji način zapisa predznaka u Laplaceovom razvoju vizualno se lako pamti:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Svaki neparni red matrice počinje s pozitivnim predznakom, svaki parni s negativnim te takvi redovi predznaka alterniraju. To vrijedi za determinante bilo kojeg reda.

Primjer 2.8 Izračunajte determinantu matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -9 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Laplaceovim razvojem po 1. stupcu.

Rješenje

$$\det A = \begin{array}{c} + \\ - \\ + \end{array}\begin{vmatrix} \mathbf{3} & 1 & -9 \\ \mathbf{0} & -1 & 7 \\ \mathbf{0} & 0 & 9 \end{vmatrix} = +\mathbf{3}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} - \mathbf{0}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -9 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} + \mathbf{0}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -9 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\cdot(-1\cdot 9 - 0\cdot 7) - 0 + 0 = -27.$$

2.2.2 Svojstva determinanti

- Determinanta je jednaka 0 ako su svi elementi nekog retka ili stupca jednaki 0.
- Ako su dva stupca (ili retka) jednaka, onda je determinanta jednaka 0.
- Determinanta trokutaste matrice jednaka je umnošku elemenata na glavnoj dijagonali.
- Zamjenom mjesta dva stupca (ili retka) determinanta mijenja predznak
- Dodavanjem retka (ili stupca) drugom retku (stupcu) determinanta se ne mijenja.
- Determinantu množimo nekim brojem $\lambda \in \mathbb{R}$ tako da jedan redak (ili stupac) pomnožimo tim brojem.
- Transponirana matrica ima istu determinantu kao polazna matrica, vrijedi $det\ A^{\intercal} = det\ A$.

Teorem 2.1. Binet-Cauchy

Za sve $A, B \in M_n$ *vrijedi* $det\,(AB) = det\ A \cdot det\ B$.

Primjer 2.9 Izračunajte determinante

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$

Rješenje

Koristimo svojstva determinanti te ih transformiramo do determinanti koje možemo lakše izračunati.

a)
$$\begin{array}{c} I \\ II \\ III \\ IV \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \left\{ \begin{array}{c} I\cdot(-1) + II \\ \textit{1. redak pomnožimo s} \\ -1 \\ \textit{i dodamo 2. retku} \end{array} \right\} \Longrightarrow + \left\{ \begin{array}{cccc} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right.$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{c} I\cdot(-1) + III \\ I\cdot(-1) + IV \\ \textit{ako stupcu ili retku dodamo drugi stupac ili redak} \\ \textit{pomnožen nekim brojem, determinanta se ne mijenja} \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{c} \textit{ako su ispod ili iznad glavne dijagonale} \\ \textit{sve nule, onda je determinanta matrice} \\ \textit{jednaka umnošku elemenata na glavnoj} \\ \textit{dijagonali} \end{array}$$

$$= 1 \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8.$$

b) $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \; I \cdot (-\tfrac{1}{2}) + II \; = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \; II \cdot (-\tfrac{2}{3}) + III \; =$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \; III \cdot (-\tfrac{3}{4}) + IV \; = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{vmatrix} = 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} = 5.$$

c) $$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix} \; \begin{array}{c} I \cdot (-2) + III \\ II + IV \\ \\ \\ \end{array} = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \end{vmatrix} \; \begin{array}{c} I \cdot (-1) + II \\ \\ III \cdot 2 + IV \\ \\ \end{array} =$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} \; II \cdot (-2) + I \; = \begin{array}{c} + \\ - \\ + \\ - \end{array} \begin{vmatrix} 0 & -7 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$+0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -7 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} -7 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -7 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$-1 \cdot \begin{vmatrix} -7 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} -7 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix} =$$

$$= -1 \cdot [-7 \cdot 0 \cdot 6 + (-2) \cdot (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \cdot 2 - 0 \cdot 0 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1) \cdot (-7) - 6 \cdot 1 \cdot (-2)]$$
$$= -4.$$

Primjer 2.10 Riješite jednadžbe

a) $\begin{vmatrix} x & 5 \\ x-3 & x \end{vmatrix} = 9$

b) $\begin{vmatrix} x-3 & x-2 & x-1 \\ x & x+1 & x+2 \\ x+3 & x+4 & x+5 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} = 0$

Rješenje

a) $\begin{vmatrix} x & 5 \\ x-3 & x \end{vmatrix} = x\cdot x-(x-3)\cdot 5 = x^2-5x+15 = 9 \Longrightarrow x^2-5x+6=0$

Odakle slijedi rješenje: $x_1 = 2,\ x_2 = 3.$

b) $\begin{vmatrix} x-3 & x-2 & x-1 \\ x & x+1 & x+2 \\ x+3 & x+4 & x+5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \textit{I-II} \\ \\ \textit{III-II} \end{matrix} = \begin{vmatrix} -3 & -3 & -3 \\ x & x+1 & x+2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \textit{I+III} \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} -3 & -3 & -3 \\ x & x+1 & x+2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

ako su svi elementi nekog stupca ili retka jednaki nuli, onda je determinanta jednaka 0

$\det A = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ I\cdot(-1)+II \\ I\cdot(-2)+III \\ I\cdot(-2)+IV \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1-x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 3-x^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ IV-III \end{matrix} =$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1-x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4-x^2 \end{vmatrix} = 1\cdot \begin{vmatrix} 1-x^2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 4-x^2 \end{vmatrix} (1-x^2)\cdot \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 4-x^2 \end{vmatrix} =$

$= (1-x^2)\cdot[-3\cdot(4-x^2)-0\cdot(-1)] = -3\cdot(1-x^2)\cdot(4-x^2) = 0$

$1-x^2 = 0$ *ili* $4-x^2 = 0 \Longrightarrow x_{1,2} = \pm 1,\ x_{3,4} = \pm 2.$

2.3 Rang i inverz matrice

Definicija 2.5. Linearna (ne)zavisnost stupaca (redaka) matrice

Kažemo da je skup stupaca matrice $\{S_1, \dots, S_n\}$ ***linearno nezavisan***, *ako se proizvoljan stupac nulmatrice može na* ***jedan jedini*** *način prikazati kao linearna kombinacija stupaca iz* A, *tj. ako iz*

$$\mathbf{0}_j = \alpha_1 S_1 + \cdots + \alpha_n S_n, \alpha_i \in \mathbb{R}$$

slijedi da je $\alpha_i = 0, \forall i = 1, \dots, n$

Na sličan način možemo definirati linearnu nezavisnost redaka matrice.

Definicija 2.6. Rang matrice

Rang matrice A **po stupcima (retcima),** $r(A)$, *jednak je broju svih linerano nezavisnih stupaca (redaka) matrice* A.

Teorem 2.2. Teorem o rangu

Za svaku matricu $A \in M_{mn}$ *je rang po stupcima jednak rangu po retcima.*

Napomena *Za svaku* $A \in M_{mn}$ *vrijedi* $r(A) \leq min\{m, n\}$.

Definicija 2.7. Ekvivalentne matrice

Kažemo da je matrica B **ekvivalentna matrici** A, *u oznaci* $B \sim A$, *ako je nastala primjenom konačnog broja elementarnih transformacija na matricu* A.

Napomena *Ekvivalentne matrice imaju isti rang.*

Rang matrice A određujemo primjenom **elementarnih transformacija**:

- zamjena dva stupca (retka) matrice A,
- množenjem nekog stupca (retka) matrice A skalarom različitim od nule,
- dodavanjem nekog stupca (retka) matrice A nekom drugom stupcu (retku).

Primjer 2.11 Izračunajte rang matrice

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -9 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -10 \end{bmatrix}$

Rješenje

a) Očito je $r(A) \leq 3$ *jer matrica ima 3 retka. Elementarnim transformacijama svodimo matricu na reducirani oblik:*

$$\begin{bmatrix}1&3&2&1\\4&9&5&4\\3&7&4&3\end{bmatrix}\begin{matrix}I\cdot(-4)+II\\I\cdot(-3)+III\\ \end{matrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&2&1\\0&-3&-3&0\\0&-2&-2&0\end{bmatrix}\begin{matrix}II+I\\II\cdot(-\frac{2}{3})+III\end{matrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&-1&1\\0&-3&-3&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\;II:(-3)\sim\begin{bmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\Longrightarrow r(A)=2.$$

b) $$\begin{bmatrix}5&0&-9\\-2&1&2\\3&0&-10\end{bmatrix}\begin{matrix}I\cdot(-1)+III\\ \\ \end{matrix}\sim\begin{bmatrix}5&0&-9\\-2&1&2\\-2&0&-1\end{bmatrix}\begin{matrix}III\cdot(-9)+I\\III\cdot 2+II\end{matrix}\sim$$

$$\begin{bmatrix}23&0&0\\-6&1&0\\-2&0&-1\end{bmatrix}\begin{matrix}I:23\\ \\ \end{matrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0\\-6&1&0\\-2&0&-1\end{bmatrix}\begin{matrix}I\cdot 6+II\\I\cdot 2+III\end{matrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\Longrightarrow r(A)=3.$$

Definicija 2.8. Inverz matrice

Za kvadratnu matricu $A\in M_n$ kažemo da ima inverz (invertibilna je), ako postoji matrica $X\in M_n$ takva da vrijedi $AX=XA=I$. Matricu X nazivamo **inverz matrice** *A i označavamo s A^{-1}.*

Definicija 2.9. Regularna i singularna matrica

Za kvadratnu matricu $A\in M_n$ kažemo da je **regularna** *ako ima inverz. Matricu koja nije regularna nazivamo* **singularna**.

Teorem 2.3. Veza između regularne matrice i determinante

Kvadratna matrica $A\in M_n$ je regularna ako i samo ako je $\det A\neq 0$.

Korolar 2.1. Veza između determinante matrice i ranga

Neka je A kvadratna matrica $A\in M_n$. $\det A\neq 0$ ako i samo ako je skup njezinih stupaca (redaka) linearno nezavisan, to jest $r(A)=n$.

Zaključak *Veza između regularne matrice, determinante i ranga*

Kvadratna matrica $A\in M_n$ je regularna $\Longleftrightarrow$ $\det A\neq 0 \Longleftrightarrow r(A)=n$.

Napomena *Određivanje inverza matrice elementarnim transformacijama. Vrijedi:*

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I\Longrightarrow[A\mid I]\rightarrow\textit{ elementarne transformacije redaka }\rightarrow[I\mid A^{-1}]$$

Inverz matrice A računamo tako da proširimo matricu A jediničnom matricom I (istog reda) te na sve primijenimo elementarne transformacije redaka s ciljem dobivanja jedinične matrice I na mjestu polazne matrice A. Na mjestu polazne matrice I nalazi se inverz A^{-1}.

Primjer 2.12 Izračunajte inverz matrice

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

Rješenje

a)
$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ II\cdot(-3)+I \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & -13 & 1 & -3 \\ 1 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} I\cdot\frac{7}{13}+II \\ \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & -13 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & \frac{7}{13} & -\frac{8}{13} \end{array}\right] \begin{array}{c} I:(-13) \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & -\frac{1}{13} & \frac{3}{13} \\ 1 & 0 & \frac{7}{13} & -\frac{8}{13} \end{array}\right] I \leftrightarrow II \sim$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{7}{13} & -\frac{8}{13} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{13} & \frac{3}{13} \end{array}\right] \Longrightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{13} & -\frac{8}{13} \\ -\frac{1}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix}.$$

b)
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} I+II \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] II+III \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \Longrightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

c)
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} I+II \\ I\cdot(-1)+III \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} II:2+I \\ III:2+I \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} II:2 \\ III:2 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \begin{array}{c} III:(-1) \\ II \leftrightarrow III \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Primjer 2.13

Zadane su matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$. Riješite matričnu jednadžbu $B \cdot X = I - A$.

Rješenje

$$\begin{aligned} B \cdot X &= I - A \\ B^{-1} \cdot \big/ B \cdot X &= I - A \qquad \textit{(množenje jednadžbe slijeva)} \\ B^{-1} \cdot B \cdot X &= B^{-1} \cdot (I - A) \\ I \cdot X &= B^{-1} \cdot (I - A) \\ X &= B^{-1} \cdot (I - A) \end{aligned}$$

Izračunajmo $I - A$ i B^{-1}.

$$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] I \cdot 3 + II \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 1 \end{array}\right] II : (-5) + I$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 5 & 3 & 1 \end{array}\right] II : 5 \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

$$\Longrightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$X = B^{-1} \cdot (I - A) = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{7}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

2.4 Sustavi linearnih jednadžbi

Definicija 2.10. Sustav linearnih jednadžbi

Neka je $\mathbb{R}$ polje realnih brojeva. Skup od m linearnih jednadžbi oblika

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

nazivamo **sustav od** m **linearnih jednadžbi sa** n **nepoznanica** $x_1, \ldots, x_n$ *nad poljem* $\mathbb{R}$, *gdje su* $a_{ij} \in \mathbb{R}$ *koeficijenti sustava,* $b_i \in \mathbb{R}$ *slobodni koeficijenti.*

Sustav je **homogen** *ako su svi* $b_i = 0$, *u suprotnom, sustav je* **nehomogen**.

Definicija 2.11. Rješenja sustava

Rješenje sustava *je svaka uređena* n*-torka* $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, $c_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n$ *koja zadovoljava svih* m *jednadžbi sustava.*

Sustav ne mora imati **niti jedno rješenje**, *može imati* **jedinstveno rješenje** *te može imati* **beskonačno mnogo rješenja**.

Homogeni sustav uvijek ima barem jedno rješenje i to n*-torku* $(0, 0, \ldots, 0)$ *koju nazivamo* **trivijalno rješenje**.

Definicija 2.12. Matrični zapis sustava

Neka su $m, n \in \mathbb{N}$. **Matrični zapis sustava** m *linearnih jednadžbi s* n *nepoznanica dan je jednadžbom*

$$A \cdot X = B,$$

gdje je $A = [a_{ij}] \in M_{mn}$ **matrica sustava**, *stupčasta matrica* $X = [x_j] \in M_{n1}$ *matrica nepoznanica te stupčasta matrica* $B = [b_i] \in M_{m1}$ *matrica slobodnih koeficijenata.*

Proširena matrica sustava *je matrica* $A_b = [a_{ij}|b_i]$ *koju dobijemo dodavanjem stupca slobodnih koeficijenata* B.

2.4.1 Cramerov sustav

Definicija 2.13. Cramerov sustav

Za sustav linearnih jednadžbi kažemo da je **Cramerov**, *ako je kvadratni, to jest* $m = n$ *(broj jednadžbi jednak je broju nepoznanica) te je odgovarajuća matrica* A *sustava regularna, odnosno* $\det A \neq 0$ $(r(A) = n)$.

Definicija 2.14. Rješenja Cramerovog sustava - Cramerov postupak

Neka je $AX = B$ matrični zapis sustava. Cramerov sustav s n jednadžbi i nepoznanica ima uvijek jedinstveno rješenje oblika $(x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$$x_i = \frac{D_i}{D}, \qquad i = 1, 2, \dots, n,$$

gdje je $D = \det A$, determinanta matrice sustava, a D_i determinanta matrice koja se dobije iz matrice A zamjenom i-tog stupca stupcem slobodnih koeficijenata B.

Primjer 2.14 Cramerovim postupkom riješite sljedeće sustave:

a)
$$\begin{aligned} -4x + 2y &= 1 \\ 3x + 5y &= -3 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= -1 \\ 6x - y + 2z &= 4 \\ -3x + 2y - z &= 1 \end{aligned}$$

Rješenje

a) Matrica sustava: $A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, *stupac slobodnih koeficijenata:* $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

$$D = \det A = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -20 - 6 = -26 \neq 0 \Longrightarrow \textit{matrica sustava je regularna.}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 6 = 11 \Longrightarrow x = \frac{D_x}{D} = -\frac{11}{26}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 12 - 3 = 9 \Longrightarrow y = \frac{D_y}{D} = -\frac{9}{26}$$

b)
$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 6 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -30 \neq 0 \Longrightarrow \textit{matrica sustava je regularna.}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -12 \Longrightarrow x = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 6 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -60 \Longrightarrow y = \frac{60}{30} = 2$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 6 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 54 \Longrightarrow z = \frac{54}{30} = \frac{9}{5}$$

2.4.2 Gaussova i Gauss - Jordanova metoda eliminacije

Definicija 2.15. Ekvivalentni sustavi

Ekvivalentni sustavi *su sustavi koji ne moraju imati isti broj jednadžbi ali imaju jednak skup svih rješenja.*

Napomena

Elementarnim transformacijama *nad jednadžbama sustava dobivamo ekvivalentni sustav, to jest sustav s istim skupom rješenja:*

- *zamjena redosljeda jednadžbi u sustavu A,*
- *množenje proizvoljne jednadžbe sustava brojem različitim od nule,*
- *množenje proizvoljne jednadžbe sustava brojem, i dodavanje rezultata bilo kojoj drugoj jednadžbi sustava.*

Napomena

Cilj **Gaussove metode eliminacije** *je elementarnim transformacijama nad retcima proširene matrice sustava A_p svesti sustav na ekvivalentni, to jest matricu sustava A svesti na* **gornju trokutastu** *matricu. Potom se sustav rješava počevši sa zadnjim retkom (jednadžbom) postupnim zamjenama "odozdo prema gore."*

Napomena

Cilj **Gauss - Jordanove metode eliminacije** *je elementarnim transformacijama nad retcima proširene matrice sustava A_p svesti sustav na ekvivalentni, to jest matricu sustava A svesti na* **dijagonalnu** *matricu. Potom se rješenja sustava neposredno očitaju iz redaka proširene matrice ekvivalentnog sustava.*

Primjer 2.15 Gauss - Jordanovom metodom eliminacije riješite sljedeće sustave:

a) $$\begin{aligned} x+2y-z&=-1\\ x-y+2z&=4\\ -2x+y-z&=1 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x+3y+2z&=2\\ 2x+4y-z&=1\\ x+3y+2z&=3 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x+4y-5z&=-6\\ 4x+2y-6z&=-10\\ 3x-5y+2z&=-1 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} x+2y-3z+t&=1\\ 2x-2y+3z+2t&=-2\\ 3x+2y-z+3t&=3 \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} x+y+z+3t&=-2\\ 5x+3y+9z+13t&=-5 \end{aligned}$$

Rješenje

a) $A_p = [A|B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & -1 \\ 1 & -1 & 2 & | & 4 \\ -2 & 1 & -1 & | & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} \textit{dodajemo } -1 \times (1.r.) \textit{ drugom retku} \\ \textit{dodajemo } 2 \times (1.r.) \textit{ trećem retku} \end{pmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & -1 \\ 0 & -3 & 3 & | & 5 \\ 0 & 5 & -3 & | & -1 \end{bmatrix} \sim \left(\textit{dodajemo } \tfrac{5}{3} \times (2.r.) \textit{ trećem retku} \right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & -1 \\ 0 & -3 & 3 & | & 5 \\ 0 & 0 & 2 & | & \frac{22}{3} \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} \textit{množimo drugi redak s } -\frac{1}{3} \\ \textit{množimo treći redak s } \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & -1 \\ 0 & 1 & -1 & | & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{11}{3} \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} \textit{dodajemo treći redak drugom} \\ \textit{dodajemo treći redak prvom} \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & \frac{8}{3} \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{11}{3} \end{bmatrix} \sim \left(\textit{dodajemo } -2 \times (2.r.) \textit{ prvom retku} \right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{11}{3} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{aligned} x &= -\frac{4}{3} \\ y &= 2 \\ z &= \frac{11}{3} \end{aligned}$$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 2 \\ 2 & 4 & -1 & | & 1 \\ 1 & 3 & 2 & | & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} \textit{dodajemo } -2 \times (1.r.) \textit{ drugom retku} \\ \textit{dodajemo } -1 \times (1.r.) \textit{ trećem retku} \end{pmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 2 \\ 0 & -2 & -5 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Iz trećeg retka slijedi:

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 1 \Longrightarrow 0 = 1$$

što je netočno, prema tome, zaključujemo kako sustav nema realnih rješenja.

c) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 & | & -6 \\ 4 & 2 & -6 & | & -10 \\ 3 & -5 & 2 & | & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} \textit{dodajemo } -4 \times (1.r.) \textit{ drugom retku} \\ \textit{dodajemo } -3 \times (1.r.) \textit{ trećem retku} \end{pmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 & | & -6 \\ 0 & -14 & 14 & | & 14 \\ 0 & -17 & 17 & | & 17 \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} \textit{drugi redak dijelimo s } -14 \\ \textit{treći redak dijelimo s } -17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 & | & -6 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 \end{bmatrix} \sim \left(\textit{dodajemo } -1 \times (2.r.) \textit{ trećem retku} \right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 & | & -6 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \left(\textit{dodajemo } -4 \times (2.r.) \textit{ prvom retku} \right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -2 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{matrix} x - z = -2 & \Rightarrow & x = z - 2 & \\ y - z = -1 & \Rightarrow & y = z - 1, & z \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

Sustav ima beskonačno mnogo rješenja jer je $z \in \mathbb{R}$ bilo koji proizvoljan realni broj.

d) *Sustav ima više nepoznanica nego jednadžbi stoga nema jedinstveno rješenje.*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & | & -1 \\ 2 & -2 & 3 & 2 & | & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 3 & | & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} \textit{dodajemo } -2 \times (1.r.) \textit{ drugom retku} \\ \textit{dodajemo } -3 \times (1.r.) \textit{ trećem retku} \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & | & -1 \\ 0 & -5 & 9 & 0 & | & -4 \\ 0 & -4 & 8 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \left(\textit{treći redak dijelimo s } -4 \right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & | & -1 \\ 0 & -5 & 9 & 0 & | & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \left(\textit{dodajemo } \tfrac{1}{5} \times (2.r.) \textit{ trećem retku} \right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & | & -1 \\ 0 & -5 & 9 & 0 & | & -4 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & | & -\frac{4}{5} \end{bmatrix} \sim \left(\textit{treći redak množimo s } -5 \right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & | & -1 \\ 0 & -5 & 9 & 0 & | & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} \textit{dodajemo } -9 \times (3.r.) \textit{ drugom retku} \\ \textit{dodajemo } 3 \times (3.r.) \textit{ prvom retku} \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 13 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & | & -40 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 4 \end{bmatrix} \sim \left(\textit{dijelimo drugi redak s } -5 \right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 4 \end{bmatrix} \sim \left(\textit{dodajemo } -2 \times (2.r.) \textit{ prvom retku}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & | & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 4 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{aligned} x + t = -3 \Rightarrow x =& - t - 3, \ t \in \mathbb{R} \\ y =& 8 \\ z =& 4 \end{aligned}$$

e) $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & | & -2 \\ 5 & 3 & 9 & 13 & | & -5 \end{bmatrix} \sim \left(\textit{dodajemo } -5 \times (1.r.) \textit{ drugom retku}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & | & -2 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & | & 5 \end{bmatrix} \sim \left(\textit{drugi redak dijelimo s } -2\right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & | & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & | & -\frac{5}{2} \end{bmatrix} \sim \left(\textit{dodajemo } -1 \times (2.r.) \textit{ prvom retku}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & | & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 1 & | & -\frac{5}{2} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{aligned} x + z + t = \tfrac{1}{2} \quad &\Rightarrow \quad x = \tfrac{1}{2} - z - t \\ y - 2z + t = -\tfrac{5}{2} \quad &\Rightarrow \quad y = -\tfrac{5}{2} + 2z - t \\ & \qquad z, t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2.5 Zadaci za vježbu

✍ **Zadatak 2.1** Izračunajte AB i BA ako je:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ -3 & -9 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

Rješenje

a) $AB = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 18 & -4 \end{bmatrix}$, $\qquad BA = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

b) $AB = \begin{bmatrix} 31 & -110 \\ 66 & 24 \end{bmatrix}$, $\qquad BA = \begin{bmatrix} 1 & 106 \\ -75 & 54 \end{bmatrix}$

c) $AB = \begin{bmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{bmatrix}$, $\qquad BA = \begin{bmatrix} 47 & 77 & -37 \\ 26 & 44 & -20 \\ 101 & 161 & -81 \end{bmatrix}$

✍ **Zadatak 2.2** Za matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -5 & 5 & 9 \\ 2 & 10 & -9 \\ 8 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ izračunajte:

a) $(A \cdot B)^\intercal$ b) $(B \cdot A)^\intercal$ c) $A^\intercal \cdot B$ d) $A \cdot B^\intercal$

Rješenje

a) $\begin{bmatrix} -9 & 18 & -40 \\ 19 & 22 & 22 \\ -10 & -7 & 15 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 31 & -34 & 12 \\ 13 & -4 & 24 \\ -12 & 45 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 27 & 29 & 13 \\ 8 & 32 & 11 \\ -15 & -3 & -30 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -4 & 31 & 19 \\ 23 & -8 & 8 \\ -37 & 55 & 41 \end{bmatrix}$

Zadatak 2.3 Izračunajte:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & 5 \\ -1 & -4 & 1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

h) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

i) $\begin{vmatrix} 8 & 9 & 0 & 0 \\ 9 & 8 & 9 & 0 \\ 0 & 9 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 9 & 8 \end{vmatrix}$

j) $\begin{vmatrix} 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 9 & 9 \\ 8 & 9 & 10 & 10 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \end{vmatrix}$

k) $\begin{vmatrix} -2 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & -7 \\ -2 & -2 & -7 & -7 \\ -2 & -7 & -7 & -7 \end{vmatrix}$

l) $\begin{vmatrix} 27 & 44 & 40 & 55 \\ 20 & 64 & 21 & 40 \\ 13 & -20 & -13 & 24 \\ 46 & 45 & -55 & 84 \end{vmatrix}$

Rješenje

a) 34 *d)* 0 *g)* 6 *j)* 8

b) -8 *e)* -3 *h)* 900 *k)* -250

c) -76 *f)* 14 *i)* -4895 *l)* 1

Zadatak 2.4 Odredite x tako da vrijedi:

a) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} x^2 & 3 & 9 \\ x & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} 5 & x & x \\ x & 5 & x \\ x & x & 0 \end{vmatrix} = 0$

d) $\begin{vmatrix} x & x+7 & x-7 \\ x+7 & x-7 & x \\ x-7 & x & x+7 \end{vmatrix} = -4$

e) $\begin{vmatrix} 8-x & -7 & 0 \\ -7 & 8-x & -7 \\ 0 & -7 & 8-x \end{vmatrix} = 0$

f) $\begin{vmatrix} 4-x & x & x \\ x & 3-x & x \\ x & x & 3-x \end{vmatrix} = 36$

g) $\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = 0$

Rješenje

a) $x_1 = 2,\ x_2 = 3$

b) $x_{1,2} = \frac{3\pm3\sqrt{5}}{2}$

c) $x_1 = 0,\ x_2 = 5$

d) $x = \frac{4}{441} \approx 0.0090729$

e) $x_{1,2} = 8 \pm 7\sqrt{2},\ x_3 = 8$

f) $x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{33}}{2},\ x_3 = 0$

g) $x_1 = 0,\ x_2 = 4$

✍ **Zadatak 2.5** Izračunajte rang matrice:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 & 11 & 16 \\ 3 & 5 & -1 & 2 & -3 \\ -4 & -5 & -2 & 9 & 19 \\ 3 & 4 & 1 & -5 & -12 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 5 \\ 3 & -5 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

Rješenje

a) $r = 2$ *b)* $r = 2$ *c)* $r = 4$ *d)* $r = 4$

✍ **Zadatak 2.6** Izračunajte inverz matrice:

a) $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \\ 4 & 4 & -4 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$

e) $E = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

f) $F = \begin{bmatrix} -12 & 6 & 12 & -12 \\ 18 & 30 & -30 & 30 \\ -18 & 0 & 18 & 6 \\ 18 & -24 & -12 & 18 \end{bmatrix}$

Rješenje

a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{24}{115} & \frac{1}{23} & \frac{1}{115} \\ \frac{1}{23} & \frac{5}{23} & \frac{1}{23} \\ \frac{1}{115} & \frac{1}{23} & \frac{24}{115} \end{bmatrix}$

b) $B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix}$

c) $C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

d) inverz ne postoji; matrica nije regularna; $det\, D = 0$

e) $E^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$

f) $F^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{7}{36} & -\frac{5}{36} & \frac{5}{9} \\ \frac{7}{18} & \frac{2}{27} & -\frac{1}{27} & \frac{4}{27} \\ \frac{11}{9} & \frac{5}{27} & -\frac{5}{54} & \frac{29}{54} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{18} \end{bmatrix}$

✍ **Zadatak 2.7** Odredite matricu X tako da vrijedi:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$

b) $X \cdot \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 18 \end{bmatrix}$

Rješenje

a) $X = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

b) nema rješenja, matrica $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ *nema inverz.*

✍ **Zadatak 2.8** Za matrice $A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ izračunajte:

a) $(A \cdot B)^{-1}$

b) $(B \cdot A)^{-1}$

c) $A^{-1} \cdot B$

d) $A \cdot B^{-1}$

Rješenje

a) $\begin{bmatrix} 7 & \frac{16}{3} \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 3 & -\frac{4}{3} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -2 & -\frac{16}{3} \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$

✍ **Zadatak 2.9** Cramerovim postupkom riješite sljedeće sustave:

a) $$\begin{aligned} x - 3y &= 72 \\ -3x - 4y + 4z &= 4 \\ 20x + 12y - 5z &= 50 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 14 \\ 3x + 2y + z &= 10 \\ 3x + y + 2z &= 11 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ x + 2y + 4z &= 12 \\ 2x - 3y - z &= 4 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} 2x + 5y + 3z &= 2 \\ x + 2y + 2z &= 1 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} 2x - y + z &= 2 \\ 3x + 2y + 2z &= -2 \\ x - 2y + z &= 1 \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} -x + y - 2z &= 1 \\ x - y + z &= -2 \\ -x - y + 3z &= 2 \end{aligned}$$

g) $$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 14 \\ 2x + y + z &= 7 \\ 3x + 2y - z &= 7 \end{aligned}$$

h) $$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 7 \\ x - 2y - z &= 1 \\ x + 3z &= 11 \end{aligned}$$

i) $$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + 3y + 2z &= 2 \\ x + 3y + z &= 3 \end{aligned}$$

Rješenje

a) $(12, -20, -10)$
b) $(1, 2, 3)$
c) $(2, -1, 3)$
d) $(1, 0, 0)$
e) $(2, -1, -3)$
f) $(-1, 2, 1)$
g) $(1, 3, 2)$
h) $(2, -1, 3)$
i) $(1, 1, -1)$

✍ **Zadatak 2.10** Gauss - Jordanovom metodom eliminacije riješite sljedeće sustave:

a) $$\begin{aligned} 2x + 2y - z + w &= 4 \\ 4x + 3y - z + 2w &= 6 \\ 8x + 5y - 3z + 4w &= 12 \\ 3x + 3y - 2z + 2w &= 6 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 2x + 5y + 4z + w &= 20 \\ 1x + 3y + 2z + w &= 11 \\ 2x + 10y + 9z + 7w &= 40 \\ 3x + 8y + 9z + 2w &= 37 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 2x - 5y + 4z + 3w &= 4 \\ 3x - 4y + 7z + 5w &= 11 \\ 4x - 9y + 8z + 5w &= 8 \\ -3x + 2y - 5z + 3w &= -3 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} x + 2y - 5z &= 6 \\ -2x + y + 2z &= 5 \\ -3x + 3y - 4z &= 8 \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} x + y - 2z &= 5 \\ 2x + 3y - z &= 17 \\ 3x + 2y - 9z &= 9 \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} 7x - 3y + 5z &= 32 \\ 5x + 2y + z &= 11 \\ 2x - y + 3z &= 14 \end{aligned}$$

g) $$\begin{aligned} 2x + 5y + 3z &= 2 \\ x + 2y + 2z &= 4 \\ x + y + 4z &= 11 \end{aligned}$$

h) $$\begin{aligned} x-2y+z&=5\\ 2x-y-2z&=-1\\ -x+2y+z&=-1 \end{aligned}$$

i) $$\begin{aligned} x+3y+2z&=14\\ 2x+y+z&=7\\ 3x+2y-z&=7 \end{aligned}$$

j) $$\begin{aligned} 2x-y-z-2w&=1\\ -x+y+2z+w&=1\\ 7x-5y+2z-4w&=8\\ -3x+2y+z+2w&=-3\\ -y+z+2w&=3 \end{aligned}$$

k) $$\begin{aligned} x+y-3z&=3\\ -2x+2y+z&=-2\\ x+4y-z&=3\\ -2x+5z&=-2 \end{aligned}$$

l) $$\begin{aligned} x+2y-3z+2w&=2\\ 2x+5y-8z+6w&=5\\ 3x+4y-5z+2w&=4 \end{aligned}$$

m) $$\begin{aligned} x+3y-4z&=-5\\ 5x+5y-10z&=-15\\ 5x-7y+2z&=-3 \end{aligned}$$

n) $$\begin{aligned} x+5y-3z+17t&=6\\ 3x+y+5z-5t&=4\\ 3x+2y+4z-t&=5 \end{aligned}$$

o) $$\begin{aligned} x-4y+11z&=4\\ 2x-3y+12z&=-12\\ 4x-4y+20z&=5 \end{aligned}$$

Rješenje

a) $(1,1,-1,-1)$

b) $(1,2,2,0)$

c) $(1,1,1,1)$

d) $(1,5,1)$

e) *nema rješenja*

f) $(2,-1,3)$

g) $(12,-5,1)$

h) $(1,-1,2)$

i) $(1,3,2)$

j) $(2w-1,2w-3,0,w), w\in\mathbb{R}$

k) *nema rješenja*

l) $(-z+2w,2z-2w+1,z,w), z,w\in\mathbb{R}$

m) $(-1+y,y,1+y), y\in\mathbb{R}$

n) $(-2z+3t+1,2z-t+1,z,t), z,t\in\mathbb{R}$

o) *nema rješenja*

Poglavlje

Vektori

Uvod

- ❏ *Vektori u ravnini i prostoru*
- ❏ *Skalarni produkt*
- ❏ *Vektorski produkt*
- ❏ *Mješoviti produkt*
- ❏ *Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori*

3.1 Vektori u ravnini i prostoru

Definicija 3.1. Euklidska ravnina

Skup uređenih parova realnih brojeva (tzv. točke u ravnini)

$$\mathbb{E}^2 = \{(x, y) \colon x, y \in \mathbb{R}\}$$

za koji je definirana udaljenost između dvije točke $T_1(x_1, y_1), T_2(x_2, y_2)$ *na sljedeći način*

$$d(T_1, T_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

nazivamo **Euklidska ravnina** *u oznaci* $\mathbb{E}^2$.

Definicija 3.2. Euklidski prostor

Na sličan način definiramo **Euklidski prostor** *(oznaka* $\mathbb{E}^3$*) kao skup uređenih trojki* $T(x, y, z)$ *realnih brojeva (točke u prostoru) za koji je definirana udaljenost pomoću funkcije*

$$d(T_1, T_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Napomena *Funkcija* $d(T_1, T_2)$ *iz definicije Euklidske ravnine i prostora ima sljedeća svojstva*

1. $d(T_1, T_2) \in \mathbb{R}$,
2. $d(T_1, T_2) \geq 0$, *i vrijedi* $d(T_1, T_2) = 0$ *ako i samo ako je* $T_1 = T_2$,
3. $d(T_1, T_2) = d(T_2, T_1)$,
4. *vrijedi "nejednakost trokuta"* $d(T_1, T_2) \leq d(T_1, T) + d(T, T_2)$,

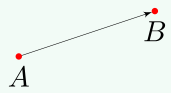
Definicija 3.3. Orijentirana dužina

Za bilo koje dvije točke $A, B \in \mathbb{E}^2$ *uređeni par* (A, B) *nazivamo* ***orijentirana dužina****, kojoj je točka* A ***početna****, a* B ***završna****.*

- *Na isti način možemo definirati pojam orijentirane dužine u prostoru* $\mathbb{E}^3$.

- *Orijentiranu dužinu (A, B) standardno označavamo s $\overrightarrow{AB}$.*

Zorno orijentiranu dužinu prikazujemo pomoću dužine određene točkama A i B sa strelicom u krajnjoj točki B.



Definicija 3.4. Ekvivalentne orijentirane dužine

*Orijentirana dužina $\overrightarrow{AB}$ **ekvivalentna** je orijentiranoj dužini $\overrightarrow{CD}$*

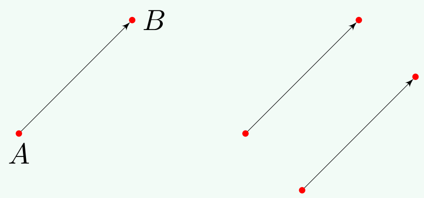
$$\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$$

samo ako dužine $\overline{AD}, \overline{BC}$ imaju isto polovište.

$\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$ $\qquad\qquad$ $\overrightarrow{AB} \not\equiv \overrightarrow{CD}$

Definicija 3.5. Pojam vektora

*Skup svih orijentiranih dužina ekvivalentnih s $\overrightarrow{AB}$ nazivamo **vektor predstavljen orijentiranom dužinom** $\overrightarrow{AB}$ u oznaci $[\overrightarrow{AB}]$.*



Napomena

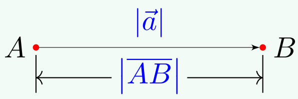
- *Često prilikom računanja s vektorima koristimo orijentirane dužine, npr. za vektor $[\overrightarrow{AB}]$ uzimamo $\overrightarrow{AB}$.*
- *Vektore standardno označavamo strelicom iznad malih latiničnih slova, primjerice $\vec{a}, \vec{b}, \ldots$.*
- *Ako orijentirana dužina $\overrightarrow{AB}$ predstavlja vektor $\vec{a}$, tada orijentirana dužina $\overrightarrow{BA}$ predstavlja vektor $-\vec{a}$.*
- *Vektor $-\vec{a}$ nazivamo **suprotan** vektor od $\vec{a}$.*
- *Za bilo koju točku $A \in \mathbb{E}^2$ orijentirana dužina $\overrightarrow{AA}$ predstavlja **nulvektor** u oznaci $\vec{0}$.*

- *Skup svih vektora u ravnini označavamo s $\mathbb{V}^2$, u prostoru s $\mathbb{V}^3$.*
- *Svaki vektor jednoznačno je određen svojim* ***modulom, smjerom i orijentacijom****.*

Definicija 3.6. Modul vektora

Modul *ili* ***duljina*** *vektora $\vec{a}$ u oznaci $|\vec{a}|$ je duljina bilo koje orijentirane dužine $\overrightarrow{AB}$ koja predstavlja taj vektor, tj.*

$$|\vec{a}| = |\overline{AB}|$$

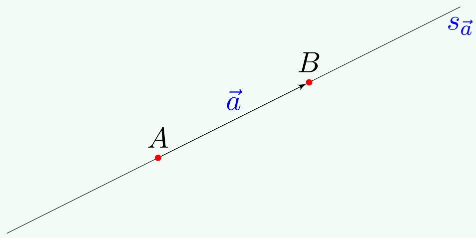


Napomena

- *Modul vektora je pozitivan realan broj.*
- *Modul nulvektora iznosi 0, i to je jedini vektor duljine 0.*
- *Suprotni vektori u ravnini (prostoru) imaju* ***isti*** *modul, tj. vrijedi $|-\vec{a}| = |\vec{a}|$.*

Definicija 3.7. Smjer vektora

Smjer *vektora $\vec{a}$ u oznaci $s_{\vec{a}}$ određen je pravcem na kojem leži orijentirana dužina $\overrightarrow{AB}$ koja predstavlja taj vektor.*

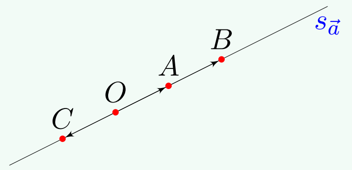


Napomena

- *Smjer vektora ne ovisi o izboru predstavnika, jer su pravci iz iste klase ekvivalentnih orijentiranih dužina paralelni.*
- *Jedini vektor za koji smjer nije određen je nulvektor, $\vec{0}$.*
- *Suprotni vektori u ravnini (prostoru) imaju* ***isti*** *smjer.*

Definicija 3.8. Orijentacija vektora

Neka su $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{V}^2$ (s istim početkom O) vektori istog smjera $s_{\vec{a}}$, te A, B njihove završne točke. Kažemo da vektori $\vec{a}, \vec{b}$ imaju ***istu orijentaciju****, ako A, B leže na pravcu $s_{\vec{a}}$ s iste strane točke O, a* ***suprotnu orijentaciju*** *ako su s različitih strana točke O.*



Istu orijentaciju imaju $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ a suprotnu orijentaciju imaju $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}$.

Napomena

- *Samo vektore **istog** smjera možemo usporediti po orijentaciji.*
- *Suprotni vektori u ravnini (prostoru) imaju **suprotnu** orijentaciju.*
- *Nulvektor $\vec{0}$ nema orijentaciju.*

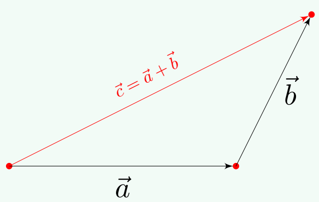
Definicija 3.9. Jednakost vektora

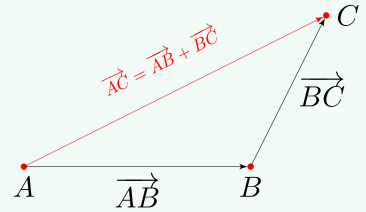
- *Za dva vektora kažemo da su **jednaki** ako i samo ako imaju iste duljine, smjerove i orijentacije.*
- *Dva vektora su **suprotna** ako i samo ako imaju iste duljine i smjer, te suprotnu orijentaciju.*

Definicija 3.10. Pravilo trokuta i paralelograma

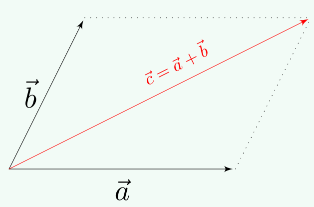
Neka je $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}]$ bilo koji vektor te neka je $\vec{b} = [\overrightarrow{BC}]$ vektor koji ima **početak u završnoj točki** *vektora $\vec{a}$, tada vrijedi*

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = [\overrightarrow{AB}] + [\overrightarrow{BC}] = [\overrightarrow{AC}]$$





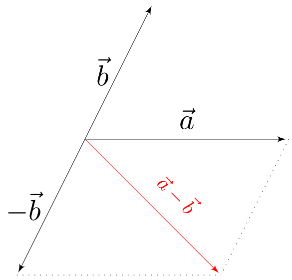
*za **pravilo trokuta**, dok zbrajanje dva vektora iz iste početne točke nazivamo **pravilo paralelograma**.*



Napomena *Svojstva zbrajanja vektora*

- *zbrajanje je* ***asocijativno*** $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$
- ***komutativno*** $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
- *za nulvektor* $\vec{0}$ *vrijedi* $\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$
- *za svaki vektor* $\vec{a}$ *postoji suprotni vektor* $-\vec{a}$ *takav da vrijedi* $-\vec{a}+\vec{a}=\vec{0}$

Napomena *Za bilo koja dva vektora* $\vec{a},\vec{b}$ *njihova* ***razlika*** *definirana je s* $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$



Definicija 3.11. Množenje vektora skalarom

Množenje vektora skalarom jest produljivanje (rastezanje, dilatacija) ili skraćivanje (stezanje, kontrakcija) vektora.

Produkt realnog broja i vektora *u oznaci* $\lambda\vec{a}$ *definiramo na ovaj način:*

1. *modul* $|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|$ *jednak je produktu modula vektora i apsolutne vrijednosti realnog broja*
2. *smjer* $s_{\lambda\vec{a}}=s_{\vec{a}}$ *ostaje isti,*
3. *orijentacija za* $\lambda>0$ *ostaje ista, odnosno za* $\lambda<0$ *postaje suprotna.*

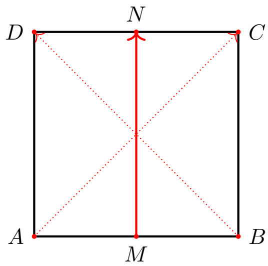
Napomena *Svojstva množenja sa skalarom.*

Za realne brojeve λ,μ *i vektore* $\vec{a},\vec{b}$ *vrijedi:*

- $\lambda\vec{a}=\vec{0}$*, ako i samo ako je* $\lambda=0$ *ili* $\vec{a}=\vec{0}$
- *kvaziasocijativnost, vrijedi* $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$
- *jedinica za množenje,* $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$
- *distributivnost na zbrajanje skalara,* $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$
- *distributivnost na zbrajanje vektora,* $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$

Primjer 3.1 U četverokutu $ABCD$, točke M i N su polovišta stranica AB i CD. Izrazite vektor $[\overrightarrow{MN}]$ pomoću vektora $[\overrightarrow{AC}]$, $[\overrightarrow{BD}]$.

Rješenje *Promotrimo četverokut* $ABCD$ *i iskoristimo pravila za zbrajanje vektora. Za početak vektor* $[\overrightarrow{MN}]$ *možemo zapisati kao zbroj vektora (u ovom slučaju 3) kojemu je početna točka* M*, a završna* N*. Nakon toga iskoristimo informaciju da su točke* M *i* N *polovišta stranica* AB *i* CD *te dalje pravilo trokuta za zbrajanje vektora.*



$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} \\ &= \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) + \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right)\end{aligned}$$

Definicija 3.12. Kolinearni vektori

Za vektore koji imaju isti smjer kažemo da su ***kolinearni****.*

Neka su $\vec{a}, \vec{b}$ kolinearni vektori i neka vrijedi $\vec{a} \neq \vec{0}$, tada postoji jedinstveni $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Napomena

- *Nulvektor je kolinearan sa svakim vektorom.*
- *Ako su vektori $\vec{a}, \vec{b}$ nekolinearni tada vrijedi $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{0} \implies \lambda = \mu = 0$.*

Definicija 3.13. Paralelni vektor i ravnina

Za vektor $\vec{a} \in \mathbb{V}^3$ kažemo da je ***paralelan*** *s ravninom Π ako je njegov smjer paralelan s nekim pravcem iz ravnine.*

Definicija 3.14. Komplanarni vektori

Za vektore iz $\mathbb{V}^3$ paralelne s istom ravninom kažemo da su ***komplanarni****.*

Napomena

- *Kolinearni vektori su uvijek komplanarni.*
- *Bilo koja dva vektora iz $\mathbb{V}^3$ su uvijek komplanarna.*

Definicija 3.15. Baza $\mathbb{V}^2$

Svaki uređeni par nekolinearnih vektora $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ *čini bazu prostora* $\mathbb{V}^2$*. Za svaki vektor* $\vec{c}\in\mathbb{V}^2$ *postoje* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ *takvi da vrijedi*

$$\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}.$$

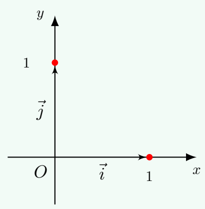
Definicija 3.16. Baza $\mathbb{V}^3$

Svaka uređena trojka nekomplanarnih vektora $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ *čini bazu prostora* $\mathbb{V}^3$*. Za svaki vektor* $\vec{d}\in\mathbb{V}^3$ *postoje* $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ *takvi da vrijedi*

$$\vec{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}.$$

Definicija 3.17. Koordinatizacija vektora u Euklidskoj ravnini

Ako je u Euklidskoj ravnini zadan Kartezijev koordinatni sustav, tada za bazu prostora $\mathbb{V}^2$ *uzimamo uređeni par vektora* $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ *predstavljen usmjerenim dužinama iz ishodišta prema točki* $(1,0)$ *za* $\vec{i}$ *te prema točki* $(0,1)$ *za* $\vec{j}$*.*



Svaki vektor $\vec{a}\in\mathbb{V}^2$ *ima jedinstveni prikaz u bazi* $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}$$

gdje su $a_x,a_y\in\mathbb{R}$ *koordinate vektora u toj bazi.*

Napomena *Za jedinične vektore vrijedi da je:*

- *duljina* $\left|\vec{i}\right|=\left|\vec{j}\right|=1$,
- *smjer vektora* $\vec{i}$ *je* x*-os (pravac* $y=0$*), a za vektor* $\vec{j}$ *je* y*-os (pravac* $x=0$*),*
- *orijentacija za vektor* $\vec{i}$ *je* $(0,0)\to(1,0)$*, a za vektor* $\vec{j}$ *je* $(0,0)\to(0,1)$.

Napomena

- *U bazi* $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ **modul** *vektora određen je s* $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}\,.$
- *Vektori* $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{V}^2$ *su* **kolinearni** *ako i samo ako vrijedi*

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}=0\,.$$

- ***Standardni prikaz*** *vektora usmjerenom dužinom za točke* P, Q *dan je izrazom*

$$\overrightarrow{PQ} = (x_Q - x_P)\vec{i} + (y_Q - y_P)\vec{j}\,.$$

Primjer 3.2 Odredite standardni prikaz $\overrightarrow{AB}$ određenog točkama $A(2,3),\ B(3,-2)$.

Rješenje

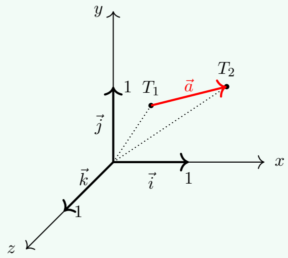
$$\overrightarrow{AB} = (3-2)\,\vec{i} + (-2-3)\,\vec{j} = \vec{i} - 5\vec{j}$$

Definicija 3.18. Koordinatizacija vektora u Euklidskom prostoru

U Euklidskom prostoru s Kartezijevim koordinatnim sustavom, uzimamo za bazu prostora $\mathbb{V}^3$ *uređenu trojku vektora*

$$\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$$

predstavljenih usmjerenim dužinama iz ishodišta (točka $O(0,0,0)$*) prema točki* $(1,0,0)$ *za vektor* $\vec{i}$*, točki* $(0,1,0)$ *za vektor* $\vec{j}$*, te točki* $(0,0,1)$ *za vektor* $\vec{k}$*.*



Za bilo koji vektor $\vec{a}$ *predstavljen orijentiranom dužinom između točaka*

$$T_1(x_1, y_1, z_1),\ T_2(x_2, y_2, z_2)$$

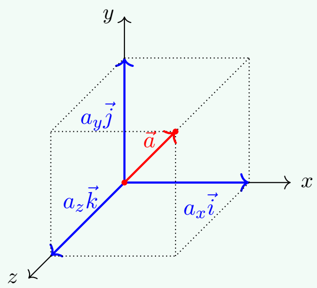
vrijedi

$$\vec{a} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

Svaki vektor $\vec{a} \in \mathbb{V}^3$ *ima jedinstveni prikaz oblika*

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\,.$$

gdje su $a_x, a_y, a_z \in \mathbb{R}$ *koordinate vektora u toj bazi.*



Napomena

- *U toj bazi modul vektora iznosi*

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

- *Vektori* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{V}^3$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \\ \vec{b} &= b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k} \\ \vec{c} &= c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k} \end{aligned}$$

su komplanarni ako i samo ako vrijedi

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$$

Primjer 3.3 Odredite standardni prikaz vektora $\overrightarrow{AB}$ između točaka $A(2,3,4),\ B(3,-2,-1)$.

Rješenje

$$\overrightarrow{AB} = (3-2)\,\vec{i} + (-2-3)\,\vec{j} + (-1-4)\,\vec{k} = \vec{i} - 5\vec{j} - 5\vec{k}$$

Primjer 3.4 Izračunajte duljinu vektora $\vec{a} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

Rješenje $|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

Primjer 3.5 Ispitajte komplanarnost vektora

$$\begin{aligned} \vec{a} &= -2\vec{i} - 8\vec{j} + 2\vec{k} \\ \vec{b} &= 3\vec{i} + 7\vec{j} + 9\vec{k} \\ \vec{c} &= -4\vec{i} - 9\vec{j} - 9\vec{k} \end{aligned}$$

.

Rješenje

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -8 & 2 \\ 3 & 7 & 9 \\ -4 & -9 & -9 \end{vmatrix} = 38 \neq 0 \implies \textit{vektori nisu komplanarni}$$

Primjer 3.6 Prikažite vektor $\vec{c} = -\vec{i} + 3\vec{j}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ i $\vec{b} = 4\vec{i} - \vec{j}$

Rješenje

$$
\begin{aligned}
\vec{c} &= \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \\
-\vec{i} + 3\vec{j} &= \lambda\left(3\vec{i} + 2\vec{j}\right) + \mu\left(4\vec{i} - \vec{j}\right) \\
-\vec{i} + 3\vec{j} &= 3\lambda\vec{i} + 2\lambda\vec{j} + 4\mu\vec{i} - \vec{j}\mu \\
-\vec{i} + 3\vec{j} &= (3\lambda + 4\mu)\,\vec{i} + (2\lambda - \mu)\,\vec{j}
\end{aligned}
$$

izjednačavanjem dobijemo sustav za λ, μ koeficijente

$$
\begin{aligned} -1 &= 3\lambda + 4\mu \\ 3 &= 2\lambda - \mu \end{aligned} \implies \begin{aligned} \lambda &= 1 \\ \mu &= -1 \end{aligned} \implies \vec{c} = \vec{a} - \vec{b}
$$

Primjer 3.7 Odredite λ tako da vektori $\vec{a} = 5\vec{i} + 2\vec{j}$ i $\vec{b} = -3\vec{i} + \lambda\vec{j}$ budu kolinearni.

Rješenje

$$
\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = 0 \implies \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -3 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \implies 5\lambda + 6 = 0 \implies \lambda = -\frac{6}{5}
$$

Primjer 3.8 Odredite m i n tako da vektori $\vec{a} = \vec{i} + m\vec{j} + 2\vec{k}$ i $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + n\vec{k}$ budu kolinearni.

Rješenje

$$
\begin{aligned} \vec{a} &= \lambda\vec{b} \\ \vec{i} + m\vec{j} + 2\vec{k} &= \lambda\left(2\vec{i} + 3\vec{j} + n\vec{k}\right) \end{aligned} \implies \begin{aligned} 1 &= 2\lambda \\ m &= 3\lambda \\ 2 &= n\lambda \end{aligned} \implies \begin{aligned} \lambda &= \tfrac{1}{2} \\ m &= \tfrac{3}{2} \\ n &= 4 \end{aligned}
$$

3.2 Skalarni produkt

Definicija 3.19. Skalarni produkt

Za dva vektora $\vec{a}, \vec{b}$ definiramo ***skalarno množenje*** $\vec{a} \cdot \vec{b}$

- *ako je barem jedan nulvektor, onda je* $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$,
- *ako su oba različiti od nulvektora, onda je* $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cos \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$.

Napomena *Za skalarni produkt vrijedi*

- $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$, *skraćeno* $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$
- $-\vec{a} \cdot \vec{a} = -|\vec{a}|^2$
- *pozitivna definitnost,* $\vec{a}^2 \geq 0$
- *komutativnost,* $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- *kvaziasocijativnost,* $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$
- *distributivnost,* $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
- *Za svaki izbor vektora* $\vec{a}, \vec{b}$ *vrijedi*
  - $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$
  - $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$

Definicija 3.20. Okomitost vektora

Bilo koja dva vektora $\vec{a}, \vec{b}$ *su okomita, ako i samo ako vrijedi* $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Napomena *Za bazu* $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ *vrijedi*

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1, \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = 0$$

stoga kažemo kako je to ***ortonormirana*** *baza za* $\mathbb{V}^2$.
Za bazu $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ *vrijedi*

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

a ostale kombinacije su 0 *(vektori baze su okomiti) stoga je to ortonormirana baza za* $\mathbb{V}^3$.
Koordinate vektora u ortonormiranoj bazi nazivamo ***ortogonalne*** *ili* ***pravokutne koordinate***.

Definicija 3.21. Kut između dva vektora

Za bilo koja dva vektora u ortonormiranoj bazi $(\vec{i}, \vec{j})$ *vrijedi*

$$\left.\begin{aligned} \vec{a} &= a_x\vec{i} + a_y\vec{j} \\ \vec{b} &= b_x\vec{i} + b_y\vec{j} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$$

Kosinus kuta između dva vektora iznosi

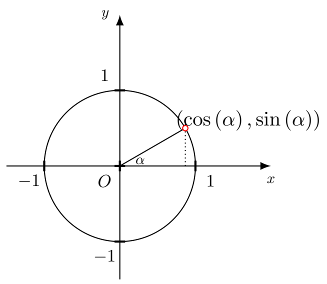
$$\cos\measuredangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2}}. \tag{3.1}$$

Napomena *Predznak kosinusa kuta dva vektora određen je predznakom skalarnog produkta, tj. predznakom brojnika u formuli (3.1).*

Napomena *Iz formule za kosinus kuta dva vektora možemo zaključiti sljedeće*

$\cos\measuredangle(\vec{a},\vec{b})$	$\measuredangle(\vec{a},\vec{b})$	*Kut*
>0	$\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle$	*šiljasti*
$=0$	$\frac{\pi}{2}$	*pravi (vektori su okomiti)*
<0	$\langle\frac{\pi}{2},\pi\rangle$	*tupi*

Tablica slijedi iz definicije funkcije kosinus na jediničnoj kružnici.



Zbog komutativnosti skalarnog produkta

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$$

kut između dva vektora je uvijek iz intervala $\langle 0,\pi\rangle$.

Definicija 3.22. Računanje skalarnog produkta u prostoru

Za bilo koja dva vektora $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{V}^3$ *vrijedi*

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

dok kosinus kuta između njih iznosi

$$\cos\measuredangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

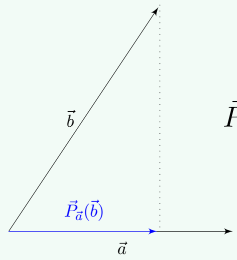
Za svaki vektor $\vec{a}\in\mathbb{V}^3$ *vrijedi*

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|},\quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|},\quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

gdje je α,β,γ *kut između vektora* $\vec{a}$ *i jediničnih vektora* $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$.

Definicija 3.23. Ortogonalna projekcija na vektor

Neka je zadan vektor $\vec{a}\neq\vec{0}$, *tada za proizvoljan vektor* $\vec{b}$ *definiramo* ***ortogonalnu (vektorsku) projekciju*** *na* $\vec{a}$



$$\vec{P}_{\vec{a}}(\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$$

Duljina ortogonalne projekcije ***(skalarna komponenta)*** *iznosi*

$$\left|\vec{P}_{\vec{a}}(\vec{b})\right| = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}\,.$$

Definicija 3.24. Ortogonalna projekcija na pravac i ravninu

Ortogonalna projekcija na pravac je projekcija na njegov vektor smjera, dok ***ortogonalnu (vektorsku) projekciju*** *na ravninu* Π *koja ima vektor normale* $\vec{n}$ *definiramo s*

$$\vec{P}_{\Pi}(\vec{a}) = \vec{a} - \frac{\vec{a}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n}\,.$$

Primjer 3.9 Neka su zadane točke $A(1,2), B(3,-1), C(1,5)$ i $D(-1,3)$. Koliko je $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ i koliko iznosi kut između ta dva vektora?

Rješenje *Prvo ćemo zapisati vektore* $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ *u standardnom prikazu, a zatim iskoristiti dva načina računanja skalarnog produkta kako bismo odredili traženi kut.*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= 2\vec{i} - 3\vec{j},\\
\overrightarrow{CD} &= -2\vec{i} - 2\vec{j}\\
\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} &= 2\cdot(-2) + (-3)\cdot(-2) = 2\\
\cos\sphericalangle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) &= \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CD}\right|} = \frac{2}{\sqrt{4+9}\cdot\sqrt{4+4}} = \frac{1}{\sqrt{26}}\\
\sphericalangle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) &= 1.373 = 78.69^\circ
\end{aligned}$$

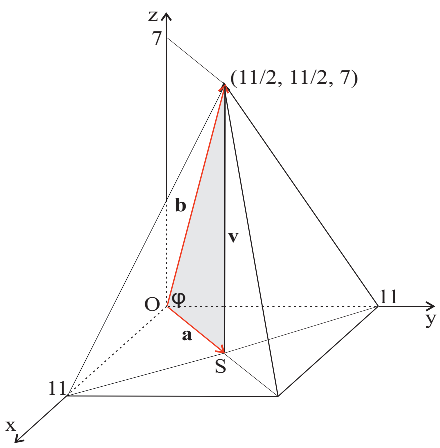
Primjer 3.10 Koliki kut zatvara rezultanta sila $\vec{F_1} = [3,2,-1]\,, \vec{F_2} = [2,-1,1,]\,, \vec{F_3} = [1,1,1]$ s osi z?

Rješenje *Rezultantu sila možemo izračunati direktnim zbrajanjem vektora po njihovim komponentama, a zatim se problem svodi na traženje kuta između dva vektora korištenjem oba pravila za računanje skalarnog umnoška.*

$$
\begin{aligned}
\vec{R} =& \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} + 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} + \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = 6\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \\
& \textit{os } z \textit{ je određena vektorom } \vec{k} = [0,0,1] \\
\cos \sphericalangle(\vec{R},\vec{k}) =& \frac{\vec{R}\cdot\vec{k}}{\left|\vec{R}\right|\cdot\left|\vec{k}\right|} = \frac{0+0+1}{\sqrt{36+4+1}\cdot\sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{41}} \\
\sphericalangle(\vec{R},\vec{k}) =& 1.414 = 81.015^\circ
\end{aligned}
$$

Primjer 3.11 Na krovištu u obliku četverostrane piramide, čija je baza kvadrat stranice 11, a visina 7, koliki je kosinus kuta kosog brida prema osnovici?

Rješenje *Problem se svodi na pronalaženje kuta između hipotenuze i katete pravokutnog trokuta koja se nalazi na bazi dok je druga kateta visina piramide. Odaberimo jedan vrh kvadrata kao ishodište koordinatnog sustava tako da se stranice kvadrata i visina piramide nalaze na koordinatnim osima x, y i z. Hipotenuzu i katetu pravokutnog trokuta prikažemo kao vektore $\vec{b}$ i $\vec{a}$ preko jediničnih vektora u prostoru $\vec{i}, \vec{j}$ i $\vec{k}$ te konačno računamo kut između ta dva vektora.*



$$
\begin{aligned}
\cos\varphi &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \\
\vec{a} &= \frac{11}{2}\vec{i} + \frac{11}{2}\vec{j} \\
\vec{b} &= \frac{11}{2}\vec{i} + \frac{11}{2}\vec{j} + 7\vec{k} \\
\cos\varphi &= \frac{\frac{121}{4} + \frac{121}{4}}{\sqrt{\frac{121}{2}\cdot\frac{219}{2}}} = 0.7433 \\
&\Longrightarrow \varphi \approx 42^\circ
\end{aligned}
$$

Primjer 3.12 Ako sile F_1 i F_2 zatvaraju kut $\frac{\pi}{3}$ i ako je $|F_1| = 7N$, $|F_2| = 2N$, koliko iznosi duljina njihove rezultante?

Rješenje *Budući da su sile zadane samo svojim modulima i kutom između njih, ne možemo ih zbrojiti po komponentama, nego ćemo iskoristiti definiciju i svojstva skalarnog umnoška. Promotrimo rezultantu kao zbroj dvije zadane sile i zapišimo njezin kvadrat:*

$$
\begin{aligned}
\vec{R} =& \vec{F_1} + \vec{F_2} \\
|\vec{R}|^2 =& \vec{R}\cdot\vec{R} = (\vec{F_1}+\vec{F_2})\cdot(\vec{F_1}+\vec{F_2}) = \vec{F_1}\cdot\vec{F_1} + \vec{F_2}\cdot\vec{F_2} + 2\vec{F_1}\cdot\vec{F_2} \\
&= |\vec{F_1}|^2 + |\vec{F_2}|^2 + 2|\vec{F_1}||\vec{F_2}|\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 7^2 + 2^2 + 2\cdot 7\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = 67 \\
&\Longrightarrow \left|\vec{R}\right| = \sqrt{67}
\end{aligned}
$$

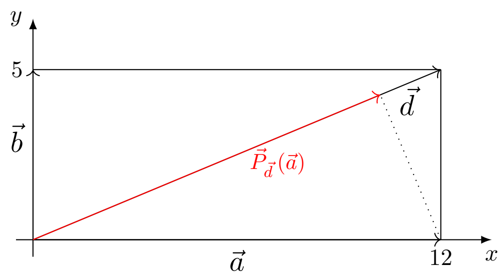
Primjer 3.13 Izračunajte $\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)$, ako je $|\vec{a}| = 2$, $\left|\vec{b}\right| = 3$ i $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.

Rješenje *Koristimo svojstva skalarnog umnoška i dane podatke o vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.*

$$
\begin{aligned}
\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right) &= 4\vec{a}^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{b}^2\\
&= 4\vec{a}^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{b}^2\\
&= 4|\vec{a}|^2-4|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})-3\left|\vec{b}\right|^2\\
&= 4\cdot 4-4\cdot 2\cdot 3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-3\cdot 9\\
&= 16-24\cdot\frac{1}{2}-27=-23
\end{aligned}
$$

Primjer 3.14 Stranice pravokutnika su $a = 12$, $b = 5$. Kolika iznosi duljina ortogonalne projekcije stranice a na dijagonalu?

Rješenje *Stranice a i b promatramo kao vektore u smjeru osi x i y te dijagonalu lako možemo prikazati pomoći njih:*



$$\vec{a}=12\vec{i},\ \vec{b}=5\vec{i}\quad \vec{d}=12\vec{i}+5\vec{j}$$

iskoristimo formulu za ortogonalnu projekciju vektora $\vec{a}$ na vektor $\vec{d}$

$$
\begin{aligned}
\left|\vec{P}_{\vec{d}}(\vec{a})\right| &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{d}}{|\vec{d}|}=\frac{144+0}{\sqrt{144+25}}=\frac{144}{13}\\
&= 11.07
\end{aligned}
$$

Primjer 3.15 Odredite projekciju vektora $\vec{d} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ na ravninu okomitu na vektor $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Rješenje *Budući je ravnina okomita na vektor $\vec{v}$, možemo ga smatrati vektorom normale te ravnine.*

$$\vec{v}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}=\vec{n},\quad \vec{P}_{\vec{n}}\left(\vec{d}\right)=\vec{d}-\frac{\vec{d}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\cdot\vec{n}$$

$$
\begin{aligned}
\vec{P}_{\vec{n}}\left(\vec{d}\right) &= \vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}-\frac{1+2+3}{\left(\sqrt{1+1+1}\right)^2}\cdot\left(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\right)=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}-2\cdot\left(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\right)\\
&= -\vec{i}+\vec{k}
\end{aligned}
$$

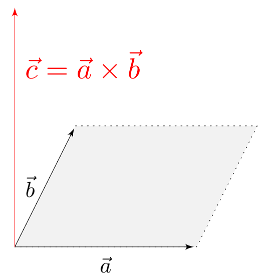
3.3 Vektorski produkt

Definicija 3.25. Vektorski produkt (u $\mathbb{V}^3$)

Za dva vektora definiramo ***vektorsko množenje*** $\vec{a} \times \vec{b}$

- *ako su* **kolinearni**, *onda je* $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$
- *ako nisu kolinearni, tada za* $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ *vrijedi*
  - *modul od* $\vec{c}$ *određen s* $|\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \sin \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$
  - *smjer od* $\vec{c}$ *zadan uvjetom okomitosti* $s_{\vec{c}} \perp s_{\vec{a}}$ *i* $s_{\vec{c}} \perp s_{\vec{b}}$
  - *orijentacija od* $\vec{c}$ *je takva da uređena trojka* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *predstavlja pozitivno orijentiranu bazu*

Napomena *Vektorsko množenje je posebnost prostora* $\mathbb{V}^3$.



Modul vektora $|\vec{c}|$ *daje površinu paralelograma određenog vektorima* $\vec{a}, \vec{b}$, *dok je njegov smjer* **uvijek okomit** *na ravninu određenu tim vektorima.*

Definicija 3.26. Računanje vektorskog produkta

Za bilo koja dva vektora $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{V}^3$ *vrijedi*

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Primjer 3.16 Izračunajte vektorski produkt $\vec{a} \times \vec{b}$ za vektore $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$, $\quad \vec{b} = \vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$.

Rješenje $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} =$ *Laplaceov razvoj ili Sarrusovo pravilo* $= 31\vec{i} + \vec{j} - 13\vec{k}$.

Primjer 3.17 Odredite sve jedinične vektore okomite na $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, i $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

Rješenje *Budući za vektore $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ i $\vec{d}=\vec{b}\times\vec{a}$ vrijedi $\vec{c},\vec{d}\perp\vec{a},\vec{b}$, računamo:*

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=\vec{i}\,(6-2)-\vec{j}\,(9-1)+\vec{k}\,(6-2)=4\vec{i}-8\vec{j}+4\vec{k}$$

Jedinični vektor u smjeru vektora $\vec{c}$:

$$\vec{c}_0=\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}=\frac{4\vec{i}-8\vec{j}+4\vec{k}}{\sqrt{16+64+16}}=\frac{4\left(\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}\right)}{4\sqrt{6}}=\frac{\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{6}}$$

Iz svojstva vektorskog umnoška vrijedi $\vec{d}=\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}=-4\vec{i}+8\vec{j}-4\vec{k}$.

Jedinični vektor u smjeru vektora $\vec{d}$: $\vec{d}_0=\dfrac{\vec{d}}{\left|\vec{d}\right|}=-\dfrac{\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{6}}$.

Definicija 3.27. Vektorski produkt za ortonormiranu bazu

Za ortonormiranu bazu $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ vrijedi sljedeća tablica vektorskih produkata

$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

Napomena *Za vektorski produkt vrijedi*

$$\begin{aligned}
&\textit{antikomutativnost} && \vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}\\
&\textit{kvaziasocijativnost} && (\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\\
&\textit{kvaziasocijativnost} && \vec{a}\times\left(\lambda\vec{b}\right)=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\\
&\textit{distributivnost} && \vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)+(\vec{a}\times\vec{c})\\
&\textit{distributivnost} && \left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{c})+\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)
\end{aligned}$$

- *vektorsko množenje **nije** asocijativno:*

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}\neq\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$$

- ***nema** jedinice za vektorsko množenje, tj. ne postoji $\vec{e}\in\mathbb{V}^3$ takav da vrijedi*

$$\vec{e}\times\vec{a}=\vec{a}\times\vec{e}=\vec{a}$$

Primjer 3.18 Neka su $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathbb{V}^3$ takvi da vrijedi $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$. Mora li vrijediti $\vec{b}=\vec{c}$?

Rješenje *Ne. Na primjer za $\vec{a}=[1,2,3]$, $\vec{b}=[1,1,1]$ i $\vec{c}=[2,3,4]$* **ne vrijedi** *gornja jednakost.*

Napomena *Za svaki vektor* $\vec{a} \in \mathbb{V}^3$ *vrijedi*

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0},$$

tj. sam sebi je kolinearan.

Definicija 3.28. Kriterij kolinearnosti u ortonormiranoj bazi

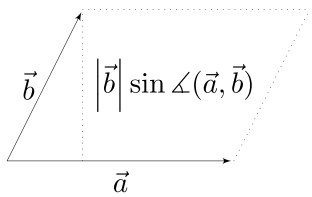
Za dva vektora $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ *u bazi* $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \\ \vec{b} &= b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k} \end{aligned}$$

vrijedi

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Longleftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$$

Napomena *Za nekolinearne vektore* $\vec{a}, \vec{b}$ ***površina paralelograma*** *i* ***trokuta*** *određenih tim vektorima iznosi*



$$P_{\diamond} = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \sin \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$$

$$P_{\triangle} = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$$

Definicija 3.29. Lagrangeov i Jacobijev identitet

Veza između skalarnog i vektorskog produkta dana je ***Lagrangeovim identitetom***

$$\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2 + \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2$$

Za svaki izbor $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{V}^3$ *vrijedi* ***Jacobijev identitet***

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} + \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0}$$

Primjer 3.19 Ako je $|\vec{a}| = \left|\vec{b}\right| = 2$ i $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$ koliko iznosi $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$?

Rješenje *Iskoristimo definiciju i svojstva vektorskog i skalarnog produkta:*

$$\begin{aligned} \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) &= \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)^2 = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|^2 = \left(|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})\right)^2 \\ &= \left(2 \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 = \left(4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 8 \end{aligned}$$

Primjer 3.20 Izračunajte λ tako da vektori $\vec{a} = 2\vec{i} + \lambda\vec{j} + \vec{k}$ i $\vec{b} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$ budu okomiti. Odredite vektorski produkt vektora $\vec{d_1}$ i $\vec{d_2}$, pri čemu je $\vec{d_1} = \vec{a} + \vec{b}$ i $\vec{d_2} = \vec{a} - \vec{b}$.

Rješenje *Iz uvjeta za okomitost vektora slijedi:*

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Longrightarrow \left(2\vec{i} + \lambda\vec{j} + \vec{k}\right) \cdot \left(4\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}\right) = 0$$
$$8 - 2\lambda - 2 = 0 \Longrightarrow \lambda = 3$$

Izračunajmo vektore $\vec{d_1}, \vec{d_2}$:

$$\begin{aligned}\vec{d_1} &= \vec{a} + \vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} + 4\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k} = 6\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \\ \vec{d_2} &= \vec{a} - \vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} - 4\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} = -2\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}\end{aligned}$$

Sada je:

$$\begin{aligned}\vec{d_1} \times \vec{d_2} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}\,(1 \cdot 3 - (-1) \cdot 5) - \vec{j}\,(6 \cdot 3 - (-2) \cdot (-1)) + \vec{k}\,(6 \cdot 5 - (-2) \cdot 1) \\ &= 8\vec{i} - 16\vec{j} + 32\vec{k}\end{aligned}$$

Primjer 3.21 Izračunajte površinu paralelograma razapetog vektorima

$$\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k},\ \vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}.$$

Rješenje *Površina je jednaka duljini, to jest modulu vektora $\vec{a} \times \vec{b}$, stoga najprije računamo vektorski produkt kao determinantu matrice, a potom njegov modul.*

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}\,(9+8) - \vec{j}\,(3+4) + \vec{k}\,(2-3) = 17\vec{i} - 7\vec{j} - \vec{k} \\ P &= \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \sqrt{17^2 + (-7)^2 + (-1)^2} = \sqrt{339}\end{aligned}$$

Primjer 3.22 Izračunajte površinu trokuta razapetog vektorima

$$\vec{a} = \vec{i} - \vec{j},\ \vec{b} = -3\vec{i} + 2\vec{j}.$$

Rješenje *Vektori su zadani u xy ravnini što znači da im je komponenta uz vektor $\vec{k}$ jednaka* 0.

$$\begin{aligned}P &= \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \\ \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\,(0-0) - \vec{j}\,(0-0) + \vec{k}\,(2-3) = -\vec{k} \\ P &= \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Primjer 3.23 Zadano je $|\vec{a}| = 5,\ \left|\vec{b}\right| = 4,\ \vec{a} \cdot \vec{b} = 10$. Izračunajte $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$.

Rješenje *Iz definicije vektorskog produkta znamo:* $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\measuredangle(\vec{a},\vec{b})$.
Nedostaje nam kut između vektora koji ćemo izračunati koristeći definiciju skalarnog produkta:

$$\cos\measuredangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|} = \frac{10}{5\cdot 4} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \measuredangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{3}$$

Sada je:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\measuredangle(\vec{a},\vec{b}) = 5\cdot 4\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 20\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$$

Zadatak možemo riješiti i pomoću Lagrangeova identiteta:

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 + (\vec{a}\times\vec{b})^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2 \Longleftrightarrow (\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b}) + (\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b})$$

odakle slijedi

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2 = |\vec{a}|^2\left|\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|^2$$

uvrštavanjem vrijednosti iz zadatka dobijemo

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2 = 5^2\cdot 4^2 - 10^2 = 400 - 100 = 300$$

što daje konačan rezultat

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}.$$

Primjer 3.24 Neka su $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathbb{V}^3$ takvi da vrijede jednakosti $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{a}\times\vec{c}, \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c}$. Mora li vrijediti $\vec{b} = \vec{c}$?

Rješenje *Da. Iz zadanih jednakosti i Lagrangeovog identiteta vrijedi* $\vec{a}^2\vec{b}^2 = \vec{a}^2\vec{c}^2$, *to jest* $\vec{b}^2 = \vec{c}^2$. *Općenito kada bi imali* $\vec{b}\neq\vec{c}$ *tada vrijedi* $\vec{b}^2\neq\vec{c}^2$ *što daje kontradikciju. Stoga zaključujemo* $\vec{b} = \vec{c}$.

3.4 Mješoviti produkt

Definicija 3.30. Mješoviti (vektorskoskalarni) produkt

Kombiniranjem skalarnog i vektorskog množenja dobivamo ***mješovito*** *množenje koje uređenoj trojci vektora pridružuje realan broj definiran*

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$$

Mješovito množenje računamo u ortonormiranoj bazi pomoću determinante

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Napomena *Parnom permutacijom trojke vektora, mješoviti produkt se ne mijenja, dok se neparnom permutacijom mijenja samo predznak rezultata.*

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\right) = \left(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\right) = -\left(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}\right) = -\left(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}\right) = -\left(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\right)$$

Napomena *Uvijek vrijedi* $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$.

Definicija 3.31. Komplanarnost vektora

Mješovito množenje tri vektora jednako je nuli onda i samo onda kada su ti vektori komplanarni.

Primjer 3.25 Izračunajte λ tako da vektori $\vec{a} = \vec{i} + (2\lambda+1)\vec{j}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 2\lambda\vec{j} + 2\vec{k}$ i $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ budu komplanarni.

Rješenje *Prema definiciji komplanarnosti vektora slijedi:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2\lambda+1 & 0 \\ 2 & 2\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$1 \cdot (2\lambda - 2) - (2\lambda + 1) \cdot (2 - 2) + 0 \cdot (2 - 2\lambda) = 0$$

$$2\lambda - 2 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1$$

Primjer 3.26 Pokažite za par vektora $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{V}^3$ jednakost

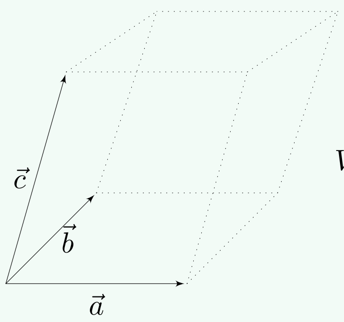
$$\left(\vec{a} - \vec{b}\right) \times \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = 2\vec{a} \times \vec{b}.$$

Rješenje *Koristimo svojstva vektorskog produkta:*

$$\begin{aligned}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}+\vec{b}\right) &= \vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}-\vec{b}\times\vec{a}-\vec{b}\times\vec{b}=\vec{0}+\vec{a}\times\vec{b}-(-\vec{a}\times\vec{b})-\vec{0}\\ &= \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{b}=2\vec{a}\times\vec{b}\end{aligned}$$

Definicija 3.32. Volumen paralelopipeda

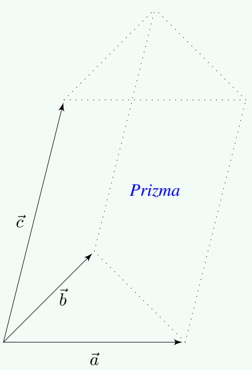
Volumen paralelepipeda razapetog vektorima $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ jednak je apsolutnoj vrijednosti mješovitog produkta



$$V=\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|=\left\|\begin{matrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{matrix}\right\|$$

Definicija 3.33. Volumen prizme

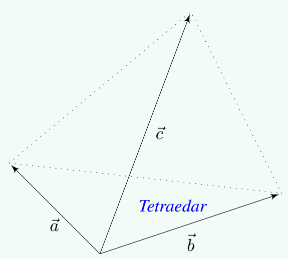
Volumen prizme razapete vektorima $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ jednak je



$$V=\frac{\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|}{2}$$

Definicija 3.34. Volumen tetraedra

Volumen tetraedra razapetog vektorima $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ jednak je



$$V=\frac{\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|}{6}$$

Primjer 3.27 Izračunajte volumen paralelopipeda razapetog vektorima

$$\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k},\ \vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j},\ \vec{c} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}.$$

Rješenje *Izračunajmo mješoviti produkt vektora, a zatim njegovu apsolutnu vrijednost.*

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \Longrightarrow V = \left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right| = |-4| = 4.$$

Primjer 3.28 Izračunajte volumen tetraedra određenog vrhovima

$$A\,(0,0,0)\,,\ B\,(2,0,0)\,,\ C\,(0,2,0)\,,\ D\,(0,0,2)\,.$$

Izračunajte visinu povučenu iz vrha D na bazu ABC.

Rješenje *Koristimo dvije formule za volumen tetraedra:*

$$V = \frac{1}{3}\cdot v \cdot P = \frac{1}{6}\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|$$

gdje je P površina baze tetraedra, tj. trokuta ABC. Najprije odredimo standardni zapis vektora za zadane početne i završne točke:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = 2\vec{i}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{AC} = 2\vec{j}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{AD} = 2\vec{k}$$

Sada je

$$\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right| = |\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}| = |8| = 8 \Longrightarrow V = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

Iz druge formule dobijemo

$$V = \frac{1}{3}\cdot v \cdot P \Longrightarrow v = \frac{3V}{P}$$

Površinu baze P možemo izračunati kao površinu trokuta razapetog vektorima $\vec{a},\vec{b}$: $P = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4\vec{k} \Longrightarrow B = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{4^2} = 2 \Longrightarrow v = \frac{3\cdot\frac{4}{3}}{2} = 2$$

3.5 Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori

Definicija 3.35. Linearni operator

Neka je $\mathbb{V}^n$ vektorski prostor. Preslikavanje $L : \mathbb{V}^n \to \mathbb{V}^n$ koje preslikava jedan vektor u drugi i pri tome čuva linearnu strukturu naziva se **linearni operator**.

Napomena *Linearni operator zapisuje se u obliku kvadratne matrice reda n, a vektor se može zapisati u obliku stupčaste matrice tipa $n \times 1$.*

Definicija 3.36. Svojstvene vrijednosti i vektori linearnog operatora

Neka je $L : \mathbb{V}^n \to \mathbb{V}^n$ linearni operator na vektorskom prostoru $\mathbb{V}^n$. Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ za koji postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi

$$L(\vec{a}) = \lambda \vec{a}$$

naziva se **svojstveni vektor** *linearnog operatora L.*

Svojstvena vrijednost *linearnog operatora L je realni broj λ vezan za svojstveni vektor $\vec{a}$ za koji vrijedi $L(\vec{a}) = \lambda \vec{a}$.*

Napomena

- *Linearni operator može imati najviše onoliko različitih svojstvenih vrijednosti kolika je dimenzija prostora.*
- *Za različite svojstvene vrijednosti postoje različiti svojstveni vektori, dok za jednu svojstvenu vrijednost postoji više svojstvenih vektora: ako je $\vec{a}$ svojstveni vektor, tada je $\alpha\vec{a}, \forall \alpha \neq 0$ također svojstveni vektor.*
- *Svojstveni vektor mora biti različit od nulvektora, dok svojstvena vrijednost može poprimiti bilo koju realnu vrijednost, uključujući nula.*
- *Jednadžbu $L(\vec{a}) = \lambda \vec{a}$ možemo zapisati u matričnom obliku: $(L - \lambda I)\vec{a} = \vec{0}$, čija netrivijalna rješenja postoje ako je $det(L - \lambda I) = 0$.*

Definicija 3.37. Karakteristična jednadžba, polinom, spektar

Karakteristična jednadžba *linearnog operatora $L : \mathbb{V}^n \to \mathbb{V}^n$ je jednadžba*

$$det(L - \lambda I) = 0, \quad L, I \in M_n.$$

Karakteristični polinom *linearnog operatora L je polinom za nepoznanicu λ koji se dobije rješavanjem determinante iz definicije karakteristične jednadžbe i čije nultočke su svojstvene vrijednosti linearnog operatora L.*

Spektar *linearnog operatora L, u oznaci $\sigma(L)$, je skup svih svojstvenih vrijednosti line-*

arnog operatora L.

Napomena *Linearni operator se može zapisati u obliku dijagonalne matrice koja na dijagonali ima samo svojstvene vrijednosti.*

Napomena **Određivanje svojstvenih vrijednosti i vektora za linearni operator** $L : \mathbb{V}^n \to \mathbb{V}^n$

1. *Odredimo karakteristični polinom $P_n(\lambda)$ iz jednadžbe $\det(L - \lambda I) = 0$.*
2. *Izračunamo nultočke karakterističnog polinoma $P_n(\lambda), \{\lambda_i \in \mathbb{R} : P_n(\lambda_i) = 0, i = 1, \ldots, n\}$.*
3. *Za svaku različitu nultočku λ_i riješimo sustav (npr. Gaussovom metodom) $(L - \lambda_i I)\vec{x} = \vec{0}$ čije rješenje je svojstveni vektor $\vec{x_i}$ određen svojstvenom vrijednosti λ_i.*

Primjer 3.29 Izračunajte svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore linearnog operatora L zadanog matricom

a) $L = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ b) $L = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Rješenje

a) Izračunamo $L - \lambda I$:

$$L - \lambda I = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{bmatrix}$$

Odredimo $\det(L - \lambda I)$:

$$\begin{vmatrix} -5-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-5-\lambda)(-2-\lambda) - 4 = \lambda^2 + 7\lambda + 6$$

Karakteristični polinom je: $P_2(\lambda) = \lambda^2 + 7\lambda + 6$.

Nultočke karakterističnog polinoma su: $P_2(\lambda) = \lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0 \implies \lambda = -1, \lambda = -6$.

Spektar linearnog operatora L je skup svojstvenih vrijednosti $\sigma(\lambda) = \{-1, -6\}$.

Za sve svojstvene vrijednosti rješavamo sustav:

$$(L - \lambda_i I)\,\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$$

Za $\lambda = -1$ *imamo* $(L - (-1)I)\overrightarrow{x} = (L + I)\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$

$$\left(\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4x + 2y \\ 2x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-4x + 2y = 0$$

$$2x - y = 0 \Longrightarrow y = 2x$$

Svojstveni vektori za $\lambda = -1$ *su:* $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ 2x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \vec{x_1} = \vec{i} + 2\vec{j}$

Za $\lambda = -6$ *imamo* $(L - (-6)I)\overrightarrow{x} = (L + 6I)\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$

$$\left(\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x + 2y \\ 2x + 4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x + 2y = 0$$

$$2x + 4y = 0 \Longrightarrow y = -\frac{1}{2}x$$

Svojstveni vektori za $\lambda = -6$ *su:* $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ -\frac{1}{2}x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Longrightarrow \vec{x_2} = \vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$

Dakle, linearni operator zadan matricom

$$L = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

ima sljedeće svojstvene vrijednosti i pripadajuće svojstvene vektore

$$\lambda_1 = -1 \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{x_1} = \vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\lambda_2 = -6 \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{x_2} = \vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$$

Vektori $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}$ *su ortogonalni, te određuju jednu bazu za* $\mathbb{V}^2$. *U toj bazi linearni operator* L *ima dijagonalni zapis sa svojstvenim vrijednostima na glavnoj dijagonali*

$$L = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$$

b) Izračunamo $L - \lambda I$*:*

$$L-\lambda I=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-\lambda&1&1\\1&2-\lambda&1\\1&1&2-\lambda\end{bmatrix}$$

Odredimo $det\,(L-\lambda I)$*:*

$$\begin{aligned}
det\,(L-\lambda I)&=\begin{vmatrix}2-\lambda&1&1\\1&2-\lambda&1\\1&1&2-\lambda\end{vmatrix}\\
&=(2-\lambda)\left((2-\lambda)^2-1\right)-(2-\lambda-1)+(1-(2-\lambda))\\
&=(2-\lambda)(2-\lambda-1)(2-\lambda+1)+\lambda-1-1+\lambda\\
&=(2-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)+2(\lambda-1)\\
&=(1-\lambda)((2-\lambda)(3-\lambda)+2)\\
&=(1-\lambda)\left(2\lambda-6-\lambda^2+3\lambda+2\right)\\
&=(1-\lambda)\left(\lambda^2+5\lambda-4\right)
\end{aligned}$$

Karakteristični polinom iznos: $P_3(\lambda)=(1-\lambda)\left(\lambda^2+5\lambda-4\right)$

Njegove nultočke su:

$$\begin{aligned}
&P_3(\lambda)=(1-\lambda)\left(\lambda^2+5\lambda-4\right)=0\\
&1-\lambda=0\Longrightarrow\lambda_1=1\\
&\lambda^2+5\lambda-4=0\Longrightarrow\lambda_2=1,\lambda_3=4
\end{aligned}$$

Rješavamo jednadžbu $(L-\lambda_i I)\overrightarrow{x}=\overrightarrow{0}$.

Za $\lambda=1$ *imamo* $(L-I)\overrightarrow{x}=\overrightarrow{0}$

$$\left(\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}-1\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right)\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&x+y+z=0\\
&x+y+z=0\\
&x+y+z=0\Longrightarrow x=-y-z,\ y,z\in\mathbb{R}\\
&x=-u-v,y=u,z=v\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

Svojstveni vektori za $\lambda=1$ *su:*

$$\vec{x}=\begin{bmatrix}-u-v\\u\\v\end{bmatrix}=u\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+v\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

Svojstveni vektori

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \vec{x_1} = -\vec{i} + \vec{j}, \qquad \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \vec{x_2} = -\vec{i} + \vec{k}$$

razapinju dvodimenzionalni prostor i svaki je svojstveni vektor koji pripada svojstvenoj vrijednosti $\lambda = 1$ *linearna kombinacija ova dva vektora.*

Za $\lambda = 4$ *imamo* $(L - 4I)\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} - 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-2x + y + z = 0$$

$$x - 2y + z = 0$$

$$x + y - 2z = 0 \Longrightarrow x = -y + 2z$$

$$-y + 2z - 2y + z = 0 \Longrightarrow 3z - 3y = 0 \Longrightarrow y = z$$

$$x = -z + 2z = z = y$$

Svojstveni vektor za $\lambda = 4$ *je*

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \vec{x_3} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}.$$

Svaki je svojstveni vektor koji pripada svojstvenoj vrijednosti $\lambda = 4$ *kolinearan s ovim vektorom.*

Dakle, linearni operator zadan matricom

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ima sljedeće svojstvene vrijednosti i pripadajuće svojstvene vektore

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} = 1 \quad &\Longrightarrow \quad \overrightarrow{x_1} = -\vec{i} + \vec{j},\ \overrightarrow{x_2} = -\vec{i} + \vec{k} \\ \lambda_3 = 4 \quad &\Longrightarrow \quad \overrightarrow{x_3} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \end{aligned}$$

Vektori $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3}$ *su ortogonalni, te određuju jednu bazu za* $\mathbb{V}^3$. *U toj bazi linearni operator* L *ima dijagonalni zapis sa svojstvenim vrijednostima na glavnoj dijagonali*

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

3.6 Zadaci za vježbu

✍ **Zadatak 3.1** Odredite vektor $\overrightarrow{AB}$ i njegov modul ako je

a) $A(4,5),\ B(-3,2)$

b) $A(1,4),\ B(6,-2)$

c) $A(4,-5,1),\ B(1,0,3)$

d) $A(-4,3,1),\ B(5,4,3)$

Rješenje

a) $\overrightarrow{AB} = -7\vec{\imath} - 3\vec{\jmath},\ \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{58}$

b) $\overrightarrow{AB} = 5\vec{\imath} - 6\vec{\jmath},\ \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{61}$

c) $\overrightarrow{AB} = -3\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} + 2\vec{k},\ \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{38}$

d) $\overrightarrow{AB} = 9\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k},\ \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{86}$

✍ **Zadatak 3.2** Vektor $\vec{c}$ prikažite kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, ako je

a) $\vec{a} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath},\ \vec{b} = 3\vec{\imath} + 5\vec{\jmath},\ \vec{c} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$

b) $\vec{a} = -3\vec{\imath} - \vec{\jmath},\ \vec{b} = 5\vec{\imath} - \vec{\jmath},\ \vec{c} = 4\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$

Rješenje

a) $\vec{c} = -\frac{1}{19}\vec{a} + \frac{7}{19}\vec{b}$

b) $\vec{c} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{5}{4}\vec{b}$

✍ **Zadatak 3.3** Odredite λ tako da vektori $\vec{a} = \lambda\vec{\imath} - 2\vec{\jmath},\ \vec{b} = 4\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ budu kolinearni.

Rješenje $\lambda = -\frac{8}{3}$

✍ **Zadatak 3.4** Odredite m i n tako da vektori $\vec{a} = m\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 2\vec{k},\ \vec{b} = 4\vec{\imath} + \vec{\jmath} + n\vec{k}$ budu kolinearni.

Rješenje $m = -8,\ n = -1$

✍ **Zadatak 3.5** Za zadane vrhove odredite vektore $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$. Koliko je $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ i $\sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$?

a) $A(5,5),\ B(3,-2),\ C(3,1),\ D(-2,4)$

b) $A(-1,3),\ B(0,-2),\ C(1,1),\ D(6,3)$

c) $A(1,5,1),\ B(1,1,-3),\ C(1,-1,3),\ D(1,2,3)$

d) $A(0,3,-1),\ B(3,2,-3),\ C(-1,3,3),\ D(5,8,0)$

Rješenje

a) $\overrightarrow{AB} = -2\vec{\imath} - 7\vec{\jmath},\ \overrightarrow{CD} = -5\vec{\imath} + 3\vec{\jmath},\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -11,\ \sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 1.83\,rad = 105.01°$

b) $\overrightarrow{AB} = \vec{\imath} - 5\vec{\jmath},\ \overrightarrow{CD} = 5\vec{\imath} + 2\vec{\jmath},\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -5,\ \sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 1.75\,rad = 100.5°$

c) $\overrightarrow{AB} = -4\vec{\jmath} - 4\vec{k},\ \overrightarrow{CD} = 3\vec{\jmath},\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -12,\ \sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 2.36\,rad = 135°$

d) $\overrightarrow{AB} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath} - 2\vec{k},\ \overrightarrow{CD} = 6\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} - 3\vec{k},\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 19,\ \sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0.92\,rad = 52.6°$

Zadatak 3.6 Odredite stranice i kuteve trokuta s vrhovima $A(-1,2,3)$, $B(4,2,3)$, $C(2,3,1)$.
Rješenje $a=5,\ b=\sqrt{14},\ c=3,\ \alpha=36.7^\circ,\ \beta=48.2^\circ,\ \gamma=95.1^\circ.$

Zadatak 3.7 Odredite rezultantu sila $\vec{f_1}=-2\vec{\imath}-\vec{\jmath}+4\vec{k},\ \vec{f_2}=4\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k},\ \vec{f_3}=-\vec{\imath}+3\vec{\jmath}-\vec{k}$. Odredite intenzitet sile i kuteve što ih zatvara s koordinatnim osima.
Rješenje $\vec{R}=\vec{\imath}+3\vec{\jmath}+4\vec{k},\ |\vec{R}|=\sqrt{26},\ \sphericalangle(\vec{R},\vec{\imath})=78.7^\circ,\ \sphericalangle(\vec{R},\vec{\jmath})=53.96^\circ,\ \sphericalangle(\vec{R},\vec{k})=38.3^\circ$

Zadatak 3.8 Izračunajte $\left(3\vec{a}+2\vec{b}\right)\cdot\left(-\vec{a}+4\vec{b}\right)$ ako je $|\vec{a}|=1,\ \left|\vec{b}\right|=4$ i $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{6}$.
Rješenje $125+20\sqrt{3}$

Zadatak 3.9 Odredite kut između vektora $\vec{a}=\vec{m}-\vec{n}$ i $\vec{b}=\vec{m}+2\vec{n}$, ako je $|\vec{m}|=|\vec{n}|=3$ i $\sphericalangle(\vec{m},\vec{n})=\frac{2\pi}{3}$.
Rješenje $\dfrac{2\pi}{3}$

Zadatak 3.10 Izračunajte $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ako je $\vec{a}=2\vec{m}-\vec{n},\ \vec{b}=-\vec{m}+3\vec{n},\ |\vec{m}|=|\vec{n}|=2$ i $\sphericalangle(\vec{m},\vec{n})=\frac{\pi}{3}$.
Rješenje -6

Zadatak 3.11 Izračunajte $\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)^2$ ako je $|\vec{a}|=3,\ \left|\vec{b}\right|=2$ i $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})=\frac{2\pi}{3}$.
Rješenje 13

Zadatak 3.12 Odredite projekciju vektora $\vec{d}=4\vec{\imath}-\vec{\jmath}+2\vec{k}$ na ravninu okomitu na vektor $\vec{v}=3\vec{\imath}+5\vec{\jmath}+\vec{k}$.
Rješenje $\frac{113}{35}\vec{\imath}-\frac{16}{7}\vec{\jmath}+\frac{61}{35}\vec{k}$

Zadatak 3.13 Nađite vektor $\vec{a}$ duljine 15, koji je okomit na vektor $\vec{b}=3\vec{\imath}+4\vec{\jmath}$.
Rješenje $\vec{a}_1=12\vec{\imath}-9\vec{\jmath},\ \vec{a}_2=-12\vec{\imath}+9\vec{\jmath}$

Zadatak 3.14 Odredite vektorski produkt te površinu paralelograma razapetog tim vektorima

a) $\vec{a}=2\vec{\imath}-3\vec{\jmath},\ \vec{b}=3\vec{\imath}+5\vec{\jmath}$
b) $\vec{a}=4\vec{\imath}+7\vec{\jmath},\ \vec{b}=2\vec{\imath}+2\vec{\jmath}$
c) $\vec{a}=2\vec{\imath}+5\vec{\jmath}-3\vec{k},\ \vec{b}=3\vec{\imath}-\vec{\jmath}-3\vec{k}$
d) $\vec{a}=5\vec{\imath}+4\vec{\jmath}+3\vec{k},\ \vec{b}=\vec{\imath}+6\vec{k}$

Rješenje

a) $\vec{a}\times\vec{b}=19\vec{k},\ P=19$
b) $\vec{a}\times\vec{b}=-6\vec{k},\ P=6$
c) $\vec{a}\times\vec{b}=-18\vec{\imath}-3\vec{\jmath}-17\vec{k},\ P=\sqrt{622}$
d) $\vec{a}\times\vec{b}=24\vec{\imath}-27\vec{\jmath}-4\vec{k},\ P=\sqrt{1321}$

Zadatak 3.15 Za vektore $\vec{a}=2\vec{\imath}-3\vec{\jmath},\ \vec{b}=-\vec{\imath}+3\vec{\jmath},\ \vec{c}=-\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}$ odredite

a) $2\vec{a}\times3\vec{b}$
b) $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\times(\vec{c}-\vec{a})$
c) $(2\vec{a}-3\vec{c})\times\vec{b}$

Rješenje

a) $18\vec{k}$ *b)* $-6\vec{i}-3\vec{j}-6\vec{k}$ *c)* $9\vec{i}+3\vec{j}+12\vec{k}$

✍ **Zadatak 3.16** Izračunajte volumen paralelopipeda razapetog vektorima

$$\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k},\ \vec{b}=\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k},\ \vec{c}=-\vec{j}+3\vec{k}.$$

Rješenje 33

✍ **Zadatak 3.17** Izračunajte volumen prizme čiji su vrhovi

$$A(3,2,-1),\ B(1,2,-3),\ C(-1,4,3),\ A'(4,1,0).$$

Rješenje 8

✍ **Zadatak 3.18** Izračunajte volumen tetraedra s vrhovima

$$A(1,1,1),\ B(2,-1,0),\ C(3,-1,-1),\ D(1,1,3).$$

Izračunajte visinu povučenu iz vrha D na bazu ABC.

Rješenje $V=\dfrac{2}{3}$, $v=\sqrt{2}$

✍ **Zadatak 3.19** Izračunajte svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore linearnog operatora zadanog matricom:

a) $\begin{bmatrix}2&7\\4&5\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}7&6\\6&2\end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix}1&-2\\-2&1\end{bmatrix}$ g) $\begin{bmatrix}2&0&3\\2&2&2\\3&0&2\end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix}2&1\\0&5\end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix}1&8\\8&-11\end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix}1&-3\\-3&1\end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix}1&1&-1\\-1&3&-1\\-2&2&0\end{bmatrix}$

Rješenje

a) $\sigma(\lambda)=\{-2,9\}$, $\vec{v_1}=7\vec{i}-4\vec{j}$, $\vec{v_2}=\vec{i}+\vec{j}$

b) $\sigma(\lambda)=\{2,5\}$, $\vec{v_1}=\vec{i}$, $\vec{v_2}=\vec{i}+3\vec{j}$

c) $\sigma(\lambda)=\{-2,11\}$, $\vec{v_1}=2\vec{i}-3\vec{j}$, $\vec{v_2}=3\vec{i}+2\vec{j}$

d) $\sigma(\lambda)=\{-15,5\}$, $\vec{v_1}=\vec{i}-2\vec{j}$, $\vec{v_2}=2\vec{i}+\vec{j}$

e) $\sigma(\lambda)=\{-1,3\}$, $\vec{v_1}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{v_2}=-\vec{i}+\vec{j}$

f) $\sigma(\lambda)=\{-2,4\}$, $\vec{v_1}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{v_2}=-\vec{i}+\vec{j}$

g) $\sigma(\lambda)=\{-1,2,5\}$, $\vec{v_1}=-\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{v_2}=\vec{j}$, $\vec{v_3}=\vec{i}+\frac{4}{3}\vec{j}+\vec{k}$

h) $\sigma(\lambda)=\{0,2\}$ *($\lambda=2$ je dvostruka svojstvena vrijednost)*, $\vec{v_1}=\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{v_2}=-\vec{i}+\vec{k}$, $\vec{v_3}=\vec{i}+\vec{j}$

Poglavlje

Analitička geometrija

Uvod

- Pravac u ravnini
- Pravac u prostoru
- Ravnina u prostoru

4.1 Pravac u ravnini

Definicija 4.1. Udaljenost dvije točke

Za bilo koje dvije točke $T_1(x_1, y_1), T_2(x_2, y_2)$ *iz* $\mathbb{E}^2$ *usmjerena dužina* $[\overrightarrow{T_1T_2}]$ *ima koordinate*

$$\overrightarrow{T_1T_2} = (x_2 - x_1)\overrightarrow{i} + (y_2 - y_1)\overrightarrow{j}$$

Njihova udaljenost dana je formulom

$$d(T_1, T_2) = |\overrightarrow{T_1T_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

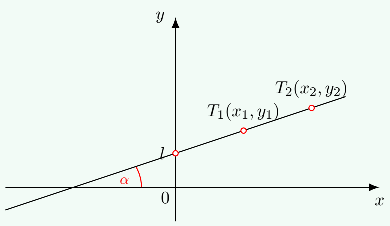
Slično vrijedi za točke $T_1(x_1, y_1, z_1), T_2(x_2, y_2, z_2)$ *iz* $\mathbb{E}^3$

$$\overrightarrow{T_1T_2} = (x_2 - x_1)\overrightarrow{i} + (y_2 - y_1)\overrightarrow{j} + (z_2 - z_1)\overrightarrow{k}$$

dok je njihova udaljenost određena njenom duljinom

$$d(T_1, T_2) = |\overrightarrow{T_1T_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Definicija 4.2. Pravac kroz dvije točke u ravnini



Neka su $T_1, T_2 \in \mathbb{E}^2$ *bilo koje točke, jednadžba pravca kroz te dvije točke dana je formulom*

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Jednadžbu oblika

$$y = kx + l$$

nazivamo ***eksplicitna*** *jednadžba pravca.*

- k *zovemo* ***koeficijent smjera*** *pravca, a određuje tangens kuta* ($k = \operatorname{tg}(\alpha)$) *što ga pravac zatvara s* x*-osi,*
- l *zovemo* ***odsječak*** *na osi* y*.*

Definicija 4.3. Oblici jednadžbe pravca

Neka je $T_0(x_0, y_0)$ bilo koja točka iz $\mathbb{E}^2$, jednadžba pravca kroz tu točku sa zadanim koeficijentom smjera k dana je formulom

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

Jednadžbu pravca oblika

$$Ax + By + C = 0$$

*nazivamo **implicitna** jednadžba pravca, a vektor*

$$\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j}$$

*nazivamo **vektor normale** pravca.*

Definicija 4.4. Kut između dva pravca

Kut između dva pravca je kut između njihovih vektora smjera, a određen je kutom između njihovih vektora normala. Neka su p, q dva pravca zadana jednadžbama

$$p \ldots A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$q \ldots A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

tada je kut između ta dva pravca određen

$$\cos\measuredangle(p, q) = \cos\measuredangle(\vec{n_p}, \vec{n_q}) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

U ravnini dva pravca p, q mogu biti:

- ***okomita**, ako je $\measuredangle(p, q) = \frac{\pi}{2}$,*
- ***paralelna**, ako je $\measuredangle(p, q) = 0$,*
- *ili se **sijeku** pod oštrim kutom $\measuredangle(p, q) \leq \frac{\pi}{2}$.*

Definicija 4.5. Odnos dva pravca u ravnini

Dva pravca su međusobno **okomita**, *ako je ispunjen **uvjet okomitosti** njihovih normala*

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

Dva pravca su **paralelna**, *ako je ispunjen **uvjet paralelnosti** njihovih normala*

$$A_1B_2 = B_1A_2$$

***Sjecište** dva pravca određeno je rješenjem sustava jednadžbi*

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y &= -C_1 \\ A_2x + B_2y &= -C_2 \end{aligned}$$

Za paralelne i različite pravce sustav **nema** *rješenje, dok za podudarne pravce sustav ima*

beskonačno *rješenja.*

Definicija 4.6. Udaljenost točke od pravca u ravnini

Neka je pravac p zadan jednadžbom

$$p \ldots Ax + By + C = 0$$

i neka je $T_0(x_0, y_0)$ bilo koja točka iz $\mathbb{E}^2$, tada je udaljenost točke T_0 od pravca p određena izrazom

$$d(T_0, p) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Primjer 4.1 Odredite eksplicitni oblik jednadžbe pravca koji prolazi točkama $T_1(1,2)$, $T_2(3,5)$.

Rješenje

$$y - 2 = \frac{5-2}{3-1} \cdot (x-1) \Longrightarrow y = \frac{3}{2} \cdot (x-1) + 2 \Longrightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

Primjer 4.2 Odredite vektor normale za pravac $y = 2x - 1$.

Rješenje

$$y = 2x - 1 \Longrightarrow -2x + y + 1 = 0 \Longrightarrow \vec{n} = -2\vec{i} + \vec{j}$$

Primjer 4.3 Odredite jednadžbu pravca kroz točku $T_0(2,3)$ s koeficijentom smjera $k = 2$.

Rješenje

$$y - 3 = 2 \cdot (x-2) \Longrightarrow y = 2x - 1$$

Primjer 4.4 Odredite kut između pravaca $x + 3 = 0$, $3x + 2y = 0$.

Rješenje

$$p \ldots x + 3 = 0 \Longrightarrow A_1 = 1, B_1 = 0$$

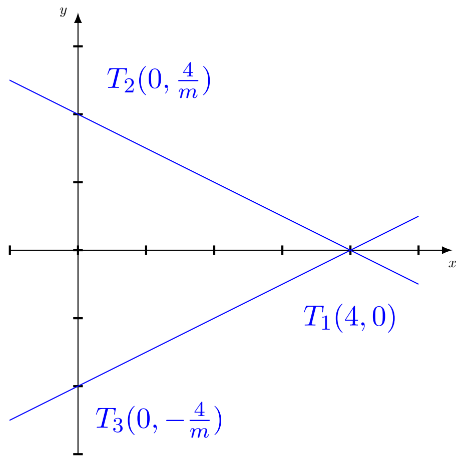
$$q \ldots 3x + 2y = 0 \Longrightarrow A_2 = 3, B_2 = 2$$

$$\cos \measuredangle(p,q) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = \frac{3+0}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{9+4}} = \frac{3}{\sqrt{13}} \Longrightarrow \measuredangle(p,q) = 33.69^\circ$$

Primjer 4.5 U jednadžbi $x + my - 4 = 0$ odredite m tako da duljina odsječka pravca između koordinatnih osi bude $2\sqrt{5}$.

Rješenje *Odredimo presjek pravca $x+my-4=0$ s koordinatnim osima:*

$$x=0 \Longrightarrow y=\frac{4}{m}, \qquad y=0 \Longrightarrow x=4$$



Udaljenost između dvije točke

$$T_1\left(x_1, y_1\right), T_2\left(x_2, y_2\right)$$

računamo po formuli:

$$|T_1T_2| = \sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$$

stoga za točke $T_1(4,0)$, $T_2(0,\frac{4}{m})$ iznosi

$$\begin{aligned}|T_1T_2| &= \sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2} \\ &= \sqrt{(4-0)^2+\left(0-\frac{4}{m}\right)^2} = 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow 16+\frac{16}{m^2}=20 \Longrightarrow \frac{16}{m^2}=4 \Longrightarrow 16=4m^2 \Longrightarrow m=\pm 2$$

te su jednadžbe pravaca: $x+2y-4=0,\ x-2y-4=0.$

Primjer 4.6 Kolika je udaljenost pravca $\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1$ od ishodišta koordinatnog sustava?

Rješenje *Neka je pravac p zadan jednadžbom $Ax+By+C=0$, i neka je $T_0(x_0,y_0)$ bilo koja točka iz $\mathbb{E}^2$. Tada je udaljenost točke T_0 od pravca p dana formulom*

$$d(T_0,p)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

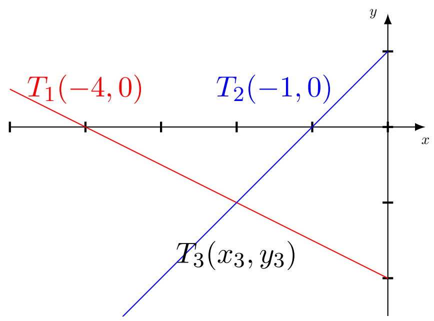
stoga udaljenost ishodišta od pravca p iznosi

$$\begin{aligned}&\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1 \Longrightarrow \frac{x}{3}-\frac{y}{4}-1=0 \Longrightarrow A=\frac{1}{3},\ B=\frac{-1}{4},\ C=-1 \\ &d(O,p)=\frac{|\frac{1}{3}\cdot 0-\frac{1}{4}\cdot 0-1|}{\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{16}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{25}{144}}}=\frac{12}{5}\end{aligned}$$

Primjer 4.7 Kolika je površina trokuta što ga s osi apscisa zatvaraju pravci

$$x+2y+4=0,\ x-y+1=0?$$

Rješenje



Površinu trokuta dobijemo iz
$$P = \frac{|T_1T_2| \cdot v}{2} = \frac{|T_1T_2| \cdot |y_3|}{2}$$
gdje je duljina dužine $|T_1T_2| = 3$.

Koordinate točke T_3 *dobit ćemo rješavanjem sustava:*
$$\begin{aligned} x + 2y &= -4 \\ x - y &= -1 \end{aligned}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3, \quad D_x = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 6, \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3$$
$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{6}{-3} = -2, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{3}{-3} = -1$$

Prema tome površina trokuta jednaka je:
$$P = \frac{|T_1T_2| \cdot |y_3|}{2} = \frac{3 \cdot 1}{2} = \frac{3}{2}$$

Primjer 4.8 Odredite jednadžu pravca koji prolazi točkom $T_0\,(-2,-3)$ i okomit je na vektor $\overrightarrow{MN}$, pri čemu su $M(-5,2)$ i $N(-1,4)$.

Rješenje
$$\begin{aligned} &p \ldots Ax + By + C = 0 \\ &T_0(-2,-3) \in p \Longrightarrow -2A - 3B + C = 0 \\ &\overrightarrow{MN} \perp p \Longrightarrow \overrightarrow{MN} = \vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} \\ &\overrightarrow{MN} = 4\vec{i} + 2\vec{j} = A\vec{i} + B\vec{j} \Longrightarrow A = 4, B = 2 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} &-2A - 3B + C = 0 \Longrightarrow -2 \cdot 4 - 3 \cdot 2 + C = 0 \Longrightarrow C = 14 \\ &p \ldots 4x + 2y + 14 = 0 \end{aligned}$$

Primjer 4.9 Odredite jednadžu pravca koji prolazi sjecištem pravaca $2x + 3y - 17 = 0$ i $x + y - 6 = 0$ i okomit je na vektor $\vec{n} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$.

Rješenje
$$\begin{aligned} 2x + 3y - 17 = 0 &\Longrightarrow 2x + 3y = 17 \\ x + y - 6 = 0 &\Longrightarrow x + y = 6 \end{aligned}$$
$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad D_x = \begin{vmatrix} 17 & 3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 17 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -5$$
$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-1}{-1} = 1, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-5}{-1} = 5$$

$$p \ldots Ax + By + C = 0$$

$$T_0\,(1,5) \in p \Longrightarrow A + 5B + C = 0$$

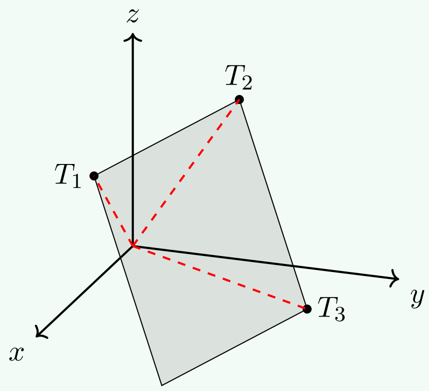
$$\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} = -3\vec{i} + 2\vec{j} \Longrightarrow A = -3, B = 2$$

$$A + 5B + C = 0 \Longrightarrow -3 + 5 \cdot 2 + C = 0 \Longrightarrow C = -7$$

$$p \ldots -3x + 2y - 7 = 0$$

4.2 Ravnina u prostoru

Definicija 4.7. Jednadžba ravnine kroz tri točke



Za $T_i(x_i, y_i, z_i)$ tri točke iz prostora koje nisu na istom pravcu jednadžba ravnine koju te točke jednoznačno određuju glasi:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Jednadžbu ravnine možemo zapisati u ekvivalentnom obliku: $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Definicija 4.8. Implicitna jednadžba ravnine

Opća ili implicitna jednadžba ravnine glasi

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Za ravninu zadanu općom jednadžbom, vektor

$$\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$$

nazivamo ***vektor normale*** *za ravninu.*

Neka je $T_0(x_0, y_0, z_0)$ bilo koja točka iz $\mathbb{E}^3$, jednadžba ravnine koja sadrži tu točku sa zadanim vektorom normale dana je izrazom

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Definicija 4.9. Odnos točke i ravnine

Neka je ravnina π zadana jednadžbom

$$\pi \ldots Ax + By + Cz + D = 0$$

te neka je $T_0(x_0, y_0, z_0)$ bilo koja točka iz $\mathbb{E}^3$, tada je udaljenost te točke od ravnine određena formulom

$$d(T_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Definicija 4.10. Odnos dvije ravnine

Kut između dvije ravnine je kut između njihovih vektora normala. Neka su π, ξ dvije ravnine zadane implicitno

$$\pi \dots A_1x + B_1y + C_1z = D_1$$
$$\xi \dots A_2x + B_2y + C_2z = D_2$$

tada je kut između njih određen formulom

$$\cos \measuredangle(\pi, \xi) = \cos \measuredangle(\overrightarrow{n_\pi}, \overrightarrow{n_\xi}) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Primjer 4.10 Napišite jednadžbu ravnine u kojoj leže točke $A(2,1,3)$, $B(1,1,3)$ i $C(0,2,1)$.

Rješenje *Jednadžbu ravnine određene s tri točke možemo zapisati u jednom od oblika*

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \textit{ili} \quad \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ 1-2 & 1-1 & 3-3 \\ 0-2 & 2-1 & 1-3 \end{vmatrix} = 0 \implies \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-2)\cdot(0-0) - (y-1)\cdot(2-0) + (z-3)\cdot(-1-0) = 0$$
$$-2y + 2 - z + 3 = 0 \implies -2y - z + 5 = 0$$

Primjer 4.11 Odredite udaljenost točke $T_0(2,1,3)$ od ravnine $2x + 3y - z + 6 = 0$.

Rješenje *Udaljenost točke T_0 od ravnine π dana je formulom*

$$d(T_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

te uvrštenjem vrijednosti za točku i ravninu dobijemo

$$d(T_0, \pi) = \frac{|2\cdot 2 + 3\cdot 1 - 1\cdot 3 + 6|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{14}}$$

Primjer 4.12 Odredite udaljenost točke $T(1,4,2)$ od ravnine zadane točkama

$$A(5,-3,3),\ B(0,2,1) \text{ i } C(4,2,-1).$$

Rješenje

$$\begin{vmatrix} x-5 & y+3 & z-3 \\ 0-5 & 2+3 & 1-3 \\ 4-5 & 2+3 & -1-3 \end{vmatrix} = 0 \implies \begin{vmatrix} x-5 & y+3 & z-3 \\ -5 & 5 & -2 \\ -1 & 5 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

odakle slijedi jednadžba ravnine

$$\pi \ldots 5x + 9y + 10z - 49 = 0.$$

Budući je udaljenost točke T_0 od ravnine π dana formulom

$$d(T_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

dobijemo za udaljenost točke T od ravnine π vrijednost

$$d(T, \pi) = \frac{|5 \cdot 1 + 9 \cdot 4 + 10 \cdot 2 - 49|}{\sqrt{5^2 + 9^2 + 10^2}} = \frac{12}{\sqrt{206}}$$

Primjer 4.13 Odredite jednadžbu ravnine koja sadrži točku $T_0(3, 1, 2)$ i koja je okomita na ravnine $2x + 3y - z + 2 = 0,\ -3z + y - 2z + 1 = 0.$

Rješenje *Jednadžba ravnine koja sadrži tu točku $T(x_0, y_0, z_0)$ i ima vektor normale*

$$\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$$

dana je formulom

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Tražimo jednadžbu ravnine $\pi \ldots Ax + By + Cy + D = 0$.

$$\pi \perp \pi_1 \ldots 2x + 3y - z + 2 = 0 \quad \Longrightarrow \vec{n} \perp \vec{n_1}$$

$$\pi \perp \pi_2 \ldots - 3z + y - 2z + 1 = 0 \Longrightarrow \vec{n} \perp \vec{n_2}$$

Prema tome njen vektor normale iznosi $\vec{n} = \vec{n_1} \times \vec{n_2}$.

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}(-6 + 1) - \vec{j}(-4 - 3) + \vec{k}(2 + 9) = -5\vec{i} + 7\vec{j} + 11\vec{k}$$

Jednadžba ravnine je:

$$\begin{aligned} A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) &= 0 \\ -5(x - 3) + 7(y - 1) + 11(z - 2) &= 0 \\ -5x + 15 + 7y - 7 + 11z - 22 &= 0 \\ -5x + 7y + 11z - 14 &= 0 \end{aligned}$$

Primjer 4.14 Odredite kut između ravnina

$$-4x + y - z + 1 = 0,\ -2x + 3y - 6z + 5 = 0.$$

Rješenje *Kut između ravnina*

$$\begin{aligned} \cos\measuredangle(\pi_1, \pi_2) &= \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \\ &= \frac{-4 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 - 1 \cdot (-6)}{\sqrt{16 + 1 + 1}\sqrt{4 + 9 + 36}} = \frac{17}{21\sqrt{2}} \Longrightarrow \measuredangle(\pi_1, \pi_2) = 55.08^\circ \end{aligned}$$

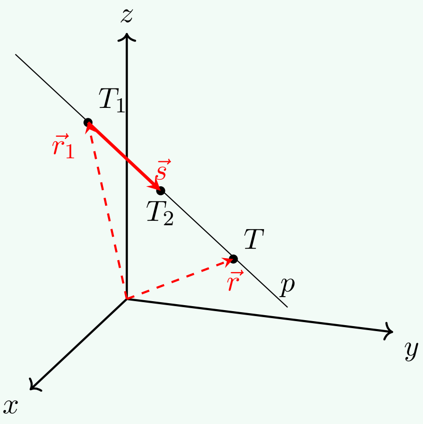
Primjer 4.15 U kojoj točki se sijeku ravnine

$$x + y + 3z - 1 = 0,\ x + y + z - 4 = 0 \text{ i } 2x + y + 4z + 5 = 0?$$

Rješenje *Točka* $T\left(-\frac{9}{2}, -5, -\frac{3}{2}\right)$ *jedinstveno je rješenje sustava.*

4.3 Pravac u prostoru

Definicija 4.11. Parametarska jednadžba pravca u prostoru



Neka je $\overrightarrow{s}$ vektor smjera pravca p, i $T_1(x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{E}^3$ jedna točka koja pripada tom pravcu, tada je s

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_1} + \lambda \overrightarrow{s}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

zadana ***parametarska jednadžba*** *pravca u vektorskom obliku.*

Iz parametarske jednadžbe pravca u vektorskom obliku izjednačavanjem po koordinatnim vektorima dobijemo ***parametarske jednadžbe*** *pravca u* ***skalarnom obliku****.*

Za bilo koje dvije točke $T_1(x_1, y_1, z_1), T_2(x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{E}^3$, i realan broj $\lambda \in \mathbb{R}$ sustavom

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + \lambda(y_2 - y_1) \\ z &= z_1 + \lambda(z_2 - z_1) \end{aligned}$$

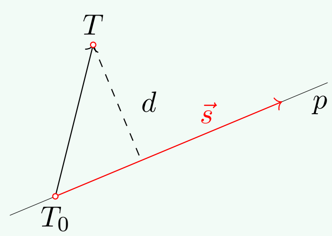
su zadane ***parametarske jednadžbe*** *pravca kroz dvije točke.*

Definicija 4.12. Kanonska jednadžba pravca u prostoru

Iz parametarskih jednadžbi pravca u sklaranom obliku eliminacijom parametra λ dobijemo ***kanonske jednadžbe pravca****. Neka su $T_1(x_1, y_1, z_1), T_2(x_2, y_2, z_2)$ bilo koje točke na pravcu p, tada su kanonske jednadžbe pravca*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Definicija 4.13. Udaljenost točke od pravca



Za pravac p kroz točku $T_0(x_0, y_0, z_0)$ s vektorom smjera $\overrightarrow{s} = A\overrightarrow{i} + B\overrightarrow{j} + C\overrightarrow{k}$ ***udaljenost točke*** *$T(x, y, z) \in \mathbb{E}^3$ od pravca dana je formulom*

$$d(T, p) = \frac{|\overrightarrow{T_0T} \times \overrightarrow{s}|}{|\overrightarrow{s}|}$$

$$d(T,p) = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ A & B & C \end{vmatrix} \right|$$

Napomena Odnos dva pravca

Dva pravca u prostoru mogu:

- *biti* ***paralelni****, tada su njihovi vektori smjera kolinearni,*
- *se* ***sjeći****, tada je njihova udaljenost* 0*,*
- *se* ***mimoilaziti****, tada je njihova udaljenost jednaka udaljenosti paralelenih ravnina koje ih sadrže.*

Napomena Udaljenost paralelnih pravaca

Ako su pravci paralelni, njihovu udaljenost možemo izračunati pomoću formule za udaljenost točke od pravca. Dovoljno je odabrati jednu točku s jednog prvaca i naći njenu udaljenost od drugog pravca.

Definicija 4.14. Kriterij paralelnosti dva pravca

Dva pravca p, q *zadana točkama* $T_p(x_p, y_p, z_p)$, $T_q(x_q, y_q, z_q)$ *i vektorima smjera*

$$\begin{aligned} \vec{s_p} &= a_p \vec{i} + b_p \vec{j} + c_p \vec{k} \\ \vec{s_q} &= a_q \vec{i} + b_q \vec{j} + c_q \vec{k} \end{aligned}$$

su paralelna samo ako su njihovi vektori smjera paralelni, tj.

$$\vec{s_p} \times \vec{s_q} = \vec{0}$$

Kriterij paralelnosti pravaca možemo zapisati pomoću determinante

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_p & b_p & c_p \\ a_q & b_q & c_q \end{vmatrix} = \vec{0}$$

Definicija 4.15. Sjecište dva pravca

Sjecište dva pravca p, q *zadana točkama* $T_p(x_p, y_p, z_p)$, $T_q(x_q, y_q, z_q)$ *i vektorima smjera*

$$\begin{aligned} \vec{s_p} &= a_p \vec{i} + b_p \vec{j} + c_p \vec{k} \\ \vec{s_q} &= a_q \vec{i} + b_q \vec{j} + c_q \vec{k} \end{aligned}$$

određujemo rješavanjem sustava jednadžbi s nepoznanicama λ, μ

$$\begin{aligned} x_p + \lambda a_p &= x_q + \mu a_q \\ y_p + \lambda b_p &= y_q + \mu b_q \\ z_p + \lambda c_p &= z_q + \mu c_q \end{aligned}$$

Napomena *Dovoljno je riješiti bilo koje* **dvije** *jednadžbe i provjeriti rješenje uvrštenjem u treću jednadžbu.*

Definicija 4.16. Udaljenost mimoilaznih pravaca

Udaljenost dva mimoilazna pravca p, q *zadana točkama* $T_p(x_p, y_p, z_p), T_q(x_q, y_q, z_q)$ *i vektorima smjera*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{s_p} &= a_p \overrightarrow{i} + b_p \overrightarrow{j} + c_p \overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{s_q} &= a_q \overrightarrow{i} + b_q \overrightarrow{j} + c_q \overrightarrow{k} \end{aligned}$$

određujemo pomoću formule

$$d(p,q) = \frac{|\overrightarrow{T_pT_q} \cdot (\overrightarrow{s_p} \times \overrightarrow{s_q})|}{|\overrightarrow{s_p} \times \overrightarrow{s_q}|}$$

Definicija 4.17. Kut između pravaca

Kut između dva pravca p, q *je kut između njihovih vektora smjera*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{s_p} &= a_p \overrightarrow{i} + b_p \overrightarrow{j} + c_p \overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{s_q} &= a_q \overrightarrow{i} + b_q \overrightarrow{j} + c_q \overrightarrow{k} \end{aligned}$$

te je određen formulom

$$\cos \measuredangle(\overrightarrow{s_p}, \overrightarrow{s_q}) = \frac{\overrightarrow{s_p} \cdot \overrightarrow{s_q}}{|\overrightarrow{s_p}||\overrightarrow{s_q}|}$$

- *ako su pravci* **paralelni***, onda vrijedi*

$$\frac{a_p}{a_q} = \frac{b_p}{b_q} = \frac{c_p}{c_q}$$

- *ako su pravci* **okomiti***, onda vrijedi*

$$a_p a_q + b_p b_q + c_p c_q = 0$$

Napomena *Pravac i ravnina u prostoru mogu*

- *biti* ***paralelni****, tada su vektor smjera pravca i vektor normale ravnine* ***okomiti****,*
- *biti* ***okomiti****, tada su vektor smjera pravca i vektor normale ravnine* ***kolinearni****,*
- *imati* ***zajedničku*** *točku koja se zove* ***probodište****, a kut između pravca i ravnine* ***komplementaran*** *je kutu između vektora smjera pravca i vektora normale ravnine.*

Definicija 4.18. Kriterij paralelnosti pravca i ravnine

Pravac p s vektorom smjera

$$\vec{s_p} = a_p \vec{i} + b_p \vec{j} + c_p \vec{k}$$

i ravnina π s vektorom normale

$$\vec{n_\pi} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$$

su **paralelni** *samo ako vrijedi*

$$\vec{s_p} \cdot \vec{n_\pi} = 0$$

tj. ako vrijedi

$$a_p A + b_p B + c_p C = 0$$

Definicija 4.19. Kriterij okomitosti pravca i ravnine

Pravac p s vektorom smjera

$$\vec{s_p} = a_p \vec{i} + b_p \vec{j} + c_p \vec{k}$$

i ravnina π s vektorom normale

$$\vec{n_\pi} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$$

su **okomiti** *samo ako vrijedi*

$$\vec{s_p} \times \vec{n_\pi} = \vec{0}$$

Kriterij okomitosti možemo zapisati pomoću determinante

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_p & b_p & c_p \\ A & B & C \end{vmatrix} = \vec{0}$$

Definicija 4.20. Kut i probodište pravca i ravnine

Neka je pravac p zadan točkom $T_0(x_0, y_0, z_0)$ i vektorom smjera

$$\vec{s_p} = a_p \vec{i} + b_p \vec{j} + c_p \vec{k}$$

a ravnina π implicitno,

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

tada je **kut** *između pravca i ravnine*

$$\sin \measuredangle(p, \pi) = \frac{a_p A + b_p B + c_p C}{\sqrt{a_p^2 + b_p^2 + c_p^2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Koordinate točke **probodišta** *$P(x, y, z)$ dobijemo određivanjem parametra λ iz jednadžbe*

$$A(x_0 + \lambda a_p) + B(y_0 + \lambda b_p) + C(z_0 + \lambda c_p) + D = 0$$

te uvrštenjem u parametarsku jednadžbu pravca

$$P(x_0+\lambda a_p, y_0+\lambda b_p, z_0+\lambda c_p)$$

Napomena *Dvije ravnine u prostoru*

- *su **paralelne**, ako su im vektori normala **kolinearni**,*
- *su **okomite**, ako su im vektori normala **okomiti**,*
- *se mogu **sjeći** u pravcu.*

Definicija 4.21. Odnos dviju ravnina

Dvije ravnine

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

su **paralelne** *samo ako vrijedi*

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

ili **okomite** *ako vrijedi*

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$$

Definicija 4.22. Kut i sjecište dviju ravnina

Neka su zadane dvije ravnine

$$\begin{aligned} \pi \ldots\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ \xi \ldots\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

tada je **kut** *između njih određen izrazom*

$$\cos\measuredangle(\pi,\xi)=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

Presjek dviju ravnina je skup rješenja sustava jednadžbi (4.1).

Primjer 4.16 Odredite parametarske i kanonske jednadžbe pravca kroz točku $T(1,2,-1)$ za koji je vektor smjera $\vec{s}=\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$.

Rješenje *Parametarske jednadžbe pravca kroz dvije točke se računa pomoću sustava:*

$$\begin{aligned} x &= x_1+\lambda(x_2-x_1) \\ y &= y_1+\lambda(y_2-y_1) \\ z &= z_1+\lambda(z_2-z_1) \end{aligned}$$

Budući da je zadan vektor smjera, možemo pisati:

$$x = x_1 + \lambda a_p = 1 + \lambda$$
$$y = y_1 + \lambda b_p = 2 + 3\lambda$$
$$z = z_1 + \lambda c_p = -1 - \lambda$$

Kanonska jednadžba pravca kroz dvije točke:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Također vrijedi: $a_p = x_2 - x_1$, $b_p = y_2 - y_1$, $c_p = z_2 - z_1$ *te je tražena kanonska jednadžba pravca:*

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{3} = \frac{z + 1}{-1}.$$

Primjer 4.17 Odredite udaljenost točke $T(8,5,4)$ od pravca

$$p \ldots \frac{x - 2}{2} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 3}{1}$$

Rješenje *Koristimo formulu* $d(T,p) = \dfrac{|\overrightarrow{T_0T} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}$

$$\overrightarrow{T_0T} = (8-2)\vec{i} + (5-1)\vec{j} + (4-3)\vec{k} = 6\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$$
$$|\vec{s}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$$
$$\overrightarrow{T_0T} \times \vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$$
$$|\overrightarrow{T_0T} \times \vec{s}| = \sqrt{36} = 6 \Longrightarrow d(T,p) = \frac{6}{3} = 2$$

Primjer 4.18 Odredite udaljenost dva pravca

$$p \ldots \frac{x - 2}{2} = \frac{y + 3}{-1} = \frac{z - 4}{2}, \quad q \ldots \frac{x - 7}{4} = \frac{y + 6}{-3} = \frac{z - 5}{5}$$

Rješenje *Koristimo formulu* $d(p,q) = \dfrac{|\overrightarrow{T_pT_q} \cdot (\vec{s_p} \times \vec{s_q})|}{|\vec{s_p} \times \vec{s_q}|}$, $\quad \overrightarrow{T_pT_q} = 5\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$

$$\overrightarrow{T_pT_q} \cdot (\vec{s_p} \times \vec{s_q}) = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 9, \quad \vec{s_p} \times \vec{s_q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$|\vec{s_p} \times \vec{s_q}| = \sqrt{9} = 3 \Longrightarrow d(p,q) = \frac{|9|}{3} = 3.$$

Primjer 4.19 Odredite parametarske jednadžbe pravca koji prolazi točkom $T(1,1,1)$ i okomit je na ravninu $2x + 2y - 3z + 1 = 0$.

Rješenje *Parametarske jednadžbe pravca*

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + \lambda(y_2 - y_1) \\ z &= z_1 + \lambda(z_2 - z_1) \end{aligned}$$

Kanonska jednadžba pravca

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Tražimo jednadžbe pravca p :

$$p \perp \pi \ldots 2x + 2y - 3z + 1 = 0 \Longrightarrow \vec{s} \perp \pi \Longrightarrow \vec{s} = \vec{n} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$$

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2\lambda \\ y &= 1 + 2\lambda \quad \textit{ili} \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-3} \\ z &= 1 - 3\lambda \end{aligned}$$

Primjer 4.20 Odredite udaljenost točke $T(1, 2, 4)$ od pravca $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{4}$.

Rješenje *Udaljenost točke T od pravca p dana je formulom*

$$d(T, p) = \frac{|\overrightarrow{T_0T} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}$$

Pravac $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{4}$ *sadrži točku* $T_0(0, 2, 3)$ *i vektor smjera* $\vec{s} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$

$$\overrightarrow{T_0T} \times \vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$d(T, p) = \frac{\sqrt{4+4+4}}{\sqrt{4+4+16}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Primjer 4.21 Odredite kut što ga pravac kroz točke $A(1, -3, 4)$, $B(7, 0, 2)$ zatvara s osi y.

Rješenje *Kut između dva pravca p, q je kut između njihovih vektora smjera*

$$\cos \measuredangle(\vec{s_p}, \vec{s_q}) = \frac{\vec{s_p} \cdot \vec{s_q}}{|\vec{s_p}||\vec{s_q}|}$$

$$\begin{aligned} p \ldots \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} &= \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \\ \frac{x-1}{7-1} &= \frac{y+3}{0+3} = \frac{z-4}{2-4} \\ \frac{x-1}{6} &= \frac{y+3}{3} = \frac{z-4}{-2} \Longrightarrow \vec{s_p} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k} \end{aligned}$$

Vektor smjera osi y je vektor $\vec{j}$.

$$\cos\measuredangle(\vec{s_p},\vec{s_y}) = \frac{\vec{s_p}\cdot\vec{j}}{|\vec{s_p}||\vec{j}|} = \frac{0+3+0}{\sqrt{36+9+4}\cdot 1} = \frac{3}{7} \Longrightarrow \measuredangle(\vec{s_p},\vec{s_y}) = 64.62^\circ$$

Primjer 4.22 Odredite kut što ga pravac $x=-1+2\lambda$, $y=-4+3\lambda$, $z=2-\lambda$ zatvara s ravninom $4x+2y-z+1=0$.

Rješenje *Kut između pravca i ravnine* $\sin\measuredangle(p,\pi) = \dfrac{a_pA+b_pB+c_pC}{\sqrt{a_p^2+b_p^2+c_p^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ *Zadani pravac je određen točkom* $T(-1,-4,2)$ *i vektorom smjera* $\vec{s_p}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$.

$$\sin\measuredangle(p,\pi) = \frac{2\cdot 4+3\cdot 2-1\cdot(-1)}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}\sqrt{4^2+2^2+1^2}} = \frac{15}{7\sqrt{6}} \Longrightarrow \measuredangle(p,\pi) = 61.045^\circ$$

Primjer 4.23 Odredite probodište pravca, po kojem se sijeku ravnine $x+y-z+1=0$ i $2x-y+2z+4=0$, s ravninom $2x+3y-4z+2=0$.

Rješenje *Odredimo jednadžbu pravca:*

$$x+y-z+1=0$$
$$2x-y+2z+4=0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & -1 \\ 2 & -1 & 2 & | & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & -3 & 4 & | & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & | & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & | & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & | & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \Longrightarrow x = -\frac{5}{3}-\frac{1}{3}z,\ y=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}z, \quad \in\mathbb{R}$$

Parametarske jednadžbe pravca:

$$x = -\frac{5}{3}-\frac{1}{3}\lambda$$
$$y = \frac{2}{3}+\frac{4}{3}\lambda$$
$$z=\lambda$$

Probodište pravca i ravnine je točka $T(x_0,y_0,z_0)$.

$$\begin{aligned} x_0 &= -\frac{5}{3}-\frac{1}{3}\lambda \\ T_0\in p \Longrightarrow y_0 &= \frac{2}{3}+\frac{4}{3}\lambda \\ z_0 &= \lambda \\ T_0\in\pi \Longrightarrow 2x_0&+3y_0-4z_0+2=0 \end{aligned}$$

$$2\left(-\frac{5}{3}-\frac{1}{3}\lambda\right)+3\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\lambda\right)-4(\lambda)+2=0$$
$$\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\lambda=0$$
$$\lambda=1$$

$$x_0=-\frac{5}{3}-\frac{1}{3}\cdot 1=-2$$
$$y_0=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\cdot 1=2$$
$$z_0=1$$

Dakle, točka $T(-2,2,1)$ je probodište pravca p s ravninom π.

Primjer 4.24 Odredite jednadžbu ravnine kroz točku $T(-1,2,1)$, koja ima vektor normale jednak vektoru smjera pravca kroz točke $A(2,3,4)$ i $B(-5,6,2)$.

Rješenje *Kanonska jednadžba pravca kroz dvije točke:*

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$
$$\frac{x-2}{-5-2}=\frac{y-3}{6-3}=\frac{z-4}{2-4}$$
$$\frac{x-2}{-7}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-4}{-2}\Longrightarrow \vec{s}=-7\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}=\vec{n}$$

Jednadžba ravnine koja sadrži tu točku $T(x_0,y_0,z_0)$ i ima vektor normale

$$\overrightarrow{n}=A\overrightarrow{i}+B\overrightarrow{j}+C\overrightarrow{k}$$

dana je formulom

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

$$-7(x+1)+3(y-2)-2(z-1)=0\Longrightarrow -7x+3y-2z-11=0$$

Primjer 4.25 Odredite jednadžbu ravnine koja prolazi sjecištem pravaca $x+y-6=0$ i $2x+3y-17=0$ i okomita je na vektor $\vec{n}=-3\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$.

Rješenje *Jednadžba ravnine koja sadrži tu točku $T(x_0,y_0,z_0)$ i ima vektor normale*

$$\overrightarrow{n}=A\overrightarrow{i}+B\overrightarrow{j}+C\overrightarrow{k}$$

dana je formulom

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Tražimo jednadžbu ravnine

$$\pi\ldots Ax+By+Cz+D=0.$$

Sjecište pravaca (pravci leže u xy ravnini, tj. $z = 0$):

$$2x + 3y = 17$$
$$x + y = 6 \Longrightarrow T(1, 5, 0)$$

Jednadžba ravnine je:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$
$$-3(x - 1) + 2(y - 5) + 3(z - 0) = 0$$
$$-3x + 3 + 2y - 10 + 3z = 0 \Longrightarrow -3x + 2y + 3z - 7 = 0$$

Primjer 4.26 Odredite jednadžbu ravnine koja sadrži pravac $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{1}$ i koja je okomita na ravninu $7x + y - 3z + 2 = 0$.

Rješenje *Pravac $p \ldots \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{1}$ je određen točkom $T(1, 2, 0)$ i vektorom smjera $\vec{s} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$.*

$$p \in \pi \quad \Longrightarrow T, \vec{s} \in \pi \qquad\qquad \Longrightarrow \vec{n} \perp \vec{s}$$
$$\pi \perp \pi_1 \ldots 7x + y - 3z + 2 = 0 \Longrightarrow \vec{n} \perp \vec{n_1}$$

Prema tome, $\vec{n} = \vec{s} \times \vec{n_1}$.

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & 1 \\ 7 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -13\vec{i} + 13\vec{j} - 26\vec{k}$$

Jednadžba ravnine je:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$
$$-13(x - 1) + 13(y - 2) - 26(z - 0) = 0$$
$$-13x + 13 + 13y - 26 - 26z = 0$$
$$-13x + 13y - 26z - 13 = 0 \quad \Big/ : (-13)$$
$$x - y + 2z + 1 = 0$$

4.4 Zadaci za vježbu

✍ **Zadatak 4.1** Odredite udaljenost pravca $2x + 3y - 1 = 0$ od točke $T(1, 2)$.

Rješenje $\dfrac{7\sqrt{13}}{13}$

✍ **Zadatak 4.2** Odredite jednadžbu pravca koji prolazi točkom $(1, 3)$ i okomit je na vektor $\vec{a} = \vec{i} - 4\vec{j}$.

Rješenje $x - 4y + 13 = 0$

✍ **Zadatak 4.3** Odredite jednadžu pravca koji prolazi sjecištem pravaca $-2x + y - 3 = 0$ i $2x - 5y - 1 = 0$ i okomit je na vektor $\vec{n} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$.

Rješenje $3x + 4y + 10 = 0$

✍ **Zadatak 4.4** Odredite jednadžbu ravnine u kojoj leže točke

a) $A(0, 1, -3),\ B(-1, 1, 2),\ C(1, 1, 1)$

b) $A(3, 4, 3),\ B(1, 0, 3),\ C(2, 2, 1)$

c) $A(-2, 1, 4),\ B(2, 1, -3),\ C(0, 2, 0)$

Rješenje

a) $9y - 9 = 0$ *b)* $8x - 4y - 8 = 0$ *c)* $7x + 2y + 4z - 4 = 0$

✍ **Zadatak 4.5** Odredite udaljenost točke od ravnine

a) $T(0, 1, -3), 2x + 3y - z - 1 = 0$

b) $T(1, 1, -2), x - 3y + 2z - 1 = 0$

c) $T(-1, 2, 3), 4x - y + 3z + 2 = 0$

Rješenje

a) $\frac{5\sqrt{14}}{14}$ *b)* $\frac{\sqrt{14}}{2}$ *c)* $\frac{5\sqrt{26}}{26}$

✍ **Zadatak 4.6** Odredite udaljenost točke $T(1, -1, 2)$ od ravnine zadane točkama

$$A(1, -3, -3),\ B(2, 2, 3),\ C(5, 2, 6).$$

Rješenje $\sqrt{3}$

✍ **Zadatak 4.7** Odredite udaljenost točke $T(2, 0, 2)$ od ravnine koja sadrži točku $T_0(1, -3, 0)$ i pravac $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-2}{1}$.

Rješenje $\dfrac{19\sqrt{661}}{661}$

✍ **Zadatak 4.8** Odredite jednadžbu ravnine koja sadrži točku $T(-3, 0, 2)$ i okomita je na ravnine $x + 5y - z = 0,\ -3x + y - z + 1 = 0$.

Rješenje $-4x + 4y + 16z - 44 = 0$

✍ **Zadatak 4.9** Odredite jednadžbu ravnine koja sadrži pravac $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1}$ i okomita je na ravninu $4x + y - 5z + 3 = 0$.

Rješenje $4x + 19y + 7z - 20 = 0$

✍ **Zadatak 4.10** Odredite jednadžbu ravnine koja sadrži pravac $\frac{x}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{4}$ i točku $T(2, -3, 0)$.

Rješenje $4x + 8y - z + 16 = 0$

✍ **Zadatak 4.11** Odredite kanonski oblik jednadžbe pravca koji prolazi točkom $T(-1, 4, 1)$ i okomit je na ravninu $-x + 3y + 2z + 1 = 0$.

Rješenje $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-1}{2}$

✍ **Zadatak 4.12** Odredite udaljenost točke $T(-1, 3, 0)$ od pravca $\frac{x+2}{-2} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{-1}$.

Rješenje $\sqrt{2}$

✍ **Zadatak 4.13** Odredite jednadžbu ravnine kroz točku $T(0, -2, 1)$, koja ima vektor normale jednak vektoru smjera pravca kroz točke $A(1, 5, 1)$, $B(-2, 4, 3)$.

Rješenje $3x + y - 2z + 4 = 0$

✍ **Zadatak 4.14** Odredite kut što ga pravac kroz točke $A(2, 3, -4)$, $B(8, 5, 3)$ zatvara s osi z.

Rješenje $32.57°$

✍ **Zadatak 4.15** Odredite kut što ga pravac $x = 2 + 3\lambda$, $y = 1 + 2\lambda$, $z = -\lambda$ zatvara s ravninom $5x + 7y - z + 3 = 0$.

Rješenje $67.79°$

✍ **Zadatak 4.16** Odredite kut između ravnina:

a) $3x + y - 3z + 1 = 0, \; -6x + 3y - 4z + 1 = 0$

b) $-x + 2y - 3z + 1 = 0, \; -4x - y - 2z + 1 = 0$

c) $-x + y - 5z + 6 = 0, \; 7x - 3y - 5z = 0$

Rješenje

a) $95.06°$ *b)* $62.22°$ *c)* $71.53°$

✍ **Zadatak 4.17** Odredite probodište pravca i ravnine:

a) $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-2}, \; -x + 3y + z + 1 = 0$

b) $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+5}{-2}, \; -2x + 5y + z = 0$

c) $\frac{x-3}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+4}{1}, \; 5x + y + z + 3 = 0$

Rješenje

a) $P\left(-\frac{4}{3},-\frac{5}{3},\frac{8}{3}\right)$ *b)* $P\left(-3,-\frac{1}{3},-\frac{13}{3}\right)$ *c)* $P\left(-\frac{1}{2},\frac{7}{4},-\frac{9}{4}\right)$

✍ **Zadatak 4.18** Odredite udaljenost između pravaca:

a) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{1},\ \frac{x+2}{-1}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-2}{2}$

b) $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-2}{1},\ \frac{x-5}{-1}=\frac{y+4}{-4}=\frac{z}{2}$

c) $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{1},\ \frac{x+2}{-1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+3}{-1}$

Rješenje

a) $\frac{37\sqrt{6}}{30}$ *b)* $\frac{9\sqrt{6}}{10}$ *c)* $\frac{\sqrt{3}}{3}$

✍ **Zadatak 4.19** Nađite kanonski oblik jednadžbe pravca određenog presjekom ravnina:

a) $3x+2y-3z+1=0,\ 4x+2y+2z-3=0$

b) $x+2y-5z+1=0,\ x-y+2z-3=0$

c) $2x+2y-5z=0,\ -x+2y+3z-1=0$

Rješenje

a) $\frac{x-4}{-5}=\frac{y+\frac{13}{2}}{9}=\frac{z}{1}$ *b)* $\frac{x-\frac{5}{3}}{\frac{1}{3}}=\frac{y+\frac{4}{3}}{\frac{7}{3}}=\frac{z}{1}$ *c)* $\frac{x+\frac{1}{3}}{\frac{8}{3}}=\frac{y-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{6}}=\frac{z}{1}$

Poglavlje

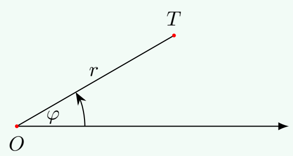
Polarni koordinatni sustav i kompleksni brojevi

Uvod

- *Polarni koordinatni sustav*
- *Kompleksni brojevi*

5.1 Polarni koordinatni sustav

Definicija 5.1. Polarne koordinate

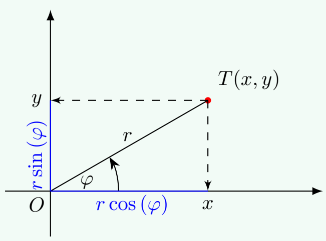


Polarne koordinate točke $T \in \mathbb{E}^2$ određene su

- *r duljinom spojnice iz ishodišta O do točke T,*
- *φ kutom spojnice spram horizontalnog položaja polarne osi.*

Dogovorno, za točku ishodišta polarnog sustava uzimamo vrijednost $O(0,0)$, te ju nazivamo **polom** *koordinatnog sustava.*

Definicija 5.2. Pretvorba polarnih koordinata u pravokutne



Pravokutne koordinate točke jednostavno dobijemo iz polarnih koordinata $T(r,\varphi)$ primjenom odnosa između kateta i hipotenuze (spojnica $\overline{OT}$) pravokutnog trokuta

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\varphi) \\ y &= r\sin(\varphi) \end{aligned} \tag{5.1}$$

Zbog periodičnosti trigonometrijskih funkcija uzimamo vrijednost $\varphi \in [0, 2\pi]$ za kut kod polarnih koordinata točke.

Definicija 5.3. Pretvorba pravokutnih koordinata u polarne

Iz jednadžbi 5.1 kvadriranjem i zbrajanjem slijedi

$$r^2 = x^2 + y^2 \implies r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{5.2}$$

dok dijeljenjem druge jednadžbe s prvom dobijemo

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{y}{x} \implies \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{5.3}$$

Budući za točke $T(x, y)$, $T'(-x, -y)$ vrijedi

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{arctg}\left(\frac{-y}{-x}\right) &= \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \\ \sqrt{(-x)^2 + (-y)^2} &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}\right\} \implies T'(r, \varphi) = T(r, \varphi)$$

tj. pretvorba pravokutnih u polarne koordinate **nije** *jednoznačna.*

Napomena *Zbog periodičnosti funkcije tangens potrebno je korigirati kut φ nakon njegovog određivanja iz jednadžbe (5.3), tj. potrebno je dodati odgovarajući pomak ukoliko točka nije u prvom kvadrantu pravokutnog sustava. Vrijedi slijedeća tablica za vrijednost kuta φ kod pretvorbe u polarne koordinate:*

(x, y)	φ
$(+, +)$	$\operatorname{arctg}\left\lvert\frac{y}{x}\right\rvert$
$(-, +)$	$\pi - \operatorname{arctg}\left\lvert\frac{y}{x}\right\rvert$
$(-, -)$	$\pi + \operatorname{arctg}\left\lvert\frac{y}{x}\right\rvert$
$(+, -)$	$2\pi - \operatorname{arctg}\left\lvert\frac{y}{x}\right\rvert$

Tablica 5.1: Tablica za vrijednost kuta φ

Primjer 5.1 Odredite pravokutne koordinate točke $T(x, y)$ ako su njene polarne koordinate zadane s $T\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$.

Rješenje *Primjenom jednadžbi za konverziju (5.1) na zadanim polarnim koordinatama točke*

$$r = 2,\ \varphi = \frac{\pi}{6}$$

dobijemo

$$\begin{aligned} x &= 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \\ y &= 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

prema tome, pravokutne koordinate točke su $T\left(\sqrt{3}, 1\right)$.

Primjer 5.2 Odredite polarne koordinate točke $T(r, \varphi)$ ako su njene pravokutne koordinate zadane s $T(-\sqrt{3}, -1)$.

Rješenje *Primjenom formule (5.2) slijedi*

$$r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2)} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2.$$

Budući je točka T u trećem kvadrantu, za jednadžbu (5.3) koristimo treći redak iz tablice (5.1), tj. vrijedi

$$\varphi = \pi + \operatorname{arctg}\left|\frac{-1}{-\sqrt{3}}\right| = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

Prema tome, polarne koordinate točke $T(-\sqrt{3}, -1)$ iznose $T(r, \varphi) = T\left(2, \frac{7\pi}{6}\right)$

Definicija 5.4. Polarni graf

U polarnom sustavu graf funkcije definiramo točkama koje zadovoljavaju jednadžbu

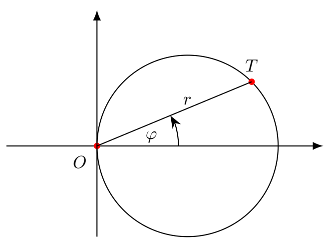
$$r = f(\varphi), \quad \varphi \in [0, \infty\rangle \tag{5.4}$$

Tako definiran graf funkcije, skraćeno ćemo nazivati **polarnim grafom** *funkcije f.*

Napomena *Uočimo kako u jednadžbi (5.4) funkcija $f(\varphi)$ može poprimiti negativne vrijednosti što bi imalo značenje* **negativne** *udaljenosti od ishodišta polarnog koordinatnog sustava. Zbog toga za udaljenost od ishodišta* **uvijek** *uzimamo $r > 0$, ali za crtanje polarnog grafa funkcije* **dopuštamo** *negativnu vrijednost za r.*

Primjer 5.3 Nacrtajte polarni graf funkcije $r = \cos(\varphi)$, $\varphi \in [0, \infty\rangle$.

Rješenje *Za vrijednost kuta $\varphi \in [0, 2\pi]$ točka T na polarnom grafu funkcije $r = \cos(\varphi)$* **dvaput** *opisuje istu kružnicu.*



Jedan obilazak je za $\varphi \in [0, \pi]$, dok je drugi obilazak za $\varphi \in [\pi, 2\pi]$. Drugi obilazak kružnice je **negativno** *orijentiran, tj. točka T putuje po grafu kao kazaljka na satu. Da se zaista radi o kružnici možemo vidjeti iz izvoda analitičkog zapisa funkcije u pravokutnim kooordinatama. Zapis funkcije u pravokutnim koordinatama dobijemo množenjem polarnog zapisa funkcije $r = \cos(\varphi)$ s r te primjenom formula (5.1) i (5.2)*

$$r = \cos(\varphi) \;/\cdot r \implies r^2 = r\cos(\varphi) \implies x^2 + y^2 = x,$$

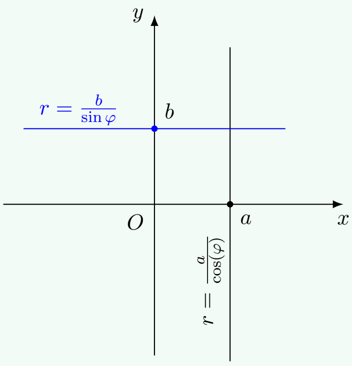
sređivanjem dobijemo

$$x^2 - x + y^2 = 0 \Longrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + y^2 = 0 \Longrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Odavde vidimo kako se radi o kružnici polumjera $r = \frac{1}{2}$ *sa središtem u točki* $S\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Definicija 5.5. Pravci u polarnom zapisu

Polarni zapis linearne funkcije dobijemo primjenom jednadžbi (5.1).



Horizontalni pravac $y = b$ *dobijemo iz jednadžbe*

$$b = r\sin(\varphi) \implies r = \frac{b}{\sin(\varphi)}$$

dok nam vertikalni pravac $x = a$ *slijedi iz jednadžbe*

$$a = r\cos(\varphi) \implies r = \frac{a}{\cos(\varphi)}$$

Polarni zapis linearne funkcije $y = kx + l$ *dobijemo na sličan način*

$$r = \frac{l}{\sin(\varphi) - k\cos(\varphi)}$$

Definicija 5.6. Simetrije u polarnom koordinatnom sustavu

Općenito, simetriju grafa funkcije $r = f(\varphi)$ *u polarnom sustavu možemo prepoznati na tri načina:*

1. *graf funkcije je simetričan u odnosu na* **polarnu** *os, ako je funkcija* f **parna**, *tj. vrijedi*

$$f(\varphi) = f(-\varphi),$$

2. *graf je simetričan u odnosu prema* **vertikalnom** *položaju polarne osi* $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$ *ako vrijedi*

$$f(\varphi) = f(\pi - \varphi)$$

3. *graf je simetričan u odnosu na ishodište sustava ako vrijedi*

$$r = \pm f(\varphi),$$

ili vrijedi

$$f(\varphi) = f(\pi + \varphi).$$

Definicija 5.7. Horizontalna simetrija

Krivulja je simetrična u odnosu na **polarnu** *os ukoliko za svaku točku* $T(r, \varphi)$ *na grafu nalazimo njezinu simetričnu točku* $T'(r, -\varphi)$.

Definicija 5.8. Vertikalna simetrija

Krivulja je simetrična u odnosu na **okomiti** *položaj polarne osi, ukoliko za svaku točku $T(r, \varphi)$ na grafu nalazimo njezinu simetričnu točku $T'(r, \pi - \varphi)$.*

Definicija 5.9. Centralna simetrija

Krivulja je simetrična u odnosu na **ishodište** *ukoliko za svaku točku $T(r, \varphi)$ na grafu nalazimo njezinu simetričnu točku $T'(-r, \varphi)$, tj. ako vrijedi $f(\varphi) = f(\pi + \varphi)$.*

Napomena *Crtanje grafa funkcije $f(r, \varphi)$ u polarnom zapisu provodimo u nekoliko koraka*

1. *odredimo simetrije za funkciju,*
2. *odredimo interval za φ uzimajući u obzir simetrije ako ih ima,*
3. *formiramo tablicu s vrijednostima za r za nekoliko karakterističnih vrijednosti od φ,*
4. *označimo točke (r, φ) u polarnom koordinatnom sustavu,*
5. *točke povežemo linijama.*

Primjer 5.4 Nacrtajte graf funkcije $r = 1 + \cos(\varphi)$.

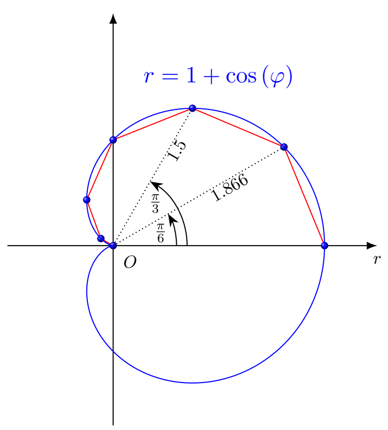
Rješenje *Funkcija je simetrična u odnosu na polarnu os zbog*

$$f(r, -\varphi) = 1 + \cos(-\varphi) = 1 + \cos(\varphi) = f(r, \varphi)$$

odakle slijedi da je dovoljno uzeti interval za $\varphi = [0, \pi]$. Formiramo tablicu vrijednosti za r s korakom $\Delta\varphi = \frac{\pi}{6}$

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	2	1.866	1.5	1	0.5	0.134	0

U polarnom koordinatnom sustavu označimo izračunate točke za kut φ i udaljenost r od ishodišta polarnog koordinatnog sustava. Označene točke povežemo ravnim linijama čime dobijemo konture grafa funkcije.



Definicija 5.10. Čunjosječnice u polarnom zapisu

Oblik čunjosječnice u polarnom koordinatnom sustavu

$$r = \frac{D}{1 \pm e\cos(\varphi)}, \quad e \geq 0, D \in \mathbb{R} \tag{5.5}$$

ovisi o vrijednosti ekscentriciteta e na slijedeći način

$$e = \begin{cases} = 0, & \textit{kružnica} \\ 0 < e < 1, & \textit{elipsa} \\ = 1, & \textit{parabola} \\ > 1, & \textit{hiperbola} \end{cases}$$

Ukoliko je glavna os čunjosječnice okomita na polarnu os, tada jednadžba (5.5) poprima slijedeći oblik

$$r = \frac{D}{1 \pm e\sin(\varphi)}, \quad e \geq 0, D \in \mathbb{R} \tag{5.6}$$

Parametar $D \in \mathbb{R}$ određuje polumjer za kružnicu, ili pravac **direktrise** *ukoliko se radi o elipsi, paraboli ili hiperboli. Pravac direktrise za elipsu, parabolu i hiperbolu u (5.5) je određen jednadžbom*

$$x = \pm\frac{D}{e}, \quad e > 0$$

dok je u jednadžbi (5.6) određen s

$$y = \pm\frac{D}{e}, \quad e > 0$$

Primjer 5.5 Odredite oblik čunjosječnice $r = \dfrac{6}{3 + 2\sin(\varphi)}$, njezinu direktrisu i ekscentricitet.

Rješenje *U nazivniku je funkcija* sin, *prema tome prevodimo u oblik čunjosječnice s glavnom osi okomitom na polarnu os*

$$r = \frac{6}{3 + 2\sin(\varphi)} \cdot \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{6 \cdot \frac{1}{3}}{3 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3}\sin(\varphi)} = \frac{\mathbf{2}}{1 + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\sin(\varphi)}$$

Budući je ekscentricitet

$$e = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} < 1$$

radi se o elipsi. Iz jednadžbe čunjosječnice slijedi $D = \mathbf{2}$, stoga je direktrisa pravac

$$y = \frac{D}{e} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3$$

5.2 Kompleksni brojevi

Definicija 5.11. Kompleksni broj

Standardnim zapisom *kompleksnog broja nazivamo brojeve oblika*

$$z_r + iz_i, \qquad z_r, z_i \in \mathbb{R}$$

U standardnom zapisu

- z_r *nazivamo realnim dijelom,*
- z_i *imaginarnim dijelom kompleksnog broja.*

Kompleksni broj za koji vrijedi $i^2 = i \cdot i = -1$ *nazivamo* **imaginarnom jedinicom**.

Definicija 5.12. Skup kompleksnih brojeva

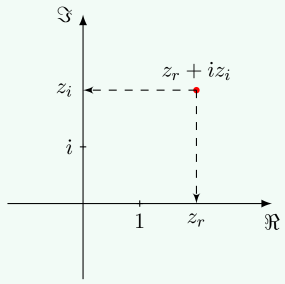
Skup svih brojeva u standardnom zapisu

$$\mathbb{C} = \{z_r + iz_i \colon z_r, z_i \in \mathbb{R}\}$$

nazivamo skupom kompleksnih brojeva.

Definicija 5.13. Kompleksna ravnina

Ravnina u kojoj realni dio kompleksnog broja označavamo na horizontalnoj osi, a imaginarni dio na okomitoj osi se naziva **kompleksna ravnina**. *U kompleksnoj ravnini horizontalnu (realnu) os označavamo s* $\Re$ *(alternativno: Re ili samo* x*), a vertikalnu (imaginarnu) os označavamo s* $\Im$ *(alternativno:* Im *ili samo* iy*).*



Napomena *Alternativno kompleksnu ravninu nazivamo Gaussova ravnina.*

Definicija 5.14. Konjugiranje kompleksnih brojeva

Za svaki kompleksni broj $z \in \mathbb{C}$, *njegov kompleksno konjugirani broj u oznaci* $\overline{z}$ *određujemo na slijedeći način*

$$\overline{z} = \overline{z_r + iz_i} = z_r - iz_i$$

Napomena *Za kompleksne brojeve konjugiranje ima geometrijsko značenje simetrije u odnosu na realnu os u kompleksnoj ravnini. Kod množenja vrijedi*

$$z\overline{z} = z_r^2 + z_i^2$$

Definicija 5.15. Algebarske operacije s kompleksnim brojevima

Za svaka dva kompleksna broja $z = z_r + iz_i,\ w = w_r + iw_i$ *vrijedi*

$$z \pm w = (z_r + iz_i) \pm (w_r + iw_i) = (z_r \pm w_r) + i(z_i \pm w_i)$$

$$z \cdot w = (z_r + iz_i) \cdot (w_r + iw_i) = (z_r w_r - z_i w_i) + i(z_r w_i + z_i w_r)$$

$$\frac{z}{w} = \frac{z}{w} \cdot \frac{\overline{w}}{\overline{w}} = \frac{z\overline{w}}{w\overline{w}} = \frac{z\overline{w}}{w_r^2 + w_i^2}$$

Definicija 5.16. Apsolutna vrijednost kompleksnog broja

Apsolutnu vrijednost kompleksnog broja računamo po formuli

$$|z| = \sqrt{z_r^2 + z_i^2}$$

iz koje slijedi

$$|z|^2 = z\overline{z}$$

Definicija 5.17. Trigonometrijski zapis

Definirajmo realni polupravac ($x \geq 0$) *kompleksne ravnine za polarnu os te uzmimo* φ *za kut spojnice ishodišta i točke* z *u odnosu na horizontalni položaj polarne osi.*

Tako dobivene polarne koordinate točke nazivamo **trigonometrijski** *ili* **polarni zapis** *kompleksnog broja, koje slijede iz formula za konverziju iz pravokutnih u polarne koordinate:*

$$z = z_r + iz_i = |z|\cos(\varphi) + i|z|\sin(\varphi) = |z|\left(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\right)$$

Kut φ *nazivamo* **argumentom** *kompleksnog broja-*

Napomena *Za određivanje argumenta kompleksnog broja najprije računamo vrijednost*

$$\varphi_a = \operatorname{arctg}\left|\frac{z_i}{z_r}\right|$$

te pomoću nje odredimo argument kompleksnog broja prema tablici:

(z_r, z_i)	$(+,+)$	$(-,+)$	$(-,-)$	$(+,-)$
φ	φ_a	$\pi - \varphi_a$	$\pi + \varphi_a$	$2\pi - \varphi_a$

Argument $\varphi \in [0, 2\pi]$ *još zovemo i* **glavnim** *argumentom kompleksnog broja.*

Definicija 5.18. Operacije s kompleksnim brojevima u trigonometrijskom zapisu

Neka su dani kompleksni brojevi

$$z = |z|\left(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\right), \quad w = |w|\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)$$

u trigonometrijskom obliku.

1. *množenje*
$$z \cdot w = |z||w|\left(\cos(\varphi+\theta) + i\sin(\varphi+\theta)\right)$$
2. *dijeljenje*
$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}\left(\cos(\varphi-\theta) + i\sin(\varphi-\theta)\right)$$
3. *de Moivreova formula*
$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)), \quad n \in \mathbb{N}$$
4. *n-ti korijen*
$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right), \; k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Napomena *Za svaki kompleksni broj z, $n-$ ti korijeni ($\sqrt[n]{z}$) predstavljaju vrhove pravilnog n-terokuta upisanog u centralnu kružnicu polumjera $\sqrt[n]{|z|}$ u kompleksnoj ravnini.*

Napomena *Osnovna svojstva:*

1. $z + w = w + z$, *zbrajanje je komutativno* (**oduzimanje nije**)
2. $u + (w + z) = (u + w) + z$, *asocijativnost zbrajanja*
3. $z + 0 = (z_r + iz_i) + (0 + 0i) = z$, *nula ne utječe na zbrajanje*
4. $z + (-z) = (z_r + iz_i) + (-z_r - iz_i) = 0 + 0i = 0$,
5. $zw = wz$, *komutativnost množenja*
6. $u(wz) = (uw)z$, *asocijativnost množenja*
7. $u(w + z) = uw + uz$, *distributivnost za zbrajanje i množenje*
8. $wz = 0 \implies w = 0$ *ili* $z = 0$

Primjer 5.6 Izračunajte

a) $(2 + 3i) \cdot (-1 + i)$ b) $\dfrac{2 + 3i}{-1 + i}$

Rješenje

a) *Množimo "svaki sa svakim" te koristimo definiciju imaginarne jedinice:*

$$(2 + 3i) \cdot (-1 + i) = -2 + 2i - 3i + 3i^2 = -2 + 2i - 3i - 3 = 5 - i$$

b) Prema definiciji dijeljenja kompleksnih brojeva, slijedi:

$$\begin{aligned}\frac{2+3i}{-1+i} &= \frac{2+3i}{-1+i}\cdot\frac{-1-i}{-1-i} = \frac{(2+3i)\cdot(-1-i)}{1+1} = \frac{-2-2i-3i-3i^2}{2}\\ &= \frac{1-5i}{2} = \frac{1}{2}-\frac{5}{2}i\end{aligned}$$

Primjer 5.7 Izračunajte

a) $i\,(2-i)\,(3+4i)$ b) $2i+\frac{1+i}{2-i}+i\left(\overline{-1-3i}\right)$

Rješenje *Računamo po dijelovima prema pravilima za operacije s kompleksnim brojevima:*

a) $i\,(2-i)\,(3+4i)$

$$\begin{aligned}i\,(2-i)\,(3+4i) &= \left(2i-i^2\right)(3+4i) = (2i+1)\,(3+4i)\\ &= 3+4i+6i+8i^2 = -5+10i\end{aligned}$$

b) $2i+\frac{1+i}{2-i}+i\left(\overline{-1-3i}\right)$

$$\begin{aligned}2i+\frac{1+i}{2-i}+i\left(\overline{-1-3i}\right) &= 2i+\frac{1+i}{2-i}\cdot\frac{2+i}{2+i}+i\,(-1+3i)\\ &= 2i+\frac{2+3i+i^2}{4+1}-i+3i^2\\ &= 2i+\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i-i-3\\ &= -\frac{14}{5}+\frac{8}{5}i\end{aligned}$$

Primjer 5.8 Izračunajte

a) $Im\,[Re\,(1-2i)-i\cdot Im\,(1+i)-2i]$ b) $Re\left[(2-i)\,(1-3i)\,i^3\right]$

Rješenje *Traže se realni i imaginarni dio kompleksnog broja. Ponajprije je potrebno odrediti (izračunati) o kojem kompleksnom broju se radi, a tek onda izdvojiti traženi dio tog broja.*

a) $Im\,[Re\,(1-2i)-i\cdot Im\,(1+i)-2i]$

$$Im\,[Re\,(1-2i)-i\cdot Im\,(1+i)-2i] = Im\,[1-i\cdot 1-2i] = Im\,[1-3i] = -3$$

b) $Re\left[(2-i)\,(1-3i)\,i^3\right]$

$$\begin{aligned}Re\left[(2-i)\,(1-3i)\,i^3\right] &= Re\left[\left(2-6i-i+3i^2\right)\cdot(-i)\right] = Re\,[(-1-7i)\cdot(-i)]\\ &= Re\left[i+7i^2\right] = Re\,[i-7] = Re\,[-7+i] = -7\end{aligned}$$

Primjer 5.9 Kompleksni broj $z=-1+i$ prebacite u trigonometrijski oblik.

Rješenje *Za trigonometrijski oblik kompleksnog broja potrebna su nam dva podatka: modul ili apsolutna vrijednost $|z|$ te argument, odnosno kut φ:*

$$z = -1 + i \Longrightarrow |z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

obzirom da je realni dio negativan, a imaginarni pozitivan, iz tablice slijedi:

$$\varphi = \pi - \operatorname{arctg}|\frac{z_i}{z_r}| = \pi - \operatorname{arctg}\left|\frac{1}{-1}\right| = \pi - \operatorname{arctg}|1| = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$
$$\Longrightarrow z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

Primjer 5.10 Izračunajte

a) $2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \cdot \left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$

b) $2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) : 6\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$

Rješenje *Koristimo definicije operacija s kompleksnim brojevima u trigonometrijskom obliku:*

a)

$$2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \cdot 6\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$$
$$= 12\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{7\pi}{6}\right)\right) = 12\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$$
$$= 12\,(0 - i) = -12i$$

b)

$$2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) : 6\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$$
$$= \frac{2}{6}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{7\pi}{6}\right)\right) = \frac{1}{3}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{6}i$$

Primjer 5.11 Izračunajte

a) $(2-2i)^6$ b) $\left(-\sqrt{3}+i\right)^7$

Rješenje *Poradi jednostavnijeg računanja, broj zapisujemo u trigonometrijskom obliku, te primjenom de Moivreove formule* $z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$, *određujemo glavnu vrijednost argumenta i rješenje na kraju zapisujemo u algebarskom obliku:*

a) $(2-2i)^6$

$$z = 2 - 2i \Longrightarrow z = \sqrt{8}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$$
$$z^6 = \left(\sqrt{8}\right)^6\left(\cos\left(6\cdot\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(6\cdot\frac{5\pi}{4}\right)\right)$$
$$= \left(\sqrt{8}\right)^6\left(\cos\left(\frac{15\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{15\pi}{2}\right)\right)$$
$$= \left(\sqrt{8}\right)^6\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(\sqrt{8}\right)^6(0 - i) = -512i$$

b) $\left(-\sqrt{3}+i\right)^7$

$$\begin{aligned}
z &= -\sqrt{3}+i, \quad |z| = \sqrt{\sqrt{3}^2+1} = 2\\
\varphi &= \pi - \operatorname{arctg}\left|\frac{z_i}{z_r}\right| = \pi - \operatorname{arctg}\left|\frac{1}{-\sqrt{3}}\right| = \pi - \operatorname{arctg}\left|\frac{\sqrt{3}}{3}\right| = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}\\
z &= 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)\\
z^7 &= 2^7\left(\cos\left(7\cdot\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(7\cdot\frac{5\pi}{6}\right)\right)\\
&= 2^7\left(\cos\left(\frac{35\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{35\pi}{6}\right)\right)\\
&= 2^7\left(\cos\left(4\pi+\frac{11\pi}{6}\right) + i\sin\left(4\pi+\frac{11\pi}{6}\right)\right)\\
&= 2^7\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right)\\
&= 128\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 64\sqrt{3} - 64i
\end{aligned}$$

Primjer 5.12 Izračunajte $\left(\sqrt{3}+i\right)^{22}\cdot(1-i)^{15}$.

Rješenje

$$\begin{aligned}
z &= \sqrt{3}+i \Longrightarrow |z| = \sqrt{3+1} = 2,\ \varphi = \operatorname{arctg}\left|\frac{z_i}{z_r}\right| = \operatorname{arctg}\left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right| = \operatorname{arctg}\left|\frac{\sqrt{3}}{3}\right| = \frac{\pi}{6}\\
z &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\\
z^{22} &= 2^{22}\left(\cos\left(\frac{22\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{22\pi}{6}\right)\right) = 2^{22}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right)\\
&= 2^{22}\left(\cos\left(2\pi+\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(2\pi+\frac{5\pi}{3}\right)\right) = 2^{22}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)\\
w &= 1-i \Longrightarrow |w| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}\\
\varphi &= 2\pi - \operatorname{arctg}\left|\frac{w_i}{w_r}\right| = 2\pi - \operatorname{arctg}\left|\frac{-1}{1}\right| = 2\pi - \operatorname{arctg}|1| = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}\\
w &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)\\
w^{15} &= \sqrt{2}^{15}\left(\cos\left(\frac{15\cdot 7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{15\cdot 7\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}^{15}\left(\cos\left(\frac{105\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{105\pi}{4}\right)\right)\\
&= \sqrt{2}^{15}\left(\cos\left(26\pi+\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(26\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}^{15}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3}+i\right)^{22}\cdot(1-i)^{15} &= z^{22}\cdot w^{15}\\ &= 2^{22}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)\cdot\sqrt{2}^{15}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\\ &= 2^{22}\cdot 2^7\sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\right)\\ &= 2^{29}\sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{23\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{23\pi}{12}\right)\right)\end{aligned}$$

Primjer 5.13 Izračunajte

a) $\sqrt[3]{1-\sqrt{3}i}$ b) $\sqrt[4]{-i}$ c) $\sqrt[3]{-8}$

Rješenje *Prvi korak je kompleksni broj pod korijenom zapisati u trigonometrijskom obliku, a zatim upotrijebiti formulu za računanje n-tog korijena kompleksnog broja.*

a) $\sqrt[3]{1-\sqrt{3}i}$

$$z = 1-\sqrt{3}i \Longrightarrow |z| = \sqrt{1+\sqrt{3}^2} = 2$$

$$\varphi = 2\pi - \operatorname{arctg}\left|\frac{z_i}{z_r}\right| = 2\pi - \operatorname{arctg}\left|\frac{-\sqrt{3}}{1}\right| = 2\pi - \operatorname{arctg}\left|\sqrt{3}\right| = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

$$\Longrightarrow z = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)$$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{\frac{5\pi}{3}+2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{5\pi}{3}+2k\pi}{3}\right)\right), k=0,1,2$$

$$\begin{aligned}k=0 \Longrightarrow z_0 &= \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{\frac{5\pi}{3}}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{5\pi}{3}}{3}\right)\right)\\ &= \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{9}\right)\right)\\ k=1 \Longrightarrow z_1 &= \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{\frac{5\pi}{3}+2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{5\pi}{3}+2\pi}{3}\right)\right)\\ &= \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{9}\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{9}\right)\right)\\ k=2 \Longrightarrow z_2 &= \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{\frac{5\pi}{3}+4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{5\pi}{3}+4\pi}{3}\right)\right)\\ &= \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{17\pi}{9}\right)+i\sin\left(\frac{17\pi}{9}\right)\right)\end{aligned}$$

b) $\sqrt[4]{-i}$

$$\begin{aligned}
z &= -i \Longrightarrow |z| = \sqrt{1^2} = 1\\
\varphi &= 2\pi - \operatorname{arctg}\left|\frac{z_i}{z_r}\right| = 2\pi - \operatorname{arctg}\left|\frac{-1}{0}\right| = 2\pi - \operatorname{arctg}|\infty| = 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}\\
z &= 1\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\\
\sqrt[4]{z} &= \sqrt[4]{1}\left(\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{4}\right)\right), k = 0,1,2,3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k = 0 \Longrightarrow z_0 &= \cos\left(\frac{\frac{3\pi}{2}}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{2}}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + i\left(\sin\frac{3\pi}{8}\right)\\
k = 1 \Longrightarrow z_1 &= \cos\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)\\
k = 2 \Longrightarrow z_2 &= \cos\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+4\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+4\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{11\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{8}\right)\\
k = 3 \Longrightarrow z_3 &= \cos\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+6\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+6\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{15\pi}{8}\right) + i\left(\sin\frac{15\pi}{8}\right)
\end{aligned}$$

c) $\sqrt[3]{-8}$

$$\begin{aligned}
z &= -8 \Longrightarrow |z| = \sqrt{8^2} = 8\\
\varphi &= \pi - \operatorname{arctg}\left|\frac{z_i}{z_r}\right| = \pi - \operatorname{arctg}\left|\frac{0}{-8}\right| = \pi - \operatorname{arctg}|0| = \pi - 0 = \pi\\
z &= 8\left(\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right)\\
\sqrt[3]{z} &= \sqrt[3]{8}\left(\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)\right), k = 0,1,2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k = 0 \Longrightarrow z_0 &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\\
&= 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + \sqrt{3}i\\
k = 1 \Longrightarrow z_1 &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi+2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2\pi}{3}\right)\right)\\
&= 2\left(\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right) = -2\\
k = 2 \Longrightarrow z_2 &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi+4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+4\pi}{3}\right)\right)\\
&= 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 - \sqrt{3}i
\end{aligned}$$

Primjer 5.14 Odredite x i y tako da vrijedi

a) $x^2 - 5(x-1) + 4i = yi - 1$

b) $2xi + 3yi + 17 = 3x + 2y + 18i$

Rješenje

a) Dva kompleksna broja su jednaka ako su im jednaki realni i imaginarni dijelovi, stoga zadatak rješavamo izjednačavanjem odgovarajućih izraza s lijeve i desne strane jednakosti:

$$x^2 - 5(x-1) + 4i = yi - 1$$
$$x^2 - 5(x-1) = -1 \quad i \quad y = 4$$
$$x^2 - 5x + 5 + 1 = 0 \Longrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Longrightarrow x_1 = 3,\ x_2 = 2$$

b)

$$2xi + 3yi + 17 = 3x + 2y + 18i$$
$$17 = 3x + 2y \quad i \quad 2x + 3y = 18$$
$$\Longrightarrow x = 3,\ y = 4$$

Primjer 5.15 Riješite jednadžbu $|z+1| + 2i + \overline{z} = 0$.

Rješenje *Nepoznanica u ovoj jednadžbi je kompleksni broj z. Zapišimo ga u algebarskom obliku i iskoristimo definicije modula i kompleksno-konjugiranog broja:*

$$|z+1| + 2i + \overline{z} = 0$$
$$|x + yi + 1| + 2i + \overline{x + yi} = 0$$
$$|(x+1) + yi| + 2i + x - yi = 0$$
$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + 2i + x - yi = 0$$

izjednačimo realne i imaginarne dijelove s lijeve i desne strane

$$2 - y = 0 \Longrightarrow y = 2$$
$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + x = 0 \Longrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + 2^2} = -x$$
$$(x+1)^2 + 4 = x^2 \Longrightarrow x^2 + 2x + 1 + 4 = x^2$$
$$2x + 5 = 0 \Longrightarrow x = -\frac{5}{2}$$

konačno rješenje moramo zapisati u obliku broja z koji je bio nepoznanica u ovoj jednadžbi:

$$z = -\frac{5}{2} + 2i$$

Primjer 5.16 Riješite jednadžbu $z+|z|=2\left(\overline{z}+1\right)+2i$.

Rješenje

$$\begin{aligned}
z+|z| &= 2\left(\overline{z}+1\right)+2i \\
x+yi+|x+yi| &= 2\left(\overline{x+yi}+1\right)+2i \\
x+yi+\sqrt{x^2+y^2} &= 2\left(x-yi+1\right)+2i \\
x+yi+\sqrt{x^2+y^2} &= 2x-2yi+2+2i \\
y &= -2y+2 \Longrightarrow y=\frac{3}{2} \\
x+\sqrt{x^2+y^2} &= 2x+2 \Longrightarrow \sqrt{x^2+y^2}=x+2 \\
x^2+y^2 &= (x+2)^2 \Longrightarrow x^2+y^2=x^2+2x+4 \\
\left(\frac{3}{2}\right)^2 &= 2x+4 \Longrightarrow x=-\frac{7}{8} \\
z &= -\frac{7}{8}+\frac{3}{2}i
\end{aligned}$$

Primjer 5.17 Riješite jednadžbu $z^4+2z^2-3=0$.

Rješenje *Ova bikvadratna jednadžba u varijabli z ima četiri rješenja, a rješavamo ju supstitucijom:*

$$\begin{aligned}
&z^4+2z^2-3=0 \\
&\quad t=z^2 \Longrightarrow t^2+2t-3=0 \Longrightarrow t_1=1, t_2=-3 \\
&\quad z^2=1 \Longrightarrow z=\pm\sqrt{1}=\pm 1 \\
&\quad z^2=-3 \Longrightarrow z=\pm\sqrt{-3}=\pm\sqrt{3}i
\end{aligned}$$

Konačna rješenja su: $z_1=1$, $z_2=-1$, $z_3=\sqrt{3}i$, $z_4=-\sqrt{3}i$. U ovom primjeru bilo je jednostavno odrediti rješenja dviju kvadratnih jednadžbi i nije bilo potrebno koristiti formulu za računanje korijena kompleksnog broja.

Primjer 5.18 Riješite jednadžbu $(z-2)^3=z^3$.

Rješenje

$$\begin{aligned}
(z-2)^3 &= z^3 \\
z^3-3z^2\cdot 2+3z\cdot(-2)^2-8 &= z^3 \\
-6z^2+12z-8=0 &\Longrightarrow 3z^2-6z+4=0 \\
z_{1,2} &= \frac{6\pm\sqrt{-12}}{6}=\frac{6\pm 2\sqrt{3}i}{6}=1\pm\frac{\sqrt{3}}{3}i
\end{aligned}$$

Primjer 5.19 Riješite jednadžbu $z^4 - 16 = 0$.

Rješenje

$$z^4 - 16 = 0 \Longrightarrow z^4 = 16 \Longrightarrow z = \sqrt[4]{16}$$

$$w = 16 \Longrightarrow |w| = \sqrt{16^2} = 16$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left|\frac{w_i}{w_r}\right| = \operatorname{arctg}\left|\frac{0}{16}\right| = \operatorname{arctg}|0| = 0$$

$$w = 16\left(\cos(0) + i\sin(0)\right)$$

$$\sqrt[4]{w} = \sqrt[4]{16}\left(\cos\left(\frac{0+2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{0+2k\pi}{4}\right)\right), k = 0, 1, 2, 3$$

$$k = 0 \Longrightarrow w_0 = 2\left(\cos(0) + i\sin(0)\right) = 2$$

$$k = 1 \Longrightarrow w_1 = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{4}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2i$$

$$k = 2 \Longrightarrow w_2 = 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{4}\right)\right) = 2\left(\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right) = -2$$

$$k = 3 \Longrightarrow w_3 = 2\left(\cos\left(\frac{6\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{6\pi}{4}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = -2i$$

Konačno rješenje: $z_{1,3} = \pm 2$, $z_{2,4} = \pm 2i$.

5.3 Zadaci za vježbu

✍ **Zadatak 5.1** Označite u polarnom koordinatnom sustavu pozicije točaka

a) $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$
b) $\left(-3, \frac{2\pi}{3}\right)$
c) $\left(4, \frac{5\pi}{4}\right)$
d) $\left(4, \frac{5\pi}{3}\right)$
e) $\left(-3, -\frac{7\pi}{2}\right)$

✍ **Zadatak 5.2** Odredite polarne koordinate $r > 0,\ \varphi \in [0, 2\pi\rangle$ za slijedeće točke:

a) $(0, 1)$
b) $(-4, 0$
c) $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$
d) $\left(-1, \sqrt{5}\right)$
e) $(-1, -1)$
f) $(3, 4)$

Rješenje

a) $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$
b) $(4, \pi)$
c) $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$
d) $\left(\sqrt{6}, -1.15\right)$
e) $\left(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right)$
f) $(5, 0.93)$

✍ **Zadatak 5.3** Odredite pravokutne koordinate (x, y) za slijedeće točke:

a) $\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$
b) $\left(1, \frac{3\pi}{2}\right)$
c) $\left(\sqrt{20}, \frac{\pi}{4}\right)$
d) $(3\pi, 3\pi)$
e) $\left(2, -\frac{\pi}{6}\right)$
f) $\left(2, \frac{5\pi}{6}\right)$

Rješenje

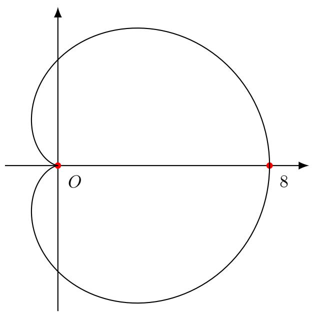
a) $(0, 2)$
b) $(0, -1)$
c) $\left(\sqrt{10}, \sqrt{10}\right)$
d) $(-3\pi, 0)$
e) $\left(\sqrt{3}, -1\right)$
f) $\left(-\sqrt{3}, 1\right)$

✍ **Zadatak 5.4** Kolika je udaljenost između točaka $T_1\left(3, \frac{\pi}{2}\right),\ T_2\,(4, \pi)$?
Rješenje 5

✍ **Zadatak 5.5** Nacrtajte polarni graf funkcije $r = 4 + 4\cos(\varphi)\,,\ \varphi \in [0, 2\pi\rangle\,.$
Rješenje

Radi se o kardioidi kao u primjeru 5.4, za koju jednadžba u pravokutnim koordinatama glasi

$$\left(x^2 + y^2 + 4x\right)^2 = 16\left(x^2 + y^2\right)$$

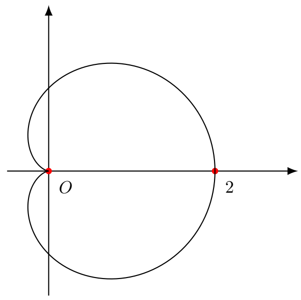


✍ **Zadatak 5.6** Nacrtajte polarni graf funkcije $r = 1 + \cos(\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$. Te odredite zapis funkcije u pravokutnim koordinatama? Da li je graf funkcije simetričan?

Rješenje

Radi se o kardioidi kao u primjeru 5.4, koja je simetrična u odnosu na polarnu os i za koju jednadžba u pravokutnim koordinatama glasi

$$\left(x^2 + y^2 + x\right)^2 = \left(x^2 + y^2\right)$$



✍ **Zadatak 5.7** Odredite oblik čunjosječnica, njihove ekscentricitete i jednadžbu direktrise za slijedeće krivulje zadane u polarnom zapisu

a) $r = \dfrac{12}{4 + 5\cos(\varphi)}$ b) $r = \dfrac{7}{2 - 2\cos(\varphi)}$ c) $r = \dfrac{2}{3 - \cos(\varphi)}$

Rješenje

a) hiperbola, $e = \dfrac{5}{4}$, $x = \dfrac{12}{5}$

b) parabola, $e = 1$, $x = -\dfrac{7}{2}$

c) elipsa, $e = \dfrac{1}{3}$, $x = -2$

✍ **Zadatak 5.8** Odredite trigonometrijski oblik kompleksnog broja z

a) $z = 2 - 2i$ b) $z = -i$ c) $z = -\sqrt{3} + i$ d) $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Rješenje

a) $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$

b) $z = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

c) $z = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

d) $z = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

✍ **Zadatak 5.9** Izračunajte

a) $3\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \cdot 9\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$

b) $3\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) : 9\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$

Rješenje

a) $27\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = -27i$

b) $\frac{1}{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -\frac{1}{3}i$

✍ **Zadatak 5.10** Izračunajte

a) $(2-2i)^5$

b) $(-1-i)^6$

c) $\left(-\sqrt{3}+i\right)^7$

d) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^6$

Rješenje

a) $-128+128i$ *b)* $-8i$ *c)* $64\sqrt{3}-64i$ *d)* $-i$

✍ **Zadatak 5.11** Izračunajte

a) $\sqrt[3]{2-2i}$

b) $\sqrt[3]{-1-i}$

c) $\sqrt[4]{i}$

d) $\sqrt[3]{27}$

e) $\sqrt[4]{-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}$

Rješenje

a) $z_k=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi+8k\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi+8k\pi}{12}\right)\right)$, $k=0,1,2.$

b) $z_k=\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi+8k\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi+8k\pi}{12}\right)\right)$, $k=0,1,2.$

c) $z_k=\left(\cos\left(\frac{\pi+4k\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+4k\pi}{8}\right)\right)$, $k=0,1,2,3.$

d) $z_k=3\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right)$, $k=0,1,2.$

e) $z_k=\left(\cos\left(\frac{5\pi+8k\pi}{16}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi+8k\pi}{16}\right)\right)$, $k=0,1,2$

✍ **Zadatak 5.12** Jedno rješenje jednadžbe $z^4-8z^3+33z^2-68z+52=0$ iznosi $z_1=2+3i$. Izračunajte ostala rješenja jednadžbe.

Rješenje $z_2=2-3i$, $z_{3,4}=2$

✍ **Zadatak 5.13** Riješite jednadžbu $z^3+8=0$ u skupu kompleksnih brojeva. Rješenja prikažite u Gaussovoj (kompleksnoj) ravnini.

Rješenje

$$z_0=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=1+\sqrt{3}i$$

$$z_1=2\left(\cos\left(\pi\right)+i\sin\left(\pi\right)\right)=-2$$

$$z_2=2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)=1-\sqrt{3}i$$

✍ **Zadatak 5.14** Izračunajte $\left(\frac{2+i}{2-i}\right)^6$.

Rješenje $\frac{1}{5^6}(3+4i)^6=\frac{11753}{15625}-\frac{10296}{15625}i$

✍ **Zadatak 5.15** Zadani su kompleksni brojevi $z = -17 - 6i$, $w = 3 + i$. Odredite kompleksni broj u tako da vijedi

$$\frac{1}{10u} = \frac{3}{z} + \frac{1}{2w}$$

Rješenje $u = -9 - 7i$

✍ **Zadatak 5.16** Odredite x, y tako da vrijedi jednakost

$$\frac{1}{x + yi} + \frac{1}{1 + 2i} = 1$$

Rješenje $x = 1$, $y = -\frac{1}{2}$

✍ **Zadatak 5.17** Riješite jednadžbu

$$z^2 = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^3$$

Kompleksna rješenja napišite u standardnom zapisu kompleksnog broja.

Rješenje $z_1 = 2\sqrt{2}i$, $z_2 = -2\sqrt{2}i$

✍ **Zadatak 5.18** Riješite jednadžbu

$$z^4 = -2 + i2\sqrt{3}$$

Kompleksna rješenja napišite u standardnom zapisu kompleksnog broja.

Rješenje $z_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$ $z_3 = -\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ $z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}$

✍ **Zadatak 5.19** Riješite jednadžbu

$$\overline{z} + |z + 1| + 2i = 0\,.$$

Rješenje $z = -\dfrac{5}{2} + 2i$

✍ **Zadatak 5.20** Riješite jednadžbu

$$|z + 3i| - 2i + z - 4 = 0\,.$$

Rješenje $z = -\dfrac{9}{8} + 2i$

Poglavlje

Nizovi i redovi

Uvod

- *Niz realnih brojeva*
- *Red realnih brojeva*

6.1 Niz realnih brojeva

Definicija 6.1. Niz realnih brojeva

Preslikavanje $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ nazivamo ***niz realnih brojeva****, pri tome je $a(n) = a_n$* **opći član niza**.

- *Elemente $a_1, a_2, \ldots$ nazivamo* **članovima niza**.
- *Niz se obično zadaje formulom za njegov $n-ti$ element.*
- *Skraćeno niz označavamo (a_n).*
- *Kažemo da je niz* **konstantan** *ako su mu svi članovi jednaki.*

Definicija 6.2. Aritmetički niz

Niz realnih brojeva (a_n) je **aritmetički niz** *ako postoji takav realan broj $d \in \mathbb{R}$ za koji vrijedi*

$$a_{n+1} - a_n = d, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Realan broj d iz definicije nazivamo diferencija aritmetičkog niza.

Definicija 6.3. Geometrijski niz

Niz realnih brojeva (a_n) je **geometrijski niz** *ako postoji takav realan broj $q \in \mathbb{R}$ za koji vrijedi*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Primjer 6.1 Napišite prvih 5 članova niza čiji je opći član $a_n = \frac{n+1}{2n-1}$.

Rješenje *U formulu za opći član niza uvrštavamo odgovarajući prirodni broj n:*

$$\begin{aligned}
n = 1 \quad &\Rightarrow \quad a_1 = \frac{2}{1} = 2\\
n = 2 \quad &\Rightarrow \quad a_2 = \frac{3}{3} = 1\\
n = 3 \quad &\Rightarrow \quad a_3 = \frac{4}{5}\\
n = 4 \quad &\Rightarrow \quad a_4 = \frac{5}{9}\\
n = 5 \quad &\Rightarrow \quad a_5 = \frac{6}{11}
\end{aligned}$$

Primjer 6.2 Nađite opći član niza ako su zadana prva četiri člana $-\frac{1}{5}, -\frac{4}{11}, -\frac{1}{2}, -\frac{8}{13}, \ldots$

Rješenje *Svaki član niza zapišemo koristeći odgovarajući prirodni, to jest njegov redni broj n te, ukoliko je potrebno, proširimo član niza množenjem kako bismo omogućili takav zapis:*

$$-\frac{2}{10}, -\frac{4}{11}, -\frac{6}{12}, -\frac{8}{13} \ldots \Longrightarrow -\frac{2\cdot 1}{1+9}, -\frac{2\cdot 2}{2+9}, -\frac{2\cdot 3}{3+9}, -\frac{2\cdot 4}{4+9} \ldots \Longrightarrow a_n = -\frac{2n}{n+9}$$

Primjer 6.3 Nađite opći član niza ako su zadana prva četiri člana $0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, \ldots$

Rješenje *Primijetimo da je svaki član niza s neparnim indeksom jednak 0, odnosno $a_{2n-1} = 0$. Svi članovi niza s parnim indeksima u brojniku imaju 1, a nazivnici se povečavaju za 1, počevši od 3. To možemo zapisati kao: $a_{2n} = \frac{1}{n+2}$, dakle:*

$$a_n = \begin{cases} 0, & \textit{za neparni } n \textit{ tj.} \quad n = 2k-1 \\ \frac{1}{\frac{n}{2}+2}, & \textit{za parni } n \textit{ tj.} \quad n = 2k \end{cases}$$

Definicija 6.4. Monotonost niza

Kažemo da je niz (a_n) **rastući** *ako vrijedi*

$$a_{n+1} \geq a_n, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

odnosno **strogo rastući** *ako vrijedi*

$$a_{n+1} > a_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Kažemo da je niz (a_n) **padajući** *ako vrijedi*

$$a_{n+1} \leq a_n, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

odnosno **strogo padajući** *ako vrijedi*

$$a_{n+1} < a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Niz (a_n) je **monoton** *ako je rastući ili padajući, odnosno* **strogo monoton** *ako je strogo rastući ili strogo padajući.*

Definicija 6.5. Omeđenost niza

Kažemo da je niz (a_n) **omeđen odozgor** (**odozdol**) *ako je skup vrijednosti niza* $\{a_n\}$ *omeđen odozgor (odozdol).*

Kažemo da je niz **omeđen** *ako je omeđen odozgor i omeđen odozdol.*

Primjer 6.4 Ispitajte rast i pad niza zadanog općim članom $a_n = \dfrac{n}{n+9}$.

Rješenje *Ispišimo prva četiri člana niza:* $\dfrac{1}{10}, \dfrac{2}{11}, \dfrac{3}{12}, \dfrac{4}{13}, \ldots$ *Promatramo omjer bilo koja dva susjedna člana niza na sljedeći način:*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{n+1+9}}{\frac{n}{n+9}} = \frac{n^2+10n+9}{n^2+10n} = 1 + \frac{9}{n^2+10n} > 1$$

Budući da je omjer sljedbenika općeg člana i općeg člana niza strogo veći od 1, *niz je strogo rastući.*

Primjer 6.5 Ispitajte rast i pad niza zadanog općim članom $a_n = \dfrac{7n}{n^2-6}$.

Rješenje *Ispišimo prva četiri člana niza:* $-\dfrac{7}{5} = -1.4,\ -\dfrac{14}{2} = -7,\ \dfrac{21}{3} = 7,\ \dfrac{28}{10} = 2.8.$

Iz zapisa prva četiri člana niza očito je da niz niti raste, niti pada, to jest zaključujemo da nije monoton.

Primjer 6.6 Kakav je harmonijski niz (rastući ili padajući)?

Rješenje *Harmonijski niz je zadan općim članom* $a_n = \dfrac{1}{n}$. *Budući uvijek vrijedi*

$$n < n+1 \Longleftrightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$$

možemo zaključiti

$$a_n > a_{n+1}$$

odakle slijedi: harmonijski niz je strogo monoton (padajući).

Primjer 6.7 Ispitajte omeđenost harmonijskog niza.

Rješenje *Vidjeli smo da je harmonijski niz strogo padajući, a budući iz*

$$n \in \mathbb{N} \implies n \geq 1 \implies \frac{1}{n} \leq \frac{1}{1} = 1$$

znamo da je harmonijski niz omeđen odozgor. Isto tako znamo

$$n > 0 \implies \frac{1}{n} > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

prema tome je harmonijski niz omeđen odozdol s 0, *tj. možemo zaključiti harmonijski niz je omeđen.*

Primjer 6.8 Ispitajte omeđenost nizova zadnih općim članovima $a_n = \sqrt{n}$, i $a_n = (-1)^n\sqrt{n}$.

Rješenje

1. *Uvijek vrijedi* $n < n+1 \implies \sqrt{n} < \sqrt{n+1}$, *tj. niz je strogo rastući, a budući je prvi član* $a_1 = 1$ *slijedi da je niz omeđen odozdol*
2. *Za parne indekse* $n = 2k$ *imamo članove oblika* $a_k = \sqrt{2k}$, *a to je novi niz koji je strogo rastući, dok za neparne indekse* $n = 2k+1$ *imamo novi niz s članovima oblika* $a_k = -\sqrt{2k+1}$ *koji je strogo padajući zbog*
$$2k+1 < 2(k+1)+1 = 2k+3$$
odakle slijedi
$$\sqrt{2k+1} < \sqrt{2k+3} \implies -\sqrt{2k+1} > -\sqrt{2k+3}$$
Dakle, niz $a_n = (-1)^n\sqrt{n}$ *nije omeđen odozdol ni odozgor, drugim riječim to je primjer neomeđenog niza.*

Primjer 6.9 Ispitajte omeđenost niza zadanog općim članom $a_n = \dfrac{31n+1}{n}$.

Rješenje *Promotrimo omjer susjedna dva člana niza:*
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{31(n+1)+1}{n+1}}{\frac{31n+1}{n}} = \frac{31n^2+32n}{31n^2+32n+1} < 1$$
Zaključujemo da niz strogo pada te da je njegov najveći element $a_1 = 32$. *Kako su svi elementi niza manji od* 32 *slijedi da je niz omeđen odozgor.*

Zapišemo li opći član niza u obliku
$$a_n = \frac{31n+1}{n} = \frac{31n}{n} + \frac{31}{n} = 31 + \frac{31}{n}$$
vidimo da su svi elementi niza veći od 31 te da je niz omeđen odozdol.

Stoga zaključujemo, $31 < a_n \leq 32$, *drugim riječima, niz je omeđen.*

Definicija 6.6. ϵ-okolina

Neka je zadan $a_0 \in \mathbb{R}$ *za* $\epsilon > 0$ *skup*
$$O_\epsilon(a_0) = \{a \in \mathbb{R} : |a - a_0| < \epsilon\}$$
nazivamo ϵ-**okolina** *od* a_0.

Definicija 6.7. Gomilište niza

Realan broj A *nazivamo* **gomilištem** *niza* (a_n), *ako se unutar svake njegove* ϵ-*okoline nalazi beskonačno mnogo članova niza* (a_n).

Teorem 6.1

Svaki omeđeni niz realnih brojeva ima barem jedno gomilište.

Definicija 6.8. Konvergencija niza

Niz realnih brojeva (a_n) **konvergira** *realnom broju* L*, ako je* L *jedino gomilište niza* (a_n).
Broj L *nazivamo* **limes niza** (a_n) *i pišemo* $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ *ili skraćeno* $a_n \to L$.
Ako niz realnih brojeva (a_n) *ima limes* $L \in \mathbb{R}$*, onda kažemo da je* **konvergentan**. *Ako niz nije konvergentan, onda kažemo da je* **divergentan**.

Definicija 6.9. Svojstva konvergentnih nizova

1. *Konvergentan niz je omeđen.*
2. *Konvergentan niz ima samo jedan limes.*
3. *Ako je niz realnih brojeva monoton i omeđen, onda je konvergentan.*

Definicija 6.10. Osnovna pravila konvergentnih nizova

Neka su (a_n) *i* (b_n) *konvergentni nizovi, tada vrijedi*

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$
3. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$
4. *ako vrijedi* $b_n \neq 0$, $\forall n$ *i* $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ *tada slijedi* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$
5. *za* $\lambda \in \mathbb{R}$ *vrijedi* $\lim_{n\to\infty}(\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot \lim_{n\to\infty} a_n$

Definicija 6.11. Divergentni nizovi

Kažemo da niz realnih brojeva (a_n) **divergira** *prema* $+\infty$ *i pišemo* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$*, ako za svaki realan broj* $M > 0$ *postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takav da vrijedi* $\forall n \geq n_0 \implies a_n > M$.
Kažemo da niz realnih brojeva (a_n) **divergira** *prema* $-\infty$ *i pišemo* $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$*, ako za svaki realan broj* $M < 0$ *postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takav da vrijedi* $\forall n \geq n_0 \implies a_n < M$.

Teorem 6.2

Neka su nizovi (a_n) *i* (b_n) *takvi da vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a_0 > 0 \text{ i } b_n > 0,\ \lim_{n\to\infty} b_n = 0,$$

tada vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty.$$

Definicija 6.12. Pravila za divergentne nizove

Neka za $(a_n), (b_n)$ *i* (c_n) *nizove vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty, \ \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty, \ \lim_{n\to\infty} c_n = c \in \mathbb{R}$$

tada vrijedi

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + c_n) = +\infty$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = +\infty$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot c_n) = +\infty$ *ako je* $c > 0$, *odnosno* $-\infty$ *ako je* $c < 0$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c_n}{a_n} = 0$

Definicija 6.13. Neki važniji limesi

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, a \geq 1$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, 0 < a < 1$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0, \forall a \in \mathbb{R}$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$

Primjer 6.10 Pokažite da je harmonijski niz konvergentan.

Rješenje *Vidjeli smo otprije da je harmonijski niz strogo padajući, tj. monoton te kako je omeđen odozdol i odozgor. Prema trećem svojstvu za konvergentne nizove tada slijedi da je harmonijski niz konvergentan.*

Primjer 6.11 Ispitajte konvergenciju niza $a_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Rješenje *Iz omjera dva susjedna člana*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}} = \frac{1}{2} < 1$$

zaključujemo kako se radi o strogo padajućem geometrijskom nizu. Prvi član niza iznosi $a_1 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-1} = 1$ *ujedno je njegov najveći element, prema tome, niz je omeđen odozgor. Budući su svi članovi niza pozitivni, a radi se o strogo padajućem nizu koji je omeđen odozdol iz trećeg svojstva konvergentnih nizova zaključujemo kako se radi o konvergentnom nizu.*

Primjer 6.12 Ispitajte konvergenciju niza zadanog općim članom $a_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{2}$.

Rješenje *članovi niza su:* $1, 0, 1, 0, 1, \ldots$ *Vidimo kako niz ima dva gomilišta* 0 *i* 1 *stoga nije konvergentan.*

Primjer 6.13 Ispitajte konvergenciju niza zadanog općim članom $a_n = \dfrac{1}{(n+2)^2-(n-2)^2}$.

Rješenje *Sređivanjem izraza za opći član niza dobijemo*

$$a_n = \frac{1}{(n+2)^2-(n-2)^2} = \frac{1}{8n} > 0$$

odakle vidimo da je $a_n > 0$, *odnosno da je niz omeđen odozdol. Budući vrijedi*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{8(n+1)}}{\frac{1}{8n}} = \frac{n}{n+1} < 1$$

zaključujemo kako se radi o strogo padajućem nizu koji je omeđen odozdol. Također, iz trećeg svojstva konvergentnih nizova proizlazi da je niz konvergenta.

Primjer 6.14 Odredite limes niza zadanog općim članom $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+1}{5n-2}$.

Rješenje

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{5n-2} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n+1 \quad /:n}{5n-2 \quad /:n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{5-\frac{2}{n}} = \frac{3+\frac{1}{\infty}}{5-\frac{2}{\infty}} = \frac{3+0}{5-0} = \frac{3}{5}$$

Primjer 6.15 Odredite limes niza zadanog općim članom $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{5n^2-1}$.

Rješenje

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{5n^2-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1 \quad /:n^2}{5n^2-1 \quad /:n^2} = \frac{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{5-\frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{5-\frac{1}{\infty}} = \frac{0+0}{5-0} = \frac{0}{5} = 0$$

Primjer 6.16 Odredite limes niza zadanog općim članom $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+2}{4n+1}$.

Rješenje

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2}{4n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2 \quad /:n^2}{4n+1 \quad /:n^2} = \frac{1+\frac{2}{n^2}}{\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1+\frac{2}{\infty}}{\frac{4}{\infty}+\frac{1}{\infty}} = \frac{1+0}{0+0} = \frac{1}{0} = \infty$$

Primjer 6.17 Odredite limes niza zadanog općim članom $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{2n^2+3n-1}}{2n+3}$.

Rješenje

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^2+3n-1}}{2n+3} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^2+3n-1} \quad /:n}{2n+3 \quad /:n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{2n^2+3n-1}{n^2}}}{2+\frac{3}{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}}{2+\frac{3}{n}} = \frac{\sqrt{2+\frac{3}{\infty}-\frac{1}{\infty}}}{2+\frac{3}{\infty}} = \frac{\sqrt{2+0-0}}{2+0} = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

Primjer 6.18 Odredite limes niza zadanog općim članom $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{3n+2}-\sqrt{5n}\right)$.

Rješenje

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{3n+2}-\sqrt{5n}\right) &= \infty-\infty \text{ (neodređeni oblik)}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{3n+2}-\sqrt{5n}\right)\cdot\frac{\sqrt{3n+2}+\sqrt{5n}}{\sqrt{3n+2}+\sqrt{5n}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{3n+2-5n}{\sqrt{3n+2}+\sqrt{5n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{-2n+2 \quad /:n}{\sqrt{3n+2}+\sqrt{5n} \quad /:n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{-2+\frac{2}{n}}{\sqrt{\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{\frac{5}{n}}} = \frac{-2+\frac{2}{\infty}}{\sqrt{\frac{3}{\infty}+\frac{2}{\infty}}+\sqrt{\frac{5}{\infty}}}\\
&= \frac{-2+0}{\sqrt{0+0}+\sqrt{0}} = \frac{-2}{0} = -\infty
\end{aligned}$$

Primjer 6.19 Odredite limes niza zadanog općim članom $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n-3}\right)^{n+1}$.

Rješenje

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n-3}\right)^{n+1} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n+2}{n-3}-1\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n+2-n+3}{n-3}\right)^{n+1}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n-3}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n-3}{5}}\right)^{n+1}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n-3}{5}}\right)^{\frac{n-3}{5}}\right)^{\frac{5}{n-3}}\right]^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{5}{n-3}}\right)^{n+1}\\
&= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{5n+5}{n-3}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n+5}{n-3}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n+5 \;\; /:n}{n-3 \;\; /:n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5+\frac{5}{n}}{1-\frac{3}{n}}}\\
&= e^{\frac{5+\frac{5}{\infty}}{1-\frac{3}{\infty}}} = e^{\frac{5+0}{1-0}} = e^5
\end{aligned}$$

Primjer 6.20 Odredite limes niza zadanog općim članom $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!-(n+1)!}$.

Rješenje

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!-(n+1)!} &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot n!}{n!-(n+1)\cdot n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot n!}{n!\,(1-(n+1))} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{-n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1 \quad /:n}{-n \quad /:n} = -1
\end{aligned}$$

6.2 Red realnih brojeva

Definicija 6.14. Pojam reda

Uz nizove povezujemo beskonačne sume oblika

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots ,$$

koje možemo izračunati do određenog člana (parcijalna suma).

Red *je uređeni par niza (a_n) i pripadajućeg niza parcijalnih suma (S_n) definiranog s $S_1 = a_1,\ S_n = S_{n-1} + a_n$. Red označavamo simbolom $\sum$.*

Definicija 6.15. Konvergencija reda

Kažemo da red $\sum a_n$ **konvergira** *prema S, odnosno da mu je suma jednaka S ako vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

Za sumu reda (a_n) pišemo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Definicija 6.16. Nužan uvjet konvergencije reda

Da bi red $\sum a_n$ konvergirao, nužno mora vrijediti

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0\,.$$

Red s pozitivnim članovima konvergira onda i samo onda ako je pripadajući niz parcijalnih suma ograničen odozgor.

Definicija 6.17. Kriteriji konvergencije redova s pozitivnim članovima

1. *Poredbeni kriterij*

   Neka za nizove (a_n) i (b_n) postoji prirodan broj $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $\forall n > n_0 \implies a_n \le b_n$. Tada vrijedi:

   (a). *Ako red $\sum\limits_n b_n$ konvergira, tada konvergira i red $\sum\limits_n a_n$*

   (b). *Ako red $\sum\limits_n a_n$ divergira, tada divergira i red $\sum\limits_n b_n$*

2. *Poredbeni kriterij pomoću limesa*

   Neka su (a_n) i (b_n) nizovi s pozitivnim članovima takvi da postoji limes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \neq 0$$

   Tada dva reda $\sum a_n$ i $\sum b_n$ konvergiraju, ili oba divergiraju.

3. *D'Alembertov kriterij*

Neka je $\sum a_n$ *red s pozitivnim članovima. Ako postoji limes*

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

tada vrijedi

- *red konvergira za* $q < 1$
- *red divergira za* $q > 1$
- *za* $q = 1$ *nema odluke po ovom kriteriju*

4. *Cauchyjev kriterij*

   Neka je $\sum a_n$ *red s pozitivnim članovima. Ako postoji limes*

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

tada vrijedi

- *red konvergira za* $q < 1$
- *red divergira za* $q > 1$
- *za* $q = 1$ *nema odluke po ovom kriteriju*

Napomena *Primjer divergentnog reda kojega često koristimo za poredbeni kriteri je* **harmonijski** *red*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Primjer 6.21 Odredite sumu reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Rješenje *Iskoristimo jednakost*

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

te pomoću nje zapišimo red na sljedeći način

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

Raspisivanjem nekoliko članova uočavamo poništavanje

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cdots \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

odakle dobijemo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \cancelto{0}{\frac{1}{n+1}} \right) = 1$$

Definicija 6.18. Alternirajući redovi

Za redove kojima su članovi naizmjenice pozitivni i negativni kažemo da su **alternirajući redovi**.

Leibnizov kriterij

Ako za red s alternirajućim članovima $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ *vrijedi*

1. (a_n) *je padajući niz*
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

tada je on konvergentan.

Primjer 6.22 Odredite sumu za geometrijski red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$, $0 < q < 1$.

Rješenje *Iskoristimo jednakost (koja slijedi iz Binomnog poučka)*

$$1 + q + \cdots + q^{n-2} + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q},$$

tj. niz parcijalnih suma ima opći član

$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

pomoću kojega možemo zapisati sumu reda u obliku limesa niza

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n = a \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{a}{1-q} \lim_{n\to\infty}\left(1-q^{n+1}\right)$$

za $0 < q < 1$ *vrijedi* $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\cancelto{0}{q^{n+1}}) = 1$ *čime dobijemo*

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}, \quad \textit{za } 0 < q < 1$$

Primjer 6.23 Odredite parcijalnu sumu reda $\sum\limits_{n=1}^{500} \frac{1+3n}{2}$.

Rješenje *Razlika susjedna dva člana iznosi*

$$d = a_{n+1} - a_n = \frac{1+3(n+1)}{2} - \frac{1+3n}{2} = \frac{1+3n+3-1-3n}{2} = \frac{3}{2}$$

stoga je red aritmetički.

Suma prvih n *članova aritmetičkog reda računa se po formuli:*

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

Prvi i 500. *član reda su:*

$$a_1 = \frac{1+3}{2} = 2, \quad i \quad a_{500} = \frac{1+3\cdot 500}{2} = \frac{1501}{2}$$

stoga je parcijalna suma reda jednaka:

$$S_{500} = \frac{500}{2}\left(2 + \frac{1501}{2}\right) = 188125$$

Primjer 6.24 Odredite sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot 2^{n-1}$.

Rješenje *Kvocijent susjedna dva člana je*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3 \cdot 2^{n+1-1}}{3 \cdot 2^{n-1}} = \frac{2^n}{2^n \cdot 2^{-1}} = 2$$

pa je red geometrijski.

Suma članova geometriskog reda za $q < 1$ računa se po formuli:

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

Budući je $q > 1$ red divergira, i njegova suma je: ∞.

Primjer 6.25 Ispitajte konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(4n-2)(n+5)}$.

Rješenje *Provjerimo vrijedi li nužan uvjet:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{(4n-2)(n+5)} = \frac{3}{\infty} = 0$$

Poredbenim kriterijem zadani red usporedit ćemo s redom $\sum b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ koji je konvergentan. Neka je $\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(4n-2)(n+5)}$.

Poredbenim kriterijem imamo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{(4n-2)(n+5)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+3n}{4n^2+20n-2n-10}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+3n \quad / : n^2}{4n^2+20n-2n-10 \quad / : n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{3}{n}}{4+\frac{18}{n}-\frac{10}{n^2}} = \frac{3}{4} \neq 0$$

prema tome red $\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(4n-2)(n+5)}$ je konvergentan.

Primjer 6.26 Ispitajte konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

Rješenje *Red $\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ ćemo usporediti s divergentnim harmonijskim redom $\sum b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.*

Koristimo drugi poredbeni kriterij pomoću limesa.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \quad / : n}{\sqrt{n^2+n} \quad / : n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1 \neq 0$$

stoga red $\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ divergira

Primjer 6.27 Ispitajte konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Rješenje *Provjerimo vrijedi li nužan uvjet:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Red $\sum b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ *ćemo usporedit s harmonijskim redom* $\sum a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *koji je divergentan.*

Koristimo prvi poredbeni kriterij. Provjerit ćemo da je $a_n \leq b_n$ *tj.* $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Vrijedi:

$$n \geq \sqrt{n} \quad / : \sqrt{n}$$

$$\frac{n}{\sqrt{n}} \geq 1 \quad / : n$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$$

stoga je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ *divergentan.*

Primjer 6.28 Ispitajte konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

Rješenje *Provjerimo vrijedi li nužan uvjet:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Red $\sum b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ *usporedit ćemo s harmonijskim redom* $\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *koji je divergentan.*

Provjerit ćemo da je $a_n \leq b_n$ *tj.* $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\ln n}$.

Vrijedi:

$$n \geq \ln n \quad / : \ln n \quad \Rightarrow \frac{n}{\ln n} \geq 1 \quad / : n \quad \Rightarrow \frac{1}{\ln n} \geq \frac{1}{n}$$

te je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ *divergentan.*

Primjer 6.29 Ispitajte konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$.

Rješenje *Kako vrijedi da je* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ *zadovoljen je nužan uvjet, jer je* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!} = 0$.

Korištenjem D'Alambertova kriterija imamo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n \cdot 3 \cdot n!}{3^n \cdot (n+1) \cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = \frac{3}{\infty} = 0 < 1$$

tj. red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ *je konvergentan.*

Primjer 6.30 Ispitajte konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n}\right)^n$.

Rješenje *Korištenjem Cauchyeva kriterija imao:*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{3n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1 \quad /:n}{3n \quad /:n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{3} = \frac{1}{3}$$

zbog $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{3} < 1$ *zaključujemo da je red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n}\right)^n$ *konvergentan.*

Primjer 6.31 Ispitajte konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Rješenje *Budući se radi o redu s alternirajućim članovima možemo primijeniti Leibnizov kriterij.*

1. *niz* $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ *mora biti padajući*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{1}{3} < 1$$

   zaključujemo, niz je strogo padajući

2. *Kako je* $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ *za* $0 < a < 1$ *slijedi:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$$

dakle, red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ *je konvergentan*

Primjer 6.32 Ispitajte konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Rješenje *Budući se radi o redu s alternirajućim članovima primijenjujemo Leibnizov kriterij.*

1. $(a_n) = \frac{1}{n}$, *što je harmonijski niz za koji znamo kako je strogo padajući niz, zaključujemo kako je prvi uvjet u Leibnizovu kriteriju ispunjen*
2. *također znamo iz prethodnih zadataka kako je limes harmonijskog niza jednak* 0, *čime je ispunjen i drugi uvjet Leibnizova kriterija*
3. *budući su ispunjena oba uvjeta Leibnizova kriterija zaključujemo kako se radi o konvergentnom alternirajućem redu*

6.3 Zadaci za vježbu

✍ **Zadatak 6.1** Ispitajte monotonost sljedećih nizova zadanih općim članom

a) $a_n = \dfrac{2}{1+3n}$

b) $a_n = \dfrac{2}{n^2}$

c) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

d) $a_n = \dfrac{3n}{n^2+1}$

e) $a_n = \dfrac{n^2}{n^2+1}$

f) $a_n = \dfrac{2n+3}{3n+1}$

Rješenje

a) strogo padajući

b) strogo padajući

c) strogo rastući

d) strogo padajući

e) strogo rastući

f) strogo padajući

✍ **Zadatak 6.2** Ispitajte omeđenost sljedećih nizova zadanih općim članom

a) $a_n = \dfrac{2}{1+3n}$

b) $a_n = \dfrac{2}{n^2}$

c) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

d) $a_n = \dfrac{3n}{n^2+1}$

e) $a_n = \dfrac{n^2}{n^2+1}$

f) $a_n = \dfrac{2n+3}{3n+1}$

Rješenje

a) omeđen: $0 < a_n \leq \frac{1}{2}$

b) omeđen: $0 < a_n \leq 2$

c) omeđen: $\frac{1}{2} \leq a_n < 1$

d) omeđen: $0 < a_n \leq \frac{3}{2}$

e) omeđen: $\frac{1}{2} \leq a_n < 1$

f) omeđen: $\frac{2}{3} < a_n \leq \frac{5}{4}$

✍ **Zadatak 6.3** Odredite limes sljedećih nizova zadanih općim članom

a) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

b) $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^2+1}}{n+1}$

c) $a_n = \dfrac{3n+5}{3n^2+2n+4}$

d) $a_n = \dfrac{5+n-3n^2}{4-n+2n^2}$

e) $a_n = \dfrac{n}{\sqrt[3]{n^3+5}}$

f) $a_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$

g) $a_n = \left(\dfrac{n+1}{n-3}\right)^{n+1}$

h) $a_n = \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$

i) $a_n = \sqrt{n^4+n^2} - n^2$

Rješenje

a) 0

b) 0

c) 0

d) $-\frac{3}{2}$

e) 1

f) $\frac{1}{e}$

g) e^4

h) e^2

i) $\frac{1}{2}$

✍ **Zadatak 6.4** Ispitajte uspoređivanjem ili primjenom uvjeta za konvergenciju sljedeće redove

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5n+2}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{3n-1}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

Rješenje

a) konvergira

b) divergira

c) divergira

d) divergira

Zadatak 6.5 Pomoću D'Alembertova kriterija ispitajte sljedeće redove

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(2n)!}$

Rješenje

a) konvergira *b) konvergira* *c) konvergira*

Zadatak 6.6 Pomoću Cauchyeva kriterija ispitajte sljedeće redove

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{5^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^{100}}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+2}\right)$

Rješenje

a) konvergira *b) divergira* *c) divergira*

Zadatak 6.7 Pomoću Leibnizova kriterija ispitajte sljedeće redove

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+2)}$

Rješenje

a) konvergira *b) konvergira* *c) konvergira*

Poglavlje

Limes funkcije

Uvod

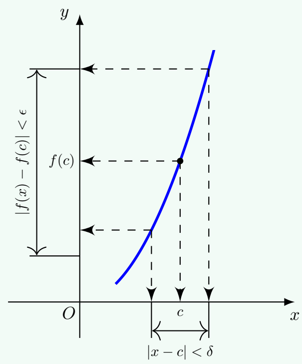
- Limes funkcije
- Asimptote funkcije

7.1 Limes funkcije

Definicija 7.1. Cauchyeva definicija neprekinutosti

Neka je zadana realna funkcija na otvorenom intervalu $I = \langle a, b\rangle$. *Kažemo: funkcija* $f : I \to \mathbb{R}$ *je neprekinuta (kontinuirana) u točki* $c \in I$ *ako za svaki* $\epsilon > 0$ *postoji barem jedan* $\delta > 0$ *takav da vrijedi*

$$\forall x \in I : |x - c| < \delta \implies |f(x) - f(c)| < \epsilon\,.$$



Napomena *Kažemo:*

- f *ima prekid u točki* $d \in I$, *ako nije neprekinuta u točki* d,
- f *je neprekinuta na skupu* $A \subseteq I$, *ako je neprekinuta u svakoj točki iz* A,
- *funkcija* f *ima prekid na skupu* $A \subseteq I$, *ako ima prekid u barem jednoj točki iz skupa* A.

Definicija 7.2. Lokalna svojstva neprekinutih funkcija

Neka je zadana realna funkcija na otvorenom intervalu $I = \langle a, b\rangle$. *Ako je funkcija* $f : I \to \mathbb{R}$ *neprekinuta u točki* $c \in I$, *tada je* f *ograničena na nekom intervalu oko točke* c.

Definicija 7.3. Predznak neprekinutih funkcija

Neka je zadana realna funkcija na otvorenom intervalu $I = \langle a, b\rangle$. Ako je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ neprekinuta u točki $c \in I$ i vrijedi $f(c) \neq 0$ tada je f istog predznaka na nekom intervalu oko točke c.

Definicija 7.4. Operacije s neprekinutim funkcijama

Neka je $f(x)$ realna funkcija na otvorenom intervalu $\langle a, b\rangle$ i neka je $g(x)$ definirana na intervalu koji sadrži sliku od $f(x)$. Ako je $f(x)$ neprekinuta u točki $c \in \langle a, b\rangle$ i $g(x)$ neprekinuta u točki $f(c)$ tada je kompozicija

$$h = g \circ f$$

neprekinuta funkcija u točki c.

Neka su f, g realne funkcije definirane na $\langle a, b\rangle$ i neka su obje neprekinute u točki $c \in \langle a, b\rangle$. Tada vrijedi:

- *$f(x) \pm g(x)$ je neprekinuta u c*
- *$\lambda f(x)$ je neprekinuta za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$*
- *$f(x)g(x)$ je neprekinuta u c*
- *ako je $g(x) \neq 0$, tada je $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ neprekinuta u c*
- *$|f(x)|$ je neprekinuta u c*

Definicija 7.5. Definicija neprekinutosti na otvorenom intervalu

Neka je $f(x)$ realna funkcija definirana na otvorenom intervalu $f \colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. Ako je $f(x)$ neprekinuta u svakoj točki iz intervala, tada je $f(x)$ neprekinuta na tom intervalu.

Napomena

- *Polinomi su neprekinute funkcije na cijelom $\mathbb{R}$.*
- *Racionalne funkcije su neprekinute na području definicije.*
- *Eksponencijalna funkcija je neprekinuta na cijelom $\mathbb{R}$.*
- *Logaritamska funkcija je neprekinuta na $\mathbb{R}_+ = \langle 0, +\infty\rangle$.*
- *Trigonometrijske i arkus funkcije su neprekinute na području definicije.*

Definicija 7.6. Neprekinutost funkcije na segmentu

Neka je $I = [a, b]$. $f(x)$ je neprekinuta na I ako i samo ako:

1. *postoji otvoreni interval $\tilde{I}$ takav da je $I \subset \tilde{I}$*
2. *na $\tilde{I}$ postoji neprekinuta funkcija $\tilde{f} \colon \tilde{I} \to \mathbb{R}$ takva da vrijedi $\tilde{f}(x) = f(x)$, $\forall x \in I$*

Teorem 7.1. Bolzano-Weierstrass

Za realnu funkciju $f(x)$ neprekinutu na segmentu $[a, b]$ vrijedi:

1. *$f(x)$ je ograničena na $[a, b]$*
2. *$f(x)$ na $[a, b]$ dostiže najmanju i najveću vrijednost*
3. *$f(x)$ na $[a, b]$ dostiže svaku međuvrijednost*
4. *ako je $f(a) \cdot f(b) < 0$, onda postoji $c \in [a, b]$ takav da je $f(c) = 0$, tj. funkcija ima nultočku na tom segmentu.*

Teorem 7.2. Teorem o neprekinutosti inverza

Svaka neprekinuta realna funkcija $f(x)$ koja je bijekcija na otvorenom intervalu ima neprekinuti inverz na tom intervalu. Drugim riječima, neprekinuta funkcija na otvorenom intervalu ima neprekinuti inverz ako i samo ako je strogo monotona.

Definicija 7.7. Cauchyjeva definicija

Neka je realna funkcija f definirana u svim točkama intervala $\langle a, b\rangle$ osim možda u točki $c \in \langle a, b\rangle$. Kažemo kako je realan broj L limes funkcije $f(x)$ u točki c ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji takav $\delta > 0$ za koji vrijedi

$$0 < |x - c| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon\,.$$

Definicija 7.8. Veza limesa i neprekinutosti

Realna funkcija $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je neprekinuta u točki $c \in \langle a, b\rangle$ ako i samo ako **ima limes** *u točki c koji je jednak $f(c)$.*

Definicija 7.9. Svojstva limesa funkcija

Neka su $f(x),\ g(x)$ realne funkcije definirane u svim točkama otvorenog intervala $\langle a, b\rangle$ (osim možda u točki c iz tog intervala) takve da postoji

$$\lim_{x\to c} f(x) = A, \quad \lim_{x\to c} g(x) = B$$

Tada na tom intervalu vrijedi

- $\lim\limits_{x\to c} f(x) \pm g(x) = A \pm B$
- $\lim\limits_{x\to c} \lambda f(x) = \lambda A,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x\to c} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$
- *ako je $B \neq 0,\ g(x) \neq 0,\ \forall x \in \langle a, b\rangle$ onda vrijedi* $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$
- $\lim\limits_{x\to c} |f(x)| = |A|$

Primjer 7.1 Izračunajte
$$\lim_{x\to 15} \frac{x-15}{x^2-7x+120}.$$

Rješenje *Uvrstimo graničnu vrijednost* 15 *umjesto varijable* x*:*
$$\lim_{x\to 15} \frac{x-15}{x^2-7x+120} = \frac{15-15}{15^2-7\cdot 15+120} = \frac{0}{240} = 0$$

Primjer 7.2 Izračunajte
$$\lim_{x\to 10} \frac{x-10}{x^2-10x}.$$

Rješenje *Uvrštavanjem granične vrijednosti dobijemo* 0 *u brojniku i nazivniku, odnosno* 10 *je nultočka i brojnika i nazivnika, stoga je potrebno "ukloniti" tu nultočku - faktorizirati brojnik i nazivnik te skratiti zajednički faktor.*
$$\lim_{x\to 10} \frac{x-10}{x^2-10x} = \frac{10-10}{100-100} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 10} \frac{x-10}{x(x-10)} = \lim_{x\to 10} \frac{1}{x} = \frac{1}{10}$$

Primjer 7.3 Izračunajte
$$\lim_{x\to -3} \frac{x^2+8x+15}{x^2+9x+18}.$$

Rješenje
$$\lim_{x\to -3} \frac{x^2+8x+15}{x^2+9x+18} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to -3} \frac{(x+3)\cdot(x+5)}{(x+3)\cdot(x+6)} = \lim_{x\to -3} \frac{x+5}{x+6} = \frac{-3+5}{-3+6} = \frac{2}{3}$$

Primjer 7.4 Izračunajte
$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{25-9x}-4}{\sqrt{x}-1}.$$

Rješenje *U slučaju zajedničke nultočke iracionalnih izraza brojnika i nazivnika, potrebno ih je prvo racionalizirati:*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{25-9x}-4}{\sqrt{x}-1} = \frac{0}{0} &= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{25-9x}-4}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\sqrt{25-9x}+4}{\sqrt{25-9x}+4}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{25-9x-16}{(\sqrt{x}-1)\cdot\left(\sqrt{25-9x}+4\right)}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{9-9x}{(\sqrt{x}-1)\cdot\left(\sqrt{25-9x}+4\right)}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{9(1-x)}{(\sqrt{x}-1)\cdot\left(\sqrt{25-9x}+4\right)}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{9(1-x)\cdot(\sqrt{x}+1)}{(x-1)\cdot\left(\sqrt{25-9x}+4\right)}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{-9(x-1)\cdot(\sqrt{x}+1)}{(x-1)\cdot\left(\sqrt{25-9x}+4\right)}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{-9\cdot(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{25-9x}+4}\\
&= \frac{-9\cdot(1+1)}{\sqrt{25-9}+4} = \frac{-18}{8} = -\frac{9}{4}
\end{aligned}$$

Primjer 7.5 Izračunajte

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right).$$

Rješenje *Sljedeći neodređeni izraz* $\infty-\infty$ *zapisat ćemo u drugom obliku tako da faktoriziramo nazivnik, izlučimo zajednički faktor i zbrojimo preostale izraze svođenjem na zajednički nazivnik te dalje kratimo:*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right) &= \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{(1-x)\left(1+x+x^2\right)}\right)\\
&= \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}\cdot 1-\frac{3}{1+x+x^2}\right)\\
&= \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1+x+x^2-3}{1+x+x^2}\right)\\
&= \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}\cdot\frac{(x-1)(x+2)}{1+x+x^2}\right)\\
&= \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\cancel{1-x}}\right)\left(-\frac{\cancel{(1-x)}(x+2)}{1+x+x^2}\right)\\
&= \lim_{x\to 1}\left(-\frac{x+2}{1+x+x^2}\right) = -\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{1+x+x^2}\\
&= -\frac{1+2}{1+1+1} = -1
\end{aligned}$$

Definicija 7.10. Limes u beskonačnosti

Kažemo da je realan broj L *limes funkcije* $f(x)$ *za* $x=\infty$ *i pišemo*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji realan broj $M > 0$ takav da vrijedi

$$\forall x \in \mathcal{D}_f,\ x > M \implies |f(x) - L| < \epsilon\,.$$

Analogno definiramo limes za $x = -\infty$, ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji realan broj $m < 0$ takav da vrijedi

$$\forall x \in \mathcal{D}_f,\ x < m \implies |f(x) - L| < \epsilon\,.$$

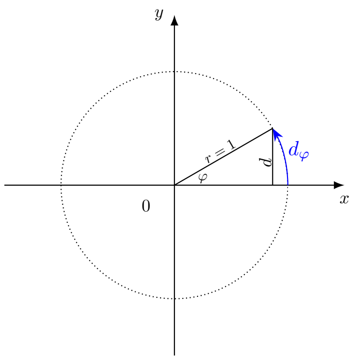
Napomena *Neki važniji limesi:*

- $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$
- $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^n = \infty$, *za paran n*
- $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty} x^n = \infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty\end{array}\right\}$ *za neparan n*
- $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$

Primjer 7.6 Pokažite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Rješenje *Tvrdnju možemo pokazati na jediničnoj kružnici. Kod jedinične kružnice je duljina luka jednaka kutu φ kada je kut mjeren u radijanima, drugim riječima, $d_\varphi = \varphi$.*



Budući je $\sin(\varphi) = \dfrac{d}{r} = d$, vidimo sa slike

$$\varphi \to 0 \implies d \to d_\varphi$$

tj. dobijemo,

$$\varphi \to 0 \implies \frac{\sin(\varphi)}{\varphi} = \frac{d}{d_\varphi} \to 1$$

odakle slijedi traženi limes.

Primjer 7.7 Izračunajte

$$\lim_{x\to 5} \frac{\cos(8x) - \cos(40)}{x - 5}\,.$$

Rješenje *Koristimo:* $\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 5}\frac{\cos(8x)-\cos(40)}{x-5} = \frac{0}{0} &= \lim_{x\to 5}\frac{-2\sin\left(\frac{8x+40}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{8x-40}{2}\right)}{x-5}\\
&= \lim_{x\to 5}\frac{-2\sin(4x+20)\cdot\sin(4x-20)}{x-5}\\
&= \left(\lim_{x\to 5}-2\sin(4x+20)\right)\cdot\left(\lim_{x\to 5}\frac{\sin(4x-20)}{x-5}\right)\\
&= \left(\lim_{x\to 5}-2\sin(4x+20)\right)\cdot\left(\lim_{x\to 5}\frac{(4(x-5))}{x-5}\right)\\
&= -2\sin(40)\cdot\lim_{x\to 5}\frac{(4(x-5))}{x-5}
\end{aligned}$$

Koristimo: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1, \quad t = x-5 \Longrightarrow \quad \textit{za}\ x\to 5 \quad t\to 0$

$$\begin{aligned}
&= -2\sin(40)\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin(4t)}{t} = -2\sin(40)\cdot\lim_{t\to 0}\frac{4\sin(4t)}{4t}\\
&= -2\sin(40)\cdot 4\lim_{t\to 0}\frac{\sin(4t)}{4t} = -2\sin(40)\cdot 4\lim_{t\to 0}\cancelto{1}{\frac{\sin(4t)}{4t}}\\
&= -8\sin(40)
\end{aligned}$$

Primjer 7.8 Izračunajte

$$\lim_{x\to 0}\frac{6\cos(3x)-6}{5x^2}.$$

Rješenje *Koristimo:* $1-\cos(x) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{6\cos(3x)-6}{5x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{-6(-\cos(3x)+1)}{5x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-6\cdot 2\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right)}{5x^2}\\
&= -\frac{12}{5}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}{x}\right)^2 = -\frac{12}{5}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{3}{2}\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}{\frac{3}{2}x}\right)^2\\
&= -\frac{12}{5}\cdot\frac{9}{4}\lim_{x\to 0}\left(\cancelto{1}{\frac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}{\frac{3}{2}x}}\right)^2 = -\frac{27}{5}
\end{aligned}$$

Primjer 7.9 Izračunajte

$$\lim_{x\to 0}\frac{6\,\mathrm{tg}(7x)}{4\sin(3x)}.$$

Rješenje

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{6\,\mathrm{tg}(7x)}{4\sin(3x)} &= \frac{6}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(7x)}{\cos(7x)}}{\sin(3x)} = \frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(7x)}{\cos(7x)\sin(3x)}\\
&= \frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{7x\cdot\frac{\sin(7x)}{7x}}{\cos(7x)}\cdot 3x\cdot\frac{1}{(3x)\sin(3x)} = \frac{3}{2}\cdot\frac{7}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\cancelto{1}{\frac{\sin(7x)}{7x}}}{\cancelto{1}{\cos(7x)}\cdot\cancelto{1}{\frac{\sin(3x)}{3x}}} = \frac{7}{2}
\end{aligned}$$

Primjer 7.10 Izračunajte

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x .$$

Rješenje $\left\{\textit{uvedimo supstituciju}\, t=\frac{x}{k}\right\} = \{\textit{vrijedi}\, x\to\infty \implies t\to\infty\, \textit{zbog}\, k>0\}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{kt} = \lim_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^k = \left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^k =$$

$$= \left\{\textit{koristimo limes}\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\right\} = e^k$$

Primjer 7.11 Izračunajte

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{4x}\right)^{8x} .$$

Rješenje

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{4x}\right)^{8x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{4x}{5}}\right)^{8x} = \left[\left(\cancelto{e^{\frac{5}{4x}}}{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{4x}{5}}\right)^{\frac{4x}{5}}}\right)\right]^{8x}$$

$$= e^{\frac{40x}{4x}} = e^{10}$$

Primjer 7.12 Izračunajte

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{-2x} .$$

Rješenje

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{-2x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+2}{2x-1}-1\right)^{-2x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+2-2x+1}{2x-1}\right)^{-2x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3-x}{2x-1}\right)^{-2x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x-1}{3-x}}\right)^{-2x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\left(\left(1+\frac{1}{\frac{2x-1}{3-x}}\right)^{\frac{2x-1}{3-x}}\right)^{\frac{3-x}{2x-1}}\right)^{-2x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\left(\cancelto{e^{\frac{3-x}{2x-1}}}{\left(1+\frac{1}{\frac{2x-1}{3-x}}\right)^{\frac{2x-1}{3-x}}}\right)\right)^{-2x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(e^{\frac{3-x}{2x-1}}\right)^{-2x} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-6x+2x^2}{2x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-6x+2x^2}{2x-1}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{-6}{x}+2}{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}} = e^{\infty} = \infty$$

Napomena *Za polinome* $P_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ *vrijedi:*

- n *paran,* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} P_n(x) = \operatorname{sign} a_n \cdot \infty$
- n *neparan,* $\begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} P_n(x) = \operatorname{sign} a_n \cdot \infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} P_n(x) = -\operatorname{sign} a_n \cdot \infty \end{cases}$

gdje je sign *funkcija* **predznak**, *definirana na sljedeći način*

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Za racionalne funkcije vrijedi: $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + a_1 x + b_0} = \begin{cases} \textit{divergira}, & n > m \\ \dfrac{a_n}{b_m}, & n = m \\ 0, & n < m \end{cases}$

Primjer 7.13 Izračunajte

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-2x^2}{2+4x^2}.$$

Rješenje

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-2x^2}{2+4x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-2x^2}{2+4x^2} \cdot \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{2x^2}{x^2}}{\frac{2}{x^2} + \frac{4x^2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancelto{0}{\frac{1}{x^2}} - \cancelto{2}{\frac{2x^2}{x^2}}}{\cancelto{0}{\frac{2}{x^2}} + \cancelto{4}{\frac{4x^2}{x^2}}}$$

$$= \frac{0-2}{0+4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Definicija 7.11. Limes kompozicije funkcija

Neka su f, g *realne funkcije takve da je definirana* $(g \circ f)(x)$ *osim možda u točki* $x = c$ *i točki* $f(c)$. *Ako je* $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$, $L \in \mathbb{R}$ *tada vrijedi*

$$\lim_{x\to c} g(f(x)) = g(\lim_{x\to c} f(x)).$$

Neposredno iz svojstva komutacije vrijedi za potencije

- $\lim\limits_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to c} f(x)} = \sqrt[n]{L}, \quad n \in \mathbb{N}, \ \sqrt[n]{L} \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x\to c} f(x)^n = \left(\lim\limits_{x\to c} f(x)\right)^n, \quad n \in \mathbb{Z}$

Primjer 7.14 Izračunajte

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}\right)^2.$$

Rješenje

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}\right)^2 &= \left(\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}\right)^2 = \left(\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}\right)^2\\ &= \left(\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{(x-1)}(x+2)}\right)^2 = \left(\lim_{x\to1}\frac{x-2}{x+2}\right)^2\\ &= \left(\frac{1-2}{1+2}\right)^2 = \left(\frac{-1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}\end{aligned}$$

Definicija 7.12. Jednostrani limes zdesna

Za realan broj L kažemo da je **limes zdesna** *funkcije $f(x)$ u točki $x = c \in \mathbb{R}$ i pišemo*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{c}+} f(x) = L,$$

ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji realan broj $\delta > 0$ takav da vrijedi

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \mathbf{x} > \mathbf{c},\ |x-c| < \delta \implies |f(x)-L| < \epsilon\,.$$

Definicija 7.13. Jednostrani limes slijeva

Za realan broj L kažemo da je **limes slijeva** *funkcije $f(x)$ u točki $x = c \in \mathbb{R}$ i pišemo*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{c}-} f(x) = L,$$

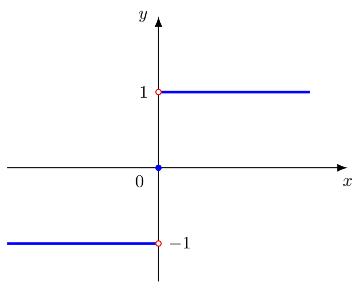
ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji realan broj $\delta > 0$ takav da vrijedi

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \mathbf{x} < \mathbf{c},\ |x-c| < \delta \implies |f(x)-L| < \epsilon\,.$$

Primjer 7.15 Pokažite kako funkcija

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & x \neq 0\\ 0, & x = 0\end{cases}$$

nema limes za $x = 0$, ali ima različite limese zdesna i slijeva u točki $x = 0$.



Rješenje *Promatramo limes slijeva funkcije* $\operatorname{sign}(x)$ *(predznak) u točki* 0

$$\lim_{x\to0-}\frac{x}{|x|} = \{\textit{koristimo definiciju}\ |x| = -x,\ x<0\} = \lim_{x\to0-}\frac{x}{-x} = -\lim_{x\to0-}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = -1$$

Na sličan način za limes zdesna dobijemo

$$\lim_{x\to 0+}\frac{x}{|x|}=\{\text{koristimo definiciju } |x|=x,\ x>0\}==\lim_{x\to 0+}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}=1$$

Prema tome vrijedi

$$\lim_{x\to 0-}\frac{x}{|x|}\neq\lim_{x\to 0+}\frac{x}{|x|}$$

odakle sljedi kako funkcija $\operatorname{sign}(x)$ *nema limes u točki* $x=0$.

Teorem 7.3. Teorem o sendviču

Neka su f,g,h *realne funkcije definirane u svim točkama otvorenog intervala* $I=\langle a,b\rangle$ *(osim možda u točki c) takve da postoje limesi* $\lim_{x\to c}f(x)$ *i* $\lim_{x\to c}g(x)$.

Tada vrijedi

1. *ako vrijedi* $f(x)\le g(x),\ \forall x\in I\setminus\{c\}$ *tad je*

$$\lim_{x\to c}f(x)\le\lim_{x\to c}g(x),$$

2. *ako još vrijedi*

$$f(x)\le h(x)\le g(x),\ \forall x\in I\setminus\{c\}\quad i\quad \lim_{x\to c}f(x)=\lim_{x\to c}g(x)=L\in\mathbb{R}$$

tada vrijedi

$$\lim_{x\to c}h(x)=L\,.$$

Primjer 7.16 Izračunajte

$$\lim_{x\to 0}x^2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Rješenje *Budući za vrijednosti funkcije kosinus vrijedi*

$$-1\le\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\le 1,$$

nejednakost se neće promijeniti ako nejednadžbu pomnožimo pozitivnim brojem x^2, *dakle vrijedi*

$$-x^2\le x^2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\le x^2,$$

to jest $x^2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ *je ograničena funkcijama* $f(x)=-x^2,\ g(x)=x^2$.

Osim toga, za limes funkcija f,g *vrijedi*

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}-x^2=-\lim_{x\to 0}x^2=-\lim_{x\to 0}g(x)=0,$$

stoga prema teoremu o sendviču zaključujemo:

$$\lim_{x\to 0}x^2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)=0.$$

Napomena *Pravila za neodređene izraze kod limesa:*

- $+\infty + \infty = +\infty$
- $-\infty - \infty = -\infty$
- $+\infty \pm \lambda = +\infty,\ \lambda \in \mathbb{R}$
- $-\infty \pm \lambda = -\infty,\ \lambda \in \mathbb{R}$
- $\pm\infty \cdot \infty = \pm\infty$
- $\lambda \cdot \infty = \begin{cases} +\infty, & \lambda > 0 \\ -\infty, & \lambda < 0 \end{cases},\ \lambda \in \mathbb{R}$
- $\pm\dfrac{\lambda}{\infty} = 0,\ \lambda \in \mathbb{R}$

Izraze oblika

$$\frac{0}{0},\ \pm\frac{\infty}{\infty},\ \infty - \infty,\ 0 \cdot \infty,\ \infty^0,\ 0^0,\ 1^\infty$$

svodimo na rješive izraze ili na drugi oblik koji rezultira skalarom.

Primjer 7.17 Izračunajte

$$\lim_{x\to\infty} 8x\left(\sqrt{4x^2+2} - 2x\right).$$

Rješenje

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} 8x\left(\sqrt{4x^2+2} - 2x\right) &= \infty\,(\infty - \infty) = \lim_{x\to\infty} 8x\left(\sqrt{4x^2+2} - 2x\right) \cdot \frac{\sqrt{4x^2+2}+2x}{\sqrt{4x^2+2}+2x} \\
&= \lim_{x\to\infty} 8x \cdot \frac{4x^2+2-4x^2}{\sqrt{4x^2+2}+2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{16x}{\sqrt{4x^2+2}+2x} = \frac{\infty}{\infty} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{16x \quad / : x}{\sqrt{4x^2+2}+2x \quad / : x} = \lim_{x\to\infty} \frac{16}{\sqrt{4+\frac{2}{x^2}}+2} \\
&= \frac{16}{\sqrt{4+\cancelto{0}{\frac{2}{\infty}}}+2} = \frac{16}{2+2} = 4
\end{aligned}$$

7.2 Asimptote funkcije

Definicija 7.14. Asimptote funkcije

Pomoću limesa definiramo asimptote za funkcije

1. $x = c$ *je vertikalna asimptota funkcije* $f(x)$, *ako vrijedi*
$$\lim_{x\to c+} f(x) = \pm\infty \text{ ili } \lim_{x\to c-} f(x) = \pm\infty$$
2. $y = L$ *je horizontalna asimptota za funkciju* $f(x)$, *ako vrijedi*
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$$
3. $y = kx + l$ *je kosa asimptota za funkciju* $f(x)$, *ako vrijedi*
$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx - l] = 0,\ k, l \in \mathbb{R}$$
uz uvjet $k \neq 0$. *Koeficijente* k, l *za kosu asimptotu određujemo u redoslijedu*
   1. $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$
   2. $l = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx]$

Primjer 7.18 Ispitajte asimptote funkcije
$$f(x) = 3 - \frac{2}{x^2}.$$

Rješenje *Iz definicije* $f(x)$ *slijedi* $x = 0$ *nije u domeni funkcije, zato provjeravamo je li* $x = 0$ *vertikalna asimptota funkcije.*

Budući je f *parna funkcija, nije potrebno zasebno provjeravati limes slijeva i zdesna u točki* $x = 0$, *već je dovoljno odrediti jedan limes. To vrijedi samo kada se radi o točki* $x = 0$ *za parne funkcije.*
$$\lim_{x\to 0}\left(3 - \frac{2}{x^2}\right) = 3 - \lim_{x\to 0}\frac{2}{x^2} = 3 - \frac{2}{0} = 3 - \infty = -\infty$$
Odakle zaključujemo kako je $x = 0$ *vertikalna asimptota funkcije.*

Horizontalnu asimptotu dobijemo iz limesa
$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(3 - \frac{2}{x^2}\right) = 3 - \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x^2} = 3 - \frac{2}{\infty} = 3 - 0 = 3,$$
tj. $y = 3$ *je horizontalna asimptota za funkciju, ujedno vrijedi, budući* **ima** *horizontalnu onda nema kosu asimptotu.*

Primjer 7.19 Odredite kosu asimptotu funkcije
$$f(x) = \frac{x^2 + 4}{x + 2}.$$

Rješenje *Odredimo k i l:*

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^2+4}{x+2}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+4}{x^2+2x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(\frac{x^2}{x^2}+\frac{4}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}\right)}=\frac{1+\cancelto{0}{\frac{4}{x^2}}}{1+\cancelto{0}{\frac{2x}{x^2}}}=\mathbf{1}$$

$$l=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+4}{x+2}-\mathbf{1}x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{4-2x}{x+2}\right)$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\cancel{x}\left(\frac{4}{x}-\frac{2x}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\frac{x}{x}+\frac{2}{x}\right)}\right)=\frac{\cancelto{0}{\frac{4}{x}}-2}{1+\cancelto{0}{\frac{2}{x}}}=-2$$

Prema tome, pravac $y=x-2$ je **kosa** *asimptota funkcije.*

Primjer 7.20 Odredite asimptote funkcije

$$f(x)=\frac{9x^2+8x-1}{x}.$$

Rješenje *Najprije ćemo odrediti domenu funkcije: $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.*

- *vertikalna asimptota: $x=0$*

$$\lim_{x\to 0}\frac{9x^2+8x-1}{x}=\frac{-1}{0}=-\infty$$

- *horizontalna asimptota:*

$$L=\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{9x^2+8x-1}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{9x^2+8x-1\quad /:x^2}{x\quad /:x^2}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{9+\cancelto{0}{\frac{8}{x}}-\cancelto{0}{\frac{1}{x^2}}}{\cancelto{0}{\frac{1}{x}}}=\frac{9}{0}=\infty\implies \textit{ne postoji}$$

- *kosa asimptota*

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{9x^2+8x-1}{x}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{9x^2+8x-1}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{9x^2+8x-1\quad /:x^2}{x^2\quad /:x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{9+\cancelto{0}{\frac{8}{x}}-\cancelto{0}{\frac{1}{x^2}}}{1}=9$$

$$l=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{9x^2+8x-1}{x}-9x\right]$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{9x^2+8x-1-9x^2}{x}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{8x-1\quad /:x}{x\quad /:x}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{8-\cancelto{0}{\frac{1}{x}}}{1}\right]=8$$

kosa asimptota: $y=9x+8$.

Primjer 7.21 Ispitajte asimptote funkcije

$$f(x)=\frac{-4x^2+3x+2}{x^2+2x+1}.$$

Rješenje *Najprije ćemo odrediti domenu funkcije:*

$$x^2+2x+1\neq 0\implies (x+1)^2\neq 0\implies x\neq -1\implies D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$$

- *vertikalna asimptota:* $x = -1$
$$\lim_{x\to -1} \frac{-4x^2+3x+2}{x^2+2x+1} = \frac{-5}{0} = -\infty$$
- *horizontalna asimptota:*
$$L = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-4x^2+3x+2}{x^2+2x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-4x^2+3x+2 \quad /:x^2}{x^2+2x+1 \quad /:x^2}$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-4+\cancelto{0}{\frac{3}{x}}+\cancelto{0}{\frac{2}{x^2}}}{1+\cancelto{0}{\frac{2}{x}}+\cancelto{0}{\frac{1}{x^2}}} = -4$$
$\Rightarrow$ *horizontalna asimptota je* $y = -4$
- *kosa asimptota: budući postoji horizontalna asimptota za* $x \to \pm\infty$ *(obostrana horizontalna asimptota) zaključujemo da funkcija nema kosu asimptotu.*

Primjer 7.22 Ispitajte asimptote funkcije
$$f(x) = \frac{2x+3}{x^2+1}.$$

Rješenje *Najprije ćemo odrediti domenu funkcije:*
$$x^2+1 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad D_f = \mathbb{R}$$

- *vertikalna asimptota: ne postoji*
- *horizontalna asimptota:*
$$L = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+3}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+3 \quad /:x^2}{x^2+1 \quad /:x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancelto{0}{\frac{2}{x}}+\cancelto{0}{\frac{3}{x^2}}}{1+\cancelto{0}{\frac{1}{x^2}}} = 0$$
$\Rightarrow$ *horizontalna asimptota je* $y = 0$
- *kosa asimptota: iz istog razloga kao u prethodnom primjeru zaključujemo da funkcija nema kosu asimptotu.*

Primjer 7.23 Ispitajte asimptote funkcije
$$f(x) = \frac{8}{6-e^x}.$$

Rješenje *Najprije ćemo odrediti domenu funkcije:*
$$6-e^x \neq 0 \Longrightarrow e^x \neq 6 \Longrightarrow x \neq \ln(6) \Longrightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{\ln(6)\}$$

- *vertikalna asimptota:* $x = \ln 6$
- *horizontalna asimptota:*
$$L_1 = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{8}{6-e^x} = \frac{8}{6-e^\infty} = \frac{8}{6-\infty} = \frac{8}{\infty} = 0$$
$\Rightarrow$ *(desna) horizontalna asimptota je* $y = 0$ *kada* $x \to \infty$
$$L_2 = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{8}{6-e^x} = \frac{8}{6-e^{-\infty}} = \frac{8}{6-0} = \frac{4}{3}$$

$\Rightarrow$ *(lijeva) horizontalna asimptota je* $y = \frac{4}{3}$ *kada* $x \to -\infty$

- *kosa asimptota: zbog postojanja lijeve i desne horizontalne asimptote možemo zaključiti da funkcija nema kosu asimptotu.*

Primjer 7.24 Ispitajte asimptote funkcije

$$f(x) = e^{\frac{1}{2x+1}}.$$

Rješenje *Najprije ćemo odrediti domenu funkcije:*

$$2x + 1 \neq 0 \Longrightarrow x \neq -\frac{1}{2} \Longrightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

- *vertikalna asimptota:* $x = -\frac{1}{2}$
- *horizontalna asimptota:*

$$L_1 = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{2x+1}} = e^{\cancelto{0}{\frac{1}{\infty}}} = e^0 = 1$$

$\Rightarrow$ *horizontalna asimptota je* $y = 1$ *kada* $x \to \infty$

$$L_2 = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{2x+1}} = e^{\cancelto{0}{\frac{1}{-\infty}}} = e^0 = 1$$

$\Rightarrow$ *horizontalna asimptota je* $y = 1$ *kada* $x \to -\infty$

$\Rightarrow$ *horizontalna asimptota je* $y = 1$ *kada* $x \to \pm\infty$

- *kosa asimptota: zbog postojanja obostrane horizontalne asimptote zaključujemo da funkcija nema kosu asimptotu.*

Primjer 7.25 Ispitajte asimptote funkcije

$$f(x) = \ln(4x - 2).$$

Rješenje *Najprije ćemo odrediti domenu funkcije:*

$$4x - 2 > 0 \Longrightarrow x > \frac{1}{2} \Longrightarrow D_f = \left\langle \frac{1}{2}, \infty \right\rangle$$

- *vertikalna asimptota:* $x = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}+} \ln(4x - 2) = \ln\left(4 \cdot \frac{1}{2} - 2\right) = \ln(0) = -\infty$$

- *horizontalna asimptota:*

$$L = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \ln(4x - 2) = \ln(4 \cdot \infty - 2) = \infty$$

$\Rightarrow$ *horizontalna asimptota ne postoji*

- *kosa asimptota:*

$$
\begin{aligned}
k &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(4x-2\right)}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \ln\left(4x-2\right)^{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \ln \sqrt[x]{4x-2} = \left\{ \textit{Koristimo: } \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[x]{x-a} = 1 \right\} \\
&= \lim_{x\to\infty} \ln \sqrt[x]{4(x-\frac{1}{2})} = \lim_{x\to\infty} \ln \left(\sqrt[x]{4} \cdot \sqrt[x]{x-\frac{1}{2}} \right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \ln \left(\cancelto{1}{4^{\frac{1}{x}}} \cdot \cancelto{1}{\sqrt[x]{x-\frac{1}{2}}} \right) = \ln\left(1\right) = 0
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ *kosa asimptota ne postoji*

7.3 Zadaci za vježbu

✍ **Zadatak 7.1** Izračunajte:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2+2x-8}$

b) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2-x-20}{x^2+x-12}$

c) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x+4}{x+4}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+3x^2+4x+5}{2x^3+3x+4x^2}$

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x+3}{x^2+3x+1}$

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x}$

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+x}{x+1}\right)^{4x}$

j) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{-x}$

k) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^3-1}$

l) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x+2)}{x+2}$

m) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{7\sin(3x)}$

n) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\,\mathrm{tg}(5x)}{3\sin(2x)}$

o) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$

Rješenje

a) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{9}{7}$

c) $\frac{4}{3}$

d) $+\infty$

e) 2

f) 0

g) $\sqrt{2}$

h) e^6

i) e^4

j) e^{-1}

k) $\frac{1}{3}$

l) $\frac{\sin(2)}{2}$

m) $\frac{4}{21}$

n) $\frac{5}{3}$

o) 1

✍ **Zadatak 7.2** Odredite asimptote sljedećih funkcija

a) $f(x)=\dfrac{x+2}{x-3}$

b) $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x-4}$

c) $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x^2-1}$

d) $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-4}$

e) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

f) $f(x)=\dfrac{x-4}{(x-1)^2}$

g) $f(x)=x+\dfrac{1}{x^2}$

h) $f(x)=x+\dfrac{2}{x}$

i) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}$

j) $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2$

k) $f(x)=\left(1-x^2\right)^2$

l) $f(x)=\left(x^2-1\right)\cdot e^x$

m) $f(x)=\dfrac{1}{x\cdot e^{2x}}$

n) $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{x}$

o) $f(x) = \dfrac{1}{1-e^x}$

p) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

q) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$

r) $f(x) = -x \cdot \ln(2x)$

Rješenje

a) *V.A.* $x = 3$, *H.A.* $y = 1$, *K.A. nema*

b) *V.A.* $x = 4$, *H.A. nema, K.A.* $y = x + 4$

c) *V.A.* $x = \pm 1$, *H.A.* $y = 1$, *K.A. nema*

d) *V.A.* $x = \pm 2$, *H.A.* $y = 0$, *K.A. nema*

e) *V.A. nema, H.A.* $y = 0$, *K.A. nema*

f) *V.A.* $x = 1$, *H.A.* $y = 0$

g) *V.A.* $x = 0$, *K.A.* $y = x$

h) *V.A.* $x = 0$, *K.A.* $y = x$

i) *V.A.* $x = 0$, *H.A.* $y = 0$

j) *V.A.* $x = 0$, *H.A.* $y = 1$

k) *nema asimptota*

l) *H.A.* $y = 0$ *za* $x \to -\infty$

m) *V.A.* $x = 0$, *H.A.* $y = 0$ *za* $x \to +\infty$

n) *V.A.* $x = 0$, *H.A.* $y = 0$ *za* $x \to +\infty$

o) *V.A.* $x = 0$, *H.A.* $y_1 = 0,\ y_2 = 1$

p) *V.A.* $x = 0$, *H.A.* $y = 1$

q) *V.A.* $x = 0$, *H.A.* $y = 0$

r) *nema asimptota*

Poglavlje

Derivacija funkcije

Uvod

- *Derivacija funkcije*
- *Tangenta i normala na funkciju*
- *Kut između krivulja*
- *Stacionarne točke, lokalni ekstremi i monotonost funkcije*
- *Točka infleksije i intervali zakrivljenosti funkcije*
- *L'Hospitalovo pravilo*
- *Taylorov i MacLaurinov red*

8.1 Derivacija funkcije

Definicija 8.1. Derivacija funkcije

Za realnu funkciju $f(x)$ definiranu na otvorenom intervalu $\langle a,b\rangle$ kažemo kako ima derivaciju ili da je diferencijabilna u točki $c\in\langle a,b\rangle$, ako postoji

$$f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}.$$

Za realnu funkciju $f(x)$ koja je diferencijabilna na otvorenom intervalu $\langle a,b\rangle$ kažemo da ima drugu derivaciju u točki c iz tog intervala, ako postoji

$$f''(c)=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)-f'(c)}{x-c}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(c+\Delta x)-f'(c)}{\Delta x}.$$

Ukoliko postoji, derivacija n-tog reda funkcije $f(x)$ u točki c iz intervala $\langle a,b\rangle$, tada je ona derivacija od $n-1$ derivacije funkcije u toj točki, tj. vrijedi

$$f^{(n)}(c)=\left(f^{(n-1)}(c)\right)'.$$

Definicija 8.2. Pravila deriviranja

Neka su funkcije f,g diferencijabilne na otvorenom intervalu $I=\langle a,b\rangle$, tada za svaki $x\in I$ vrijedi

1. $(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$
2. $(\lambda f(x))'=\lambda f'(x),\ \lambda\in\mathbb{R}$
3. $(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
4. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$ *za* $g(x)\neq 0$
5. $(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)$

Tablica 8.1: Tablica derivacija elementarnih funkcija

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
c	0	e^x	e^x	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
x^a	ax^{a-1}	a^x	$a^x \ln(a)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\mathrm{tg}(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathrm{arctg}(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\log_a(x)$	$\frac{1}{x\ln(a)}$	$\mathrm{ctg}(x)$	$\frac{-1}{\sin^2(x)}$	$\mathrm{arcctg}(x)$	$\frac{-1}{1+x^2}$

Definicija 8.3. Pravilo lančanog deriviranja

Neka su h, g, f diferencijabilne funkcije takve da je definirana složena funkcija $h(g(f(x)))$, tada vrijedi pravilo lančanog deriviranja

$$h\left(g(f(x))\right)' = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}g} \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}f} \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

Definicija 8.4. Derivacija inverzne funkcije

Neka je $f(x)$ neprekidna bijekcija definirana na otvorenom intervalu $\langle a, b\rangle$ takva da je definirana $f^{-1}(y)$, tj. vrijedi $y = f(x)$ tada pravilo za derivaciju inverzne funkcije glasi

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)}, \quad \forall f'(x) \neq 0$$

Primjer 8.1 Odredite prvu derivaciju funkcije

$$f(x) = 8x^2 - \frac{4}{x^5} + \frac{x^3}{\sqrt{x}} - \sqrt[3]{x^2}\,.$$

Rješenje *Zapisat ćemo funkciju u obliku potencija varijable x te primijeniti pravila linearnosti derivacije (1. i 2.) i pravilo derivacije potencije.*

$$f(x) = 8x^2 - \frac{4}{x^5} + \frac{x^3}{\sqrt{x}} - \sqrt[3]{x^2} = 8x^2 - 4x^{-5} + x^{3-\frac{1}{2}} - x^{\frac{2}{3}} = 8x^2 - 4x^{-5} + x^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = 16x^{2-1} + 20x^{-5-1} + \frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1} - \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = 16x + 20x^{-6} + \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$= 16x + \frac{20}{x^6} + \frac{5x\sqrt{x}}{2} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

Primjer 8.2 Odredite prvu derivaciju funkcije

$$f(x) = \frac{\frac{1}{x} + \sqrt[3]{\frac{1}{x^4}}}{\sqrt[4]{\frac{1}{x^9}}}\,.$$

Rješenje

$$f(x) = \frac{\frac{1}{x} + \sqrt[3]{\frac{1}{x^4}}}{\sqrt[4]{\frac{1}{x^9}}} = \frac{x^{-1} + x^{-\frac{4}{3}}}{x^{-\frac{9}{4}}} = \frac{x^{-1}}{x^{-\frac{9}{4}}} + \frac{x^{-\frac{4}{3}}}{x^{-\frac{9}{4}}} = x^{-1+\frac{9}{4}} + x^{-\frac{4}{3}+\frac{9}{4}} = x^{\frac{5}{4}} + x^{\frac{11}{12}}$$

$$f'(x) = \frac{5}{4}x^{\frac{5}{4}-1} + \frac{11}{12}x^{\frac{11}{12}-1} = \frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}} + \frac{11}{12}x^{-\frac{1}{12}} = \frac{5\sqrt[4]{x}}{4} + \frac{11}{12\sqrt[12]{x}}$$

Primjer 8.3 Odredite prvu derivaciju funkcije

$$f(x) = (2x^2 + 3x) \cdot e^x \,.$$

Rješenje *Primjenjujemo pravilo derivacije umnoška dviju funkcija.*

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x^2+3x)' \cdot e^x + (2x^2+3x) \cdot (e^x)' = (4x+3) \cdot e^x + (2x^2+3x) \cdot e^x \\ &= e^x \cdot (2x^2 + 7x + 3) \end{aligned}$$

Primjer 8.4 Odredite prvu derivaciju funkcije

$$f(x) = \frac{3x+1}{x^2-1}.$$

Rješenje *Primjenjujemo pravilo za derivaciju kvocijenta dviju funkcija.*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x+1)' \cdot (x^2-1) - (3x+1) \cdot (x^2-1)'}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{3 \cdot (x^2-1) - (3x+1) \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^2 - 3 - 6x^2 - 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-3x^2-2x-3}{(x^2-1)^2} \end{aligned}$$

Primjer 8.5 Odredite prvu derivaciju funkcije

$$f(x) = \left(4x^3 - \frac{1}{x}\right)^5.$$

Rješenje *Funkcija je složena te primjenjujemo pravilo lančanog deriviranja.*

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(4x^3 - \frac{1}{x}\right)^5 = \left(4x^3 - x^{-1}\right)^5 \\ f'(x) &= 5\left(4x^3 - x^{-1}\right)^{5-1} \cdot \left(4x^3 - x^{-1}\right)' = 5\left(4x^3 - x^{-1}\right)^4 \cdot \left(12x^{3-1} - (-1)x^{-1-1}\right) \\ &= 5\left(4x^3 - \frac{1}{x}\right)^4 \cdot \left(12x^2 + x^{-2}\right) = 5\left(4x^3 - \frac{1}{x}\right)^4 \cdot \left(12x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

Primjer 8.6 Odredite prvu derivaciju funkcije

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

Rješenje

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\frac{x}{x+1}} \cdot \left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{\cancel{x+1}}{x} \cdot \frac{x' \cdot (x+1) - x \cdot (x+1)'}{\cancel{(x+1)^2}} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1 \cdot (x+1) - x \cdot 1}{x+1} \\ &= \frac{1}{x} \cdot \frac{x+1-x}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)} \end{aligned}$$

Primjer 8.7 Odredite prvu derivaciju funkcije

$$f(x) = \ln(\sin(2x)).$$

Rješenje

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sin(2x)} \cdot (\sin(2x))' = \frac{1}{\sin(2x)} \cdot \cos(2x) \cdot (2x)' = \frac{1}{\sin(2x)} \cdot \cos(2x) \cdot 2 \\ &= 2\operatorname{ctg}(2x) \end{aligned}$$

Primjer 8.8 Odredite prvu derivaciju funkcije

$$f(x) = \ln^3 \sqrt{-x+1}.$$

Rješenje

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\ln^2 \sqrt{-x+1} \cdot \left(\ln \sqrt{-x+1}\right)' = 3\ln^2 \sqrt{-x+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{-x+1}} \cdot \left(\sqrt{-x+1}\right)' \\ &= 3\ln^2 \sqrt{-x+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{-x+1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{-x+1}} \cdot (-x+1)' \\ &= 3\ln^2 \sqrt{-x+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{-x+1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{-x+1}} \cdot (-1) \\ &= -3\ln^2 \sqrt{-x+1} \cdot \frac{1}{2(-x+1)} = \frac{-3}{2(-x+1)} \cdot \ln^2 \sqrt{-x+1} \end{aligned}$$

Primjer 8.9 Odredite prvu derivaciju funkcije

$$f(x) = \frac{1+e^{2x}}{e^{2x}+2}.$$

Rješenje

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1+e^{2x})' \cdot (e^{2x}+2) - (1+e^{2x}) \cdot (e^{2x}+2)'}{(e^{2x}+2)^2} \\ &= \frac{e^{2x} \cdot (2x)' \cdot (e^{2x}+2) - (1+e^{2x}) \cdot e^{2x} \cdot (2x)'}{(e^{2x}+2)^2} \\ &= \frac{2e^{2x} \cdot (e^{2x}+2) - (1+e^{2x}) \cdot 2e^{2x}}{(e^{2x}+2)^2} \\ &= \frac{2e^{2x} \cdot (e^{2x}+2-1-e^{2x})}{(e^{2x}+2)^2} \\ &= \frac{2e^{2x}}{(e^{2x}+2)^2} \end{aligned}$$

Primjer 8.10 Odredite prvu derivaciju funkcije

$$f(x) = \sqrt{\frac{-6\ln(x)+3}{\ln(x)-1}}.$$

Rješenje

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{-6\ln(x)+3}{\ln(x)-1}}} \cdot \left(\frac{-6\ln(x)+3}{\ln(x)-1}\right)' \\
&= \frac{\sqrt{\ln(x)-1}}{2\sqrt{-6\ln(x)+3}} \cdot \frac{(-6\ln(x)+3)' \cdot (\ln(x)-1) - (-6\ln(x)+3)\cdot(\ln(x)-1)'}{(\ln(x)-1)^2} \\
&= \frac{\sqrt{\ln(x)-1}}{2\sqrt{-6\ln(x)+3}} \cdot \frac{\frac{-6}{x} \cdot (\ln(x)-1) - (-6\ln(x)+3)\cdot \frac{1}{x}}{(\ln(x)-1)^2} \\
&= \frac{\sqrt{\ln(x)-1}}{2\sqrt{-6\ln(x)+3}} \cdot \frac{-\frac{1}{x}\left(6\ln(x)-6-6\ln(x)+3\right)}{(\ln(x)-1)^2} \\
&= \frac{\sqrt{\ln(x)-1}}{2\sqrt{-6\ln(x)+3}} \cdot \frac{\frac{3}{x}}{(\ln(x)-1)^2} = \frac{3\sqrt{\ln(x)-1}}{2x(\ln(x)-1)^2\sqrt{-6\ln(x)+3}}
\end{aligned}
$$

Primjer 8.11 Odredite prvu derivaciju funkcije

$$f(x) = (2\arccos(2x) + \arcsin(3x))^8.$$

Rješenje

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 8\left(2\arccos(2x) + \arcsin(3x)\right)^7 \cdot \left(2\arccos(2x) + \arcsin(3x)\right)' \\
&= 8\left(2\arccos(2x) + 2\arcsin(3x)\right)^7 \cdot \left(2 \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-(2x)^2}} \cdot (2x)' + \frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}} \cdot (3x)'\right) \\
&= 8\left(2\arccos(2x) + 2\arcsin(3x)\right)^7 \cdot \left(\frac{-4}{\sqrt{1-4x^2}} + \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}\right)
\end{aligned}
$$

Primjer 8.12 Odredite prvu derivaciju funkcije

$$f(x) = \ln\left(\operatorname{arctg}\sqrt{5x^2-3}\right).$$

Rješenje

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{\operatorname{arctg}\sqrt{5x^2-3}} \cdot \left(\operatorname{arctg}\sqrt{5x^2-3}\right)' \\
&= \frac{1}{\operatorname{arctg}\sqrt{5x^2-3}} \cdot \frac{1}{1+\left(\sqrt{5x^2-3}\right)^2} \cdot \left(\sqrt{5x^2-3}\right)' \\
&= \frac{1}{\operatorname{arctg}\sqrt{5x^2-3}} \cdot \frac{1}{1+5x^2-3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5x^2-3}} \cdot (5x^2-3)' \\
&= \frac{1}{\operatorname{arctg}\sqrt{5x^2-3}} \cdot \frac{1}{5x^2-2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5x^2-3}} \cdot 10x \\
&= \frac{1}{\operatorname{arctg}\sqrt{5x^2-3}} \cdot \frac{1}{5x^2-2} \cdot \frac{5x}{\sqrt{5x^2-3}}
\end{aligned}
$$

Primjer 8.13 Odredite prvu derivaciju funkcije

$$f(x) = -4x \cdot \arcsin^2\sqrt{x}.$$

Rješenje

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-4x)' \cdot \arcsin^2 \sqrt{x} - 4x \cdot (\arcsin^2 \sqrt{x})' \\ &= -4 \cdot \arcsin^2 \sqrt{x} - 4x \cdot 2 \arcsin \sqrt{x} \cdot (\arcsin \sqrt{x})' \\ &= -4 \cdot \arcsin^2 \sqrt{x} - 8x \arcsin \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \cdot (\sqrt{x})' \\ &= -4 \cdot \arcsin^2 \sqrt{x} - \cancel{8}x \arcsin \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}} \\ &= -4 \cdot \arcsin^2 \sqrt{x} - \frac{4x}{\sqrt{x(1-x)}} \cdot \arcsin \sqrt{x} \end{aligned}$$

Primjer 8.14 Odredite prvu derivaciju funkcije

$$f(x) = e^{-\operatorname{arctg}(-2x+3)}.$$

Rješenje

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-\operatorname{arctg}(-2x+3)} \cdot (-\operatorname{arctg}(-2x+3))' \\ &= e^{-\operatorname{arctg}(-2x+3)} \cdot \left(-\frac{1}{1+(-2x+3)^2}\right) \cdot (-2x+3)' \\ &= e^{-\operatorname{arctg}(-2x+3)} \cdot \left(-\frac{1}{1+(-2x+3)^2}\right) \cdot (-2) \\ &= e^{-\operatorname{arctg}(-2x+3)} \cdot \frac{2}{1+(-2x+3)^2} \\ &= \frac{2}{4x^2-12x+10} \cdot e^{-\operatorname{arctg}(-2x+3)} \\ &= \frac{1}{2x^2-6x+5} \cdot e^{-\operatorname{arctg}(-2x+3)} \end{aligned}$$

Primjer 8.15 Odredite $f'(0)$ ako je $f(x) = \sin\left(x^5\right)$.

Rješenje *Prvo je potrebno odrediti derivaciju funkcije $f'(x)$, a potom se računa vrijednost dobivene funkcije u točki $x = 0$.*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos\left(x^5\right) \cdot \left(x^5\right)' = \cos\left(x^5\right) \cdot 5x^4 \\ f'(0) &= \cos\left(0^5\right) \cdot 5 \cdot 0^4 = 0 \end{aligned}$$

Primjer 8.16 Odredite $f''(1)$ ako je $f(x) = \ln\left(2x^2+1\right)$.

Rješenje

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2x^2+1} \cdot \left(2x^2+1\right)' = \frac{1}{2x^2+1} \cdot 4x = \frac{4x}{2x^2+1} \\ f''(x) &= \frac{(4x)' \cdot (2x^2+1) - 4x \cdot (2x^2+1)'}{(2x^2+1)^2} = \frac{4 \cdot (2x^2+1) - 4x \cdot 4x}{(2x^2+1)^2} = \frac{8x^2+4-16x^2}{(2x^2+1)^2} \\ &= \frac{-8x^2+4}{(2x^2+1)^2} \\ f''(1) &= \frac{-8 \cdot 1^2+4}{(2 \cdot 1^2+1)^2} = -\frac{4}{9} \end{aligned}$$

Primjer 8.17 Odredite $f'''(1)$ ako je $f(x) = e^{x^2}$.

Rješenje

$$\begin{aligned}
f'(x) &= e^{x^2} \cdot \left(x^2\right)' = e^{x^2} \cdot 2x \\
f''(x) &= \left(e^{x^2}\right)' \cdot 2x + e^{x^2} \cdot (2x)' = e^{x^2} \cdot \left(x^2\right)' \cdot 2x + e^{x^2} \cdot 2 = e^{x^2} \cdot 2x \cdot 2x + e^{x^2} \cdot 2 \\
&= e^{x^2}\left(4x^2 + 2\right) \\
f'''(x) &= \left(e^{x^2}\right)' \cdot \left(4x^2 + 2\right) + e^{x^2}\left(4x^2 + 2\right)' = e^{x^2} \cdot \left(x^2\right)' \cdot \left(4x^2 + 2\right) + e^{x^2} \cdot 8x \\
&= e^{x^2} \cdot 2x \cdot \left(4x^2 + 2\right) + e^{x^2} \cdot 8x = e^{x^2}\left(8x^3 + 4x + 8x\right) = e^{x^2}\left(8x^3 + 12x\right) \\
f'''(1) &= e^{1^2}\left(8 \cdot 1^3 + 12 \cdot 1\right) = e(8 + 12) = 20e
\end{aligned}$$

Definicija 8.5. Pravilo logaritamskog deriviranja

Neka su f, g diferencijabilne funkcije definirane na otvorenom intervalu $\langle a, b\rangle$. Tada je funkcija

$$h(x) = f(x)^{g(x)}$$

diferencijabilna na tom istom intervalu i vrijedi pravilo logaritamskog deriviranja

$$h'(x) = f(x)^{g(x)}\left[g'(x)\ln(f(x)) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right].$$

Primjer 8.18 Odredite prvu derivaciju funkcije

$$f(x) = (x+1)^{2x}.$$

Rješenje *Na zadanu funkciju ne možemo primijeniti do sada naučena pravila deriviranja budući da nije niti potencija niti eksponencijalna funkcija. Stoga logaritmiramo jednakost i deriviramo jednadžbu primjenjujući pravila za deriviranje složene funkcije i tablične derivacije na lijevu i desnu stranu te konačno iz jednadžbe izrazimo traženu derivaciju funkcije.*

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x+1)^{2x} \quad \Big/ \ln \\
\ln f(x) &= \ln\left[(x+1)^{2x}\right] \\
\ln f(x) &= 2x \cdot \ln(x+1) \quad \Big/ ' \\
\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) &= (2x)' \cdot \ln(x+1) + 2x \cdot (\ln(x+1))' \\
\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) &= 2 \cdot \ln(x+1) + 2x \cdot \frac{1}{x+1} \cdot (x+1)' \\
\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) &= 2 \cdot \ln(x+1) + \frac{2x}{x+1} \quad \Big/ \cdot f(x) \\
f'(x) &= f(x) \cdot \left[2 \cdot \ln(x+1) + \frac{2x}{x+1}\right] \\
f'(x) &= (x+1)^{2x} \cdot \left[2 \cdot \ln(x+1) + \frac{2x}{x+1}\right]
\end{aligned}
$$

Primjer 8.19 Odredite prvu derivaciju funkcije

$$f(x) = x^{\cos(5x)}.$$

Rješenje

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^{\cos(5x)} \quad \Big/ \ln \\
\ln f(x) &= \ln\left[x^{\cos(5x)}\right] \\
\ln f(x) &= \cos(5x) \cdot \ln(x) \quad \Big/ ' \\
\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) &= (\cos(5x))' \cdot \ln(x) + \cos(5x) \cdot (\ln(x))' \\
\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) &= -\sin(5x) \cdot (5x)' \cdot \ln(x) + \cos(5x) \cdot \frac{1}{x} \\
\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) &= -\sin(5x) \cdot 5 \cdot \ln(x) + \cos(5x) \cdot \frac{1}{x} \\
\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) &= -5\sin(5x) \cdot \ln(x) + \frac{1}{x} \cdot \cos(5x) \quad \Big/ \cdot f(x) \\
f'(x) &= f(x) \cdot \left[-5\sin(5x) \cdot \ln(x) + \frac{1}{x} \cdot \cos(5x)\right] \\
f'(x) &= x^{\cos(5x)} \cdot \left[-5\sin(5x) \cdot \ln(x) + \frac{1}{x} \cdot \cos(5x)\right]
\end{aligned}
$$

Definicija 8.6. Pravilo deriviranja implicitno zadane funkcije

Neka su varijable x i y zapisane u obliku jednadžbe $F(x,y) = 0$ koja implicitno definira funkciju $y(x)$. Derivaciju $y'(x)$ nalazimo lančanim deriviranjem jednadžbe uz pravilo $f(y)' = f'(y) \cdot y'$.

Primjer 8.20 Odredite prvu derivaciju implicitno zadane funkcije

$$y^3 + y^2 \cdot x + 3x + 4 = 0\,.$$

Rješenje

$$\begin{aligned} y^3 + y^2 \cdot x + 3x + 4 &= 0 \quad \Big/' \\ 3y^2 \cdot y' + (y^2)' \cdot x + y^2 \cdot (x)' + 3 + 0 &= 0 \\ 3y^2 \cdot y' + 2y \cdot y' \cdot x + y^2 \cdot 1 + 3 &= 0 \\ y' \cdot \left(3y^2 + 2yx\right) + y^2 + 3 &= 0 \\ y' \cdot \left(3y^2 + 2yx\right) &= -y^2 - 3 \\ y' &= \frac{-y^2 - 3}{3y^2 + 2yx} \end{aligned}$$

Primjer 8.21 Odredite prvu derivaciju implicitno zadane funkcije

$$x^3 + 2x^2y^2 + 2y^3 = 6\,.$$

Rješenje

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2y^2 + 2y^3 &= 6 \quad \Big/' \\ 3x^2 + 4x \cdot y^2 + 2x^2 \cdot 2y \cdot y' + 6y^2 \cdot y' &= 0 \\ y' \cdot \left(4x^2 \cdot y + 6y^2\right) &= -3x^2 - 4x \cdot y^2 \\ y' &= \frac{-3x^2 - 4xy^2}{4x^2y + 6y^2} \end{aligned}$$

Primjer 8.22 Odredite prvu derivaciju implicitno zadane funkcije

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) - \ln\sqrt{x^2 + y^2} = 0\,.$$

Rješenje

$$
\begin{aligned}
\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) - \ln\sqrt{x^2+y^2} &= 0 \quad \Big/\,' \\
\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)' - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)' &= 0 \\
\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\left((y)'\cdot\frac{1}{x} + y\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'\right) - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot(x^2+y^2)' &= 0 \\
\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\left(y'\cdot\frac{1}{x} - y\cdot\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{2(x^2+y^2)}\cdot(2x+2y\cdot y') &= 0 \\
y'\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\cdot\frac{\cancel{x^2}}{x^2+y^2} - \frac{\cancel{x^2}}{x^2+y^2}\cdot y\cdot\frac{1}{\cancel{x^2}} - \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{1}{x^2+y^2}\cdot y\cdot y' &= 0 \\
y'\cdot\left(\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}\right) - \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{x}{x^2+y^2} &= 0 \\
y'\cdot\frac{x-y}{x^2+y^2} &= \frac{x+y}{x^2+y^2} \\
y' &= \frac{x+y}{x-y}
\end{aligned}
$$

Definicija 8.7. Deriviranje parametarski zadane funkcije

Za realnu funkciju na otvorenom intervalu kažemo da je zadana parametarski, ako su nezavisna varijabla x i zavisna varijabla y funkcije parametra $t \in \langle a, b\rangle$, tj. $x = x(t), y = y(t)$.

Parametarski zadanu funkciju $x = x(t), y = y(t)$ deriviramo prema

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}.$$

Primjer 8.23 Odredite derivaciju funkcije

$$x(t) = t^3, \quad y(t) = t.$$

Rješenje

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= 3t^2, \quad y'(t) = 1 \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(t) &= \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{1}{3t^2}
\end{aligned}
$$

Primjer 8.24 Odredite derivaciju funkcije

$$x(t) = t(1-\sin(t)), \quad y(t) = t\cos(t).$$

Rješenje

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= 1 - \sin(t) + t(-\cos(t)) = 1 - \sin(t) - t\cos(t) \\
y'(t) &= \cos(t) - t\sin(t) \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(t) &= \frac{\cos(t) - t\sin(t)}{1 - \sin(t) - t\cos(t)}
\end{aligned}
$$

Primjer 8.25 Odredite derivaciju funkcije

$$x(t) = \frac{1+t^3}{t^2-1}, \quad y(t) = \frac{t}{t^2-1}\,.$$

Rješenje

$$x'(t) = \frac{3t^2\cdot(t^2-1)-(1+t^3)\cdot 2t}{(t^2-1)^2} = \frac{3t^4-3t^2-2t-2t^4}{(t^2-1)^2} = \frac{t^4-3t^2-2t}{(t^2-1)^2}$$

$$y'(t) = \frac{t^2-1-t\cdot 2t}{(t^2-1)^2} = \frac{-t^2-1}{(t^2-1)^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(t) = \frac{\frac{-t^2-1}{(t^2-1)^2}}{\frac{t^4-3t^2-2t}{(t^2-1)^2}} = \frac{-t^2-1}{t^4-3t^2-2t} = \frac{t^2+1}{-t^4+3t^2+2t}$$

Definicija 8.8. Linearna aproksimacija

Polinom oblika

$$P(x) = f'(c)(x-c)+f(c)$$

je najbolja aproksimacija funkcije $f(x)$ u okolini točke c.

Primjer 8.26 Izračunajte približno $f(2.01)$ za funkciju

$$f(x) = x^2\,.$$

Rješenje *Pomoću izraza za derivaciju funkcije $f'(x) = 2x$, možemo odrediti polinom za linearnu aproksimaciju funkcije u blizini točke $c = 2$.*

$$f'(2) = 2\cdot 2 = 4 \Longrightarrow P(x) = f'(2)(x-2)+f(2) = 4(x-2)+4 = 4x-4$$

Uvrštenjem za $x = 2.01$ dobijemo za približnu vrijednost funkcije

$$f(2.01) \approx P(2.01) = 4\cdot 2.01 - 4 = 4.04$$

dok je točna vrijednost $f(2.01) = 4.0401$.

8.2 Tangenta i normala na funkciju

Definicija 8.9. Tangenta i normala

Ako funkcija $f(x)$ ima derivaciju u točki $T_0(x_0, f(x_0))$, tada je jednadžba ***tangente*** *na graf funkcije zadana formulom:*

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)\,.$$

Ako funkcija $f(x)$ ima derivaciju u točki $T_0(x_0, f(x_0))$, i vrijedi $f'(x_0) \neq 0$ tada je jednadžba ***normale*** *na graf funkcije zadana formulom:*

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)\,.$$

Primjer 8.27 Odredite jednadžbu tangente i normale na krivulju $y = \sqrt{x}$ u točki s apscisom $x_0 = 4$.

Rješenje *Odredimo točku T_0:*

$$x_0 = 4 \Longrightarrow y_0 = \sqrt{4} = 2 \Longrightarrow T_0 = (4, 2)$$

Koeficijent smjera tangente, odnosno normale, dobit ćemo pomoću prve derivacije funkcije u točki x_0:

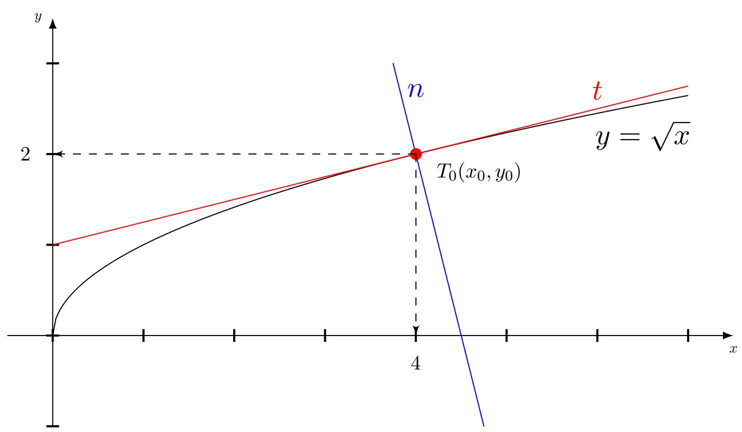
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

$$t \ldots y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$t \ldots y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{4}x + 1$$

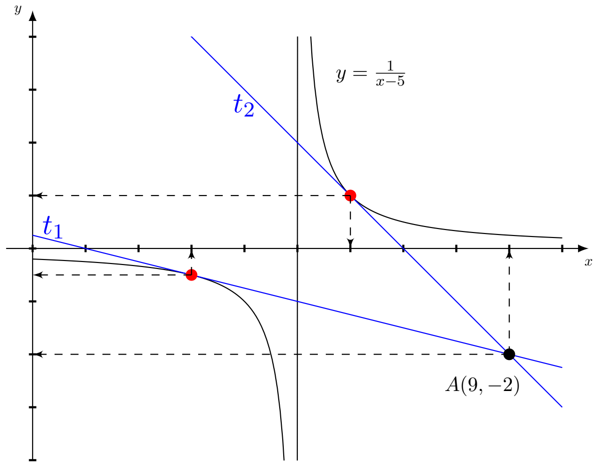
$$n \ldots y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

$$n \ldots y - 2 = -4(x - 4) \quad \Rightarrow \quad y = -4x + 18$$



Primjer 8.28 Odredite jednadžbe tangenti povučenih iz točke $A(9,-2)$ na graf funkcije $y = \dfrac{1}{x-5}$.

Rješenje



$$f'(x) = \frac{0\cdot(x-5) - 1\cdot 1}{(x-5)^2} = -\frac{1}{(x-5)^2}$$

Koordinate dirališta tangenti i krivulje $T(x_0, f(x_0))$ uvrstimo u jednadžbu tangente zajedno s koeficijentom smjera dobivenim iz derivacije funkcije te točku $A(9,-2)$ koja pripada tangenti:

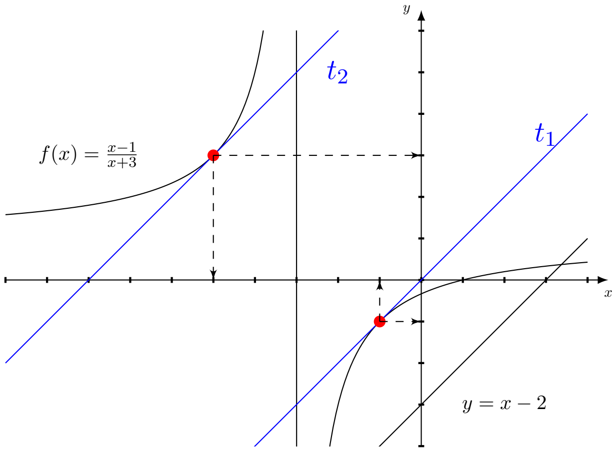
$$t\ldots y - f(x_0) = -\frac{1}{(x_0-5)^2}\cdot(x-x_0)$$
$$A(9,-2)\in t \quad\Rightarrow\quad -2-\frac{1}{x_0-5} = \frac{-1}{(x_0-5)^2}\cdot(9-x_0)$$
$$-2(x_0-5)^2 - x_0 + 5 = -9 + x_0$$
$$-2(x_0^2-10x_0+25) - x_0 + 5 = -9 + x_0$$
$$-2x_0^2 + 20x_0 - 50 - x_0 + 5 + 9 - x_0 = 0$$
$$-2x_0^2 + 18x_0 - 36 = 0$$
$$x_0 = 6 \quad\Rightarrow\quad y_0 = 1 \quad\Rightarrow\quad T_1(6,1)$$
$$x_0 = 3 \quad\Rightarrow\quad y_0 = \frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad T_2\left(3,\frac{1}{2}\right)$$

Rješavanjem kvadratne jednadžbe dobiju se koordinate dirališta te konačno i jednadžbe traženih tangenti:

$$t\ldots y - f(x_0) = -\frac{1}{(x_0-5)^2}\cdot(x-x_0)$$
$$t_1\ldots y-1 = -\frac{1}{(6-5)^2}\cdot(x-6) \quad\Rightarrow\quad y = -x+7$$
$$t_2\ldots y-\frac{1}{2} = -\frac{1}{(3-5)^2}\cdot(x-3) \quad\Rightarrow\quad y = -\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$$

Primjer 8.29 Odredite jednadžbe tangenti na graf funkcije $f(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$ paralelnih s pravcem $y = x-2$.

Rješenje



$$f'(x) = \frac{(x-1)' \cdot (x-5) - (x-1) \cdot (x+3)'}{(x+3)^2} = -\frac{x+3-x+1}{(x+3)^2} = \frac{4}{(x+3)^2}$$

Računamo koordinate dirališta tangenti i krivulje:

$$t \ldots y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) = \frac{4}{(x_0+3)^2} \cdot (x - x_0)$$

$$t || y = x - 2 \quad \textit{za paralelne pravce vrijedi} \Rightarrow \quad k_t = k_p \Rightarrow f'(x_0) = 1$$

$$\frac{4}{(x+3)^2} = 1 \Rightarrow \quad 4 = (x+3)^2 \Rightarrow \quad \pm 2 = x_0 + 3$$

$$x_0 = -5 \quad \Rightarrow \quad y_0 = 3 \quad \Rightarrow \quad T_1(-5, 3)$$

$$x_0 = -1 \quad \Rightarrow \quad y_0 = -1 \quad \Rightarrow \quad T_2(-1, -1)$$

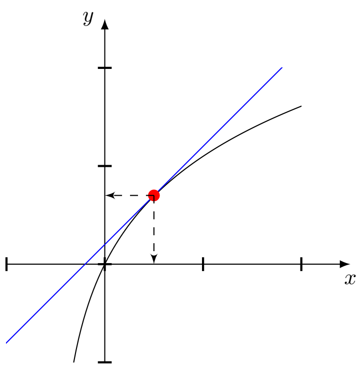
$$t \ldots y - f(x_0) = -\frac{1}{(x_0-5)^2} \cdot (x - x_0)$$

$$t_1 \ldots y - 3 = \frac{4}{(-5+3)^2} \cdot (x+5) \quad \Rightarrow \quad y = x + 8$$

$$t_2 \ldots y + 1 = \frac{4}{(-1+3)^2} \cdot (x+1) \quad \Rightarrow \quad y = x$$

Primjer 8.30 U kojoj točki krivulje $y = \ln(2x+1)$ treba postaviti tangentu tako da ona zatvara kut $\alpha = 45^\circ$ s osi x?

Rješenje



$$k_t = \operatorname{tg}(\alpha) \Rightarrow f'(x_0) = \operatorname{tg} 45^\circ$$

$$\frac{2}{2x_0+1} = 1 \Rightarrow 2x_0 + 1 = 2 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}$$

$$y_0 = \ln\left(2 \cdot \frac{1}{2} + 1\right) = \ln(2)$$

$$t \ldots y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$t \ldots y - \ln(2) = 1 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow y = x + \ln(2) - 0.2$$

8.3 Kut između krivulja

Definicija 8.10. Kut između krivulja

Ako funkcije $f_1(x)$ i $f_2(x)$ imaju derivaciju u točki s apscisom $x = x_0$, tada je kut između njihovih grafova određen formulom:

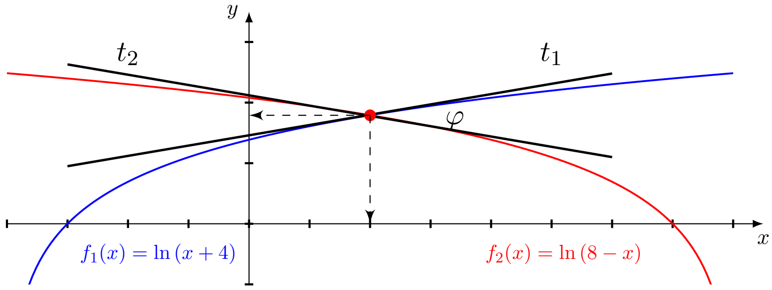
$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{f_1'(x_0) - f_2'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) \cdot f_2'(x_0)}.$$

Napomena *Redoslijed funkcija određujemo iz uvjeta*

$$f_1'(x_0) > f_2'(x_0).$$

Primjer 8.31 Odredite kut pod kojim se sijeku krivulje $y = \ln(8 - x)$ i $y = \ln(x + 4)$.

Rješenje



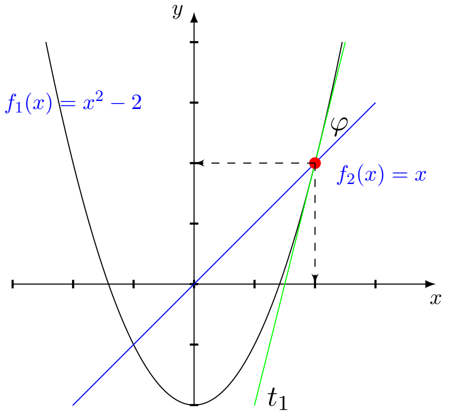
$$\begin{aligned}
\ln(8 - x) &= \ln(x + 4)\\
8 - x &= x + 4\\
x &= 2 \quad \Rightarrow \quad y = \ln(x + 2) = \ln(6)\\
f_1(x) = \ln(x + 4) \quad &\Rightarrow \quad f_1'(x) = \frac{1}{x + 4}\\
\Rightarrow \quad f_1'(x_0) &= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

$$f_2(x) = \ln(8 - x) \Longrightarrow f_2'(x) = \tfrac{-1}{8-x} \Longrightarrow f_2'(x_0) = -\frac{1}{6}$$

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{f_1'(x_0) - f_2'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) \cdot f_2'(x_0)} = \frac{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{35}{6}} = \frac{12}{35} \Longrightarrow \varphi = 0.33 = 18.92°$$

Primjer 8.32 Odredite kut pod kojim se sijeku krivulje $y = x^2 - 2$ i $y = x$ u prvom kvadrantu.

Rješenje



Točka presjeka:

$$x^2 - 2 = x \Rightarrow x_1 = 2, \cancel{x_1 = -1}$$

$$f_1'(x) = 2x \Rightarrow f_1'(x_1) = 4$$

$$f_2(x) \Rightarrow \quad f_2'(x) = 1$$

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{f_1'(x_0) - f_2'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) \cdot f_2'(x_0)}$$

$$= \frac{4-1}{1+4\cdot 1} = \frac{3}{5}$$

$$\varphi = 0.54 = 30.96^\circ$$

8.4 Stacionarne točke, lokalni ekstremi i monotonost funkcije

Definicija 8.11. Lokalni ekstremi

Za realnu funkciju definiranu na otvorenom intervalu, kažemo kako u točki $c \in \langle a, b\rangle$ ima

1. ***lokalni maksimum*** $f(c)$*, ako postoji* $\delta > 0$ *takav da vrijedi*

$$|x - c| < \delta \Longrightarrow f(x) \leq f(c), x \in \langle a, b\rangle \ ,$$

2. ***strogi lokalni maksimum*** $f(c)$*, ako postoji* $\delta > 0$ *da vrijedi*

$$|x - c| < \delta \Longrightarrow f(x) < f(c), x \in \langle a, b\rangle \ ,$$

3. ***lokalni minimum*** $f(c)$*, ako postoji* $\delta > 0$ *da vrijedi*

$$|x - c| < \delta \Longrightarrow f(x) \geq f(c), x \in \langle a, b\rangle \ ,$$

4. ***strogi lokalni minimum*** $f(c)$*, ako postoji* $\delta > 0$ *da vrijedi*

$$|x - c| < \delta \Longrightarrow f(x) > f(c), x \in \langle a, b\rangle \ .$$

Teorem 8.1. Fermatov teorem

Neka realna funkcija ima lokalni ekstrem u točki $c \in \langle a, b\rangle$ *. Ukoliko je* f *diferencijabilna u točki* c*, tada vrijedi*

$$f'(x) = 0 \, .$$

Definicija 8.12. Stacionarne točke

Za diferencijabilnu funkciju $f : \langle a, b\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ *rješenja jednadžbe*

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow x \in \{x_0, \ldots, x_n\}$$

nazivamo ***stacionarnim točkama****.*

Definicija 8.13. Monotonost funkcije

Za realnu funkciju defniranu na otvorenom intervalu $I = \langle a, b\rangle$ *kažemo kako je*

1. *rastuća na tom intervalu, ako vrijedi*

$$\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

2. *strogo rastuća na tom intervalu, ako vrijedi*

$$\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

3. *padajuća na tom intervalu, ako vrijedi*

$$\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

4. *strogo padajuća na tom intervalu, ako vrijedi*

$$\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Za rastuće ili padajuće funkcije kažemo da su monotone, odnosno, strogo monotone ako vrijedi strogi znak nejednakosti.

Definicija 8.14. Određivanje intervala monotonosti

Neka je $f(x)$ neprekinuta realna funkcija defnirana na $[a,b]$ i diferencijabilna na otvorenom intervalu $I = \langle a, b\rangle$. Tada vrijedi

1. *ako je $f(x)$ **rastuća** na I, onda je $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$,*
2. *obrat, ako vrijedi $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$, onda je $f(x)$ **rastuća** na I*
3. *ako je $f(x)$ **padajuća** na I, onda je $f'(x) \leq 0, \forall x \in I$*
4. *obrat, ako vrijedi $f'(x) \leq 0, \forall x \in I$ onda je $f(x)$ **padajuća** na I.*

Primjer 8.33 Odredite lokalne ekstreme i intervale monotonosti za funkciju

$$f(x) = x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1\,.$$

Rješenje *Domena funkcije je: $D_f = \mathbb{R}$.*

Odredimo prvu derivaciju funkcije:

$$f(x) = x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - x$$

Nađimo nultočke prve derivacije, odnosno stacionarne točke:

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(4x^2 - 3x - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = -\frac{1}{4}$$

Pomoću tablice ispitajmo predznak prve derivacije na intervalima podijeljenim stacionarnim točkama:

	$-\infty$ … $-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$ … 0	0 … 1	1 … $+\infty$
f'	$-$	$+$	$-$	$+$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

min. (u $-\frac{1}{4}$) *Maks.* (u 0) *min.* (u 1)

Iz tablice vidimo da funkcija ima:

- *lokalne minimume* $\left(-\frac{1}{4}, f\left(-\frac{1}{4}\right)\right) = \left(-\frac{1}{4}, 0.96\right)$ *i* $(1, f(1)) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$
- *lokalni maksimum* $(0, f(0)) = (0,1)$
- *intervale rasta* $\left\langle -\frac{1}{4}, 0\right\rangle$ *i* $\langle 1, +\infty\rangle$
- *intervale pada* $\left\langle -\infty, -\frac{1}{4}\right\rangle$ *i* $\langle 0, 1\rangle$

Primjer 8.34 Odredite lokalne ekstreme i intervale monotonosti za funkciju

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}.$$

Rješenje *Domena funkcije je:* $x - 1 \neq 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Odredimo prvu derivaciju funkcije:

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x-1) - (x^2 - 2x + 2)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - 2x + 2 - x^2 + 2x - 2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

Stacionarne točke su:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = 2$$

Kreirajmo tablicu s intervalima podijeljenim stacionarnim ročkama i točkom prekida funkcije $x = 1$*:*

	$-\infty$	0	1	2	∞
f'	$+$	$-$	$-$	$+$	
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
		Maks.		*min.*	

Iz tablice vidimo da funkcija ima:

- *lokalni maksimum* $(0, f(0)) = (0, -2)$
- *lokalni minimum* $(2, f(2)) = (2, 2)$
- *interval pada* $\langle 0, 2\rangle \setminus \{1\}$
- *intervale rasta* $\langle -\infty, 0\rangle$ *i* $\langle 2, \infty\rangle$

Primjer 8.35 Odredite lokalne ekstreme i intervale monotonosti za funkciju

$$f(x) = (x^2 - 3x + 2)e^x.$$

Rješenje *Domena funkcije je:* $D_f = \mathbb{R}$.

Odredimo prvu derivaciju funkcije:

$$f'(x) = (x^2 - 3x + 2)'e^x + (x^2 - 3x + 2)(e^x)' = (2x-3)e^x + (x^2 - 3x + 2)e^x = (x^2 - x - 1)e^x$$

Stacionarne točke su:

$$f'(x) = (x^2 - x - 1)e^x = 0 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{\sqrt{5} - 1}{2} = -0.6,\ x_2 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1.6$$

Kreirajmo tablicu:

	$-\infty$	-0.6	1.6	∞
f'	$+$	$-$	$+$	
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
		Maks.	*min.*	

Iz tablice vidimo da funkcija ima:

- *lokalni maksimum*

  $$(-0.6, f(-0.6)) = (-0.6, 2.3)$$

- *lokalni minimum*

  $$(1.6, f(1.6)) = (1.6, -1.2)$$

- *interval pada* $\langle -0.6, 1.6\rangle$
- *intervale rasta* $\langle -\infty, -0.6\rangle$ *i* $\langle 1.6, \infty\rangle$

Primjer 8.36 Odredite lokalne ekstreme i intervale monotonosti za funkciju

$$f(x) = x\ln^2(x).$$

Rješenje *Domena funkcije je:* $D_f = \langle 0, \infty \rangle$.

Odredimo prvu derivaciju funkcije:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x)' \ln^2(x) + x\left(\ln^2(x)\right)' = \ln^2(x) + x \cdot 2\ln(x) \cdot (\ln(x))' \\ &= \ln^2(x) + x \cdot 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x} = \ln^2(x) + 2\ln(x) = \ln(x)(\ln(x)+2) \end{aligned}$$

Stacionarne točke su:

$$\begin{aligned} f'(x) = \ln(x)(\ln(x)+2) = 0 &\Rightarrow \ln(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \\ &\Rightarrow \ln(x) + 2 = 0 \Rightarrow \ln(x) = -2 \Rightarrow x_2 = e^{-2} = 0.1 \end{aligned}$$

Kreirajmo tablicu:

	0	0.1	1	∞
f'	$+$	$-$	$+$	
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
		Maks.	min.	

Iz tablice vidimo da funkcija ima:

- *lokalni maksimum*

$$(0.1, f(0.1)) = (0.1, 0.5)$$

- *lokalni minimum*

$$(1, f(1)) = (1, 0)$$

- *interval pada* $\langle 0.1, 1 \rangle$
- *intervale rasta* $\langle 0, 0.1 \rangle$ *i* $\langle 1, \infty \rangle$

8.5 Točka infleksije i intervali zakrivljenosti funkcije

Definicija 8.15. Konveksna funkcija

Za realnu funkciju kažemo da je ***konveksna*** *na otvorenom intervalu, ako za svaki izbor* $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$ *vrijedi*

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}\,.$$

- *Za funkciju kažemo da je strogo konveksna ako u definiciji vrijedi stroga nejednakost (znak <).*
- *Ekvivalentno, za konveksne funkcije vrijedi* $f''(x) \geq 0, \forall x \in \langle a, b\rangle$ *.*

Definicija 8.16. Konkavna funkcija

Za realnu funkciju kažemo da je ***konkavna*** *na otvorenom intervalu, ako za svaki izbor* $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$ *vrijedi*

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}\,.$$

- *Za funkciju kažemo da je strogo konkavna ako u definiciji vrijedi stroga nejednakost (znak >).*
- *Ekvivalentno, za konkavne funkcije vrijedi* $f''(x) \leq 0, \forall x \in \langle a, b\rangle$ *.*

Definicija 8.17. Točka infleksije

Neka je $f(x)$ *neprekinuta realna funkcija defnirana na otvorenom intervalu. Točka* c *iz tog otvorenog intervala je* ***točka infeksije*** *ili* ***prijevojna točka****, ako postoji takav* $\delta > 0$ *za koji je* $f(x)$ *na intervalu* $\langle c - \delta, c\rangle$ *strogo konveksna, dok je na intervalu* $\langle c, c + \delta\rangle$ *strogo konkavna ili obrnuto.*

Definicija 8.18. Kriterij za određivanje infleksije

Točke infeksije funkcije $f(x)$ *određujemo iz jednadžbe*

$$f''(x) = 0$$

uz uvjet da prva derivacija funkcije u tim točkama ima strogi lokalni ekstrem (minimum ili maksimum).

Primjer 8.37 Odredite točke infleksije i intervale zakrivljenosti za funkciju

$$f(x) = x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1\,.$$

Rješenje *Domena funkcije je* $D_f = \mathbb{R}$.

Iz prve derivacije odredimo drugu derivaciju

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - x, \implies f''(x) = 12x^2 - 6x - 1$$

Njene nultočke su:

$$x_{1,2} = -\frac{\sqrt{21} \pm 3}{12} = \begin{cases} -0.13 \\ 0.63 \end{cases}$$

Pomoću tablice ispitajmo predznak druge derivacije na intervalima podjeljenim dobivenim nultočkama druge derivacije:

	$-\infty$	-0.1	0.6	∞
f''	$+$	$-$	$+$	
f	$\cup$ *konveksna*	$\cap$ *konkavna*	$\cup$ *konveksna*	

Kako funkcija mijenja karakter obzirom na konkavnost i konveksnost, zaljučujemo da funkcija u nultočkama druge derivacije ima infleksije. Stoga su:

- *točke infleksije* $(-0.1, 1)$ *i* $(0.6, 0.7)$,
- *intervali konveksnosti* $\langle -\infty, -0.1\rangle$ *i* $\langle 0.6, \infty\rangle$,
- *interval konkavnosti* $\langle -0.1, 0.6\rangle$.

Primjer 8.38 Odredite točke infleksije i intervale zakrivljenosti za funkciju

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}.$$

Rješenje *Domena funkcije je:* $x - 1 \neq 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Odredimo prve dvije derivacije funkcije:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \\ f''(x) &= \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x)2(x-1)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{(x-1) \cdot \left[(2x-2)(x-1) - 2(x^2-2x)\right]}{(x-1)^4} \\ &= \frac{\cancel{(x-1)} \cdot \left[2x^2 - 2x - 2x + 2 - 2x^2 + 4x\right]}{(x-1)^{\cancel{4}}} = \frac{2}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

Točke infleksije su:

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} = 0 \;\Rightarrow\; 2 \neq 0 \Rightarrow \; \textit{ne postoji točka infleksije}$$

Kreirajmo tablicu:

	$-\infty$	1	∞
f''	$-$	$+$	
f	$\cap$ *konkavna*	$\cup$ *konveksna*	

- *interval konkavnosti* $\langle -\infty, 1\rangle$
- *interval konveksnosti* $\langle 1, \infty\rangle$

Primjer 8.39 Odredite točke infleksije i intervale zakrivljenosti za funkciju

$$f(x) = (x^2 - 3x + 2)e^x \,.$$

Rješenje *Domena funkcije je:* $D_f = \mathbb{R}$.

Odredimo prve dvije derivacije funkcije:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 - x - 1)e^x \\ f''(x) &= (x^2 - x - 1)'e^x + (x^2 - x - 1)\,(e^x)' = (2x-1)'e^x + (x^2 - x - 1)e^x \\ &= (x^2 + x - 2)e^x \end{aligned}$$

Točke infleksije su:

$$f''(x) = (x^2 + x - 2)e^x = 0 \;\Rightarrow\; x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1,\; x_2 = -2$$

Kreirajmo tablicu:

	$-\infty$	-2	1	∞
f''	$+$	$-$	$+$	
f	$\cup$ *konveksna*	$\cap$ *konkavna*	$\cup$ *konveksna*	

- *točke infleksije* $(1, 0),\; (-2, 1.6)$
- *intervali konveksnosti* $\langle -\infty, -2\rangle\,,\ \langle 1, \infty\rangle$
- *interval konkavnosti* $\langle -2, 1\rangle$

Primjer 8.40 Odredite točke infleksije i intervale zakrivljenosti za funkciju

$$f(x) = x \ln^2(x)\,.$$

Rješenje *Domena funkcije je:* $D_f = \langle 0, \infty\rangle$.

Odredimo prve dvije derivacije funkcije:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln^2(x) + 2\ln(x) \\ f''(x) &= 2\ln(x)\cdot(\ln(x))' + 2\cdot\frac{1}{x} = 2\ln(x)\cdot\frac{1}{x} + 2\cdot\frac{1}{x} = \frac{2}{x}(\ln(x) + 1) \end{aligned}$$

Točke infleksije su:

$$f''(x) = \frac{2}{x}(\ln(x) + 1) = 0 \;\Rightarrow\; \ln(x) + 1 = 0 \Rightarrow x = e^{-1} = 0.4$$

Kreirajmo tablicu:

	0	0.4	∞
f''	$-$	$+$	
f	$\cap$ *konkavna*	$\cup$ *konveksna*	

- *točka infleksije* $(0.4, 0.4)$
- *interval konveksnosti* $\langle 0.4, \infty\rangle$
- *interval konkavnosti* $\langle 0, 0.4\rangle$

8.6 L' Hospitalovo pravilo

Definicija 8.19. L'Hospitalovo pravilo

Neka su oba limesa $\lim_{x\to c} f(x)$ *i* $\lim_{x\to c} g(x)$ *jednaka nula ili beskonačno (pri čemu je* $c \in \mathbb{R}$ *ili je* $c = \pm\infty$*). Ako postoji limes*

$$\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k \in \mathbb{R}$$

ili ako je jednak $\pm\infty$ *te ako je* $g'(x) \neq 0$ *za* x *iz nekog intervala oko* c*, onda vrijedi*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Napomena *U zadacima L'Hospitalovo pravilo skraćeno označavamo s L-H.*

Napomena *L'Hospitalovo pravilo koristi se samo kod neodređenih oblika* $\frac{0}{0}$ *ili* $\frac{\infty}{\infty}$*. U slučaju drugih neodređenih oblika poput* $\infty-\infty$*,* $0\cdot\infty$ *i slično, kako bi se moglo primijeniti L'Hospitalovo pravilo potrebno je izraz čiji limes tražimo transformirati i svesti na jedan od gore navedena dva oblika.*

Napomena *L'Hospitalovo pravilo smije se koristiti više puta prilikom rješavanja limesa.*

Primjer 8.41 Izračunajte

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin(x)}.$$

Rješenje

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)'}{(\sin(x))'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{\cos(x)} = \frac{1}{1} = 1$$

Primjer 8.42 Izračunajte

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3}.$$

Rješenje

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{x^3} = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{3x^2} = \left(\frac{1-1}{0}\right) = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{6x}$$
$$= \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{6} = \frac{1}{6}$$

Primjer 8.43 Izračunajte

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{2x}}.$$

Rješenje

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{2x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2e^{2x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{4e^{2x}} = \frac{2}{\infty} = 0$$

Primjer 8.44 Izračunajte

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x^2+x-30}.$$

Rješenje

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x^2+x-30} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 5} \frac{2x}{2x+1} = \frac{10}{11}$$

Primjer 8.45 Izračunajte

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}.$$

Rješenje

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 5} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1$$

Primjer 8.46 Izračunajte

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{\sin(x)}.$$

Rješenje

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{\sin(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}}{\cos(x)} = \frac{1+1}{1} = 2$$

Primjer 8.47 Izračunajte

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}\right).$$

Rješenje

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}\right) = (\infty-\infty) &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x\cdot\sin(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) \\
&\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{(x)'\cdot\sin(x)+x\cdot(\sin(x))'} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{\sin(x)+x\cdot\cos(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) \\
&\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{\cos(x)+\cos(x)-x\sin(x)} = \frac{0}{1+1-0} = 0
\end{aligned}$$

Primjer 8.48 Izračunajte

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)}\right).$$

Rješenje

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln(x)}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln(x)-(x-1)}{(x-1)\ln(x)}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\stackrel{L'H}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)+x\cdot\frac{1}{x}-1}{\ln(x)+(x-1)\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{\ln(x)+1-\frac{1}{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\stackrel{L'H}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

Primjer 8.49 Izračunajte

$$\lim_{x\to\infty} x^2\cdot e^{-x}.$$

Rješenje

$$\lim_{x\to\infty} x^2\cdot e^{-x}=(\infty\cdot 0)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\stackrel{L'H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\stackrel{L'H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=\frac{2}{\infty}=0$$

Primjer 8.50 Izračunajte

$$\lim_{x\to 0} x^{\sin(x)}.$$

Rješenje *Uvrštavanjem granične vrijednosti 0 dobije se neodređeni izraz 0^0 te u ovom slučaju transformiramo izraz čiji limes tražimo tako da označimo limes slovom L i logaritmiramo cijelu jednakost. Budući je prirodni logaritam neprekidna funkcija, možemo promatrati izraz pod limesom kao argument tog logaritma i dalje računati odgovarajući limes. Na kraju izrazimo L iz jednadžbe.*

$$L=\lim_{x\to 0} x^{\sin(x)} \quad /\ln$$

$$\ln(L)=\lim_{x\to 0}\ln x^{\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\sin(x)\cdot\ln(x)=(0\cdot\infty)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{\sin(x)}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\stackrel{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(x))'}{\frac{1}{(\sin(x))'}}=(*)$$

$$\left(\frac{1}{\sin(x)}\right)'=\left(\sin^{-1}(x)\right)'=-\sin^2(x)\cdot\cos(x)=-\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$$

$$(*)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2(x)}{x\cos(x)}=\left(\frac{0}{0}\right)\stackrel{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin(x)\cdot\cos(x)}{\cos(x)-x\sin(x)}$$

$$=\frac{0}{1-0}=0$$

$$\Rightarrow\quad \ln(L)=0\Rightarrow\quad L=1\quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to 0} x^{\sin(x)}=1$$

8.7 Taylorov i MacLaurinov red

Definicija 8.20. Taylorov polinom

Neka je $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ realna funkcija koja ima n-tu derivaciju na otvorenom intervalu. Za točku c iz tog intervala polinom oblika

$$T_n(x) = f(c) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} \cdot (x-c)^k, \quad x \in \langle a, b\rangle$$

*nazivamo **Taylorov polinom** n-tog reda funkcije u točki c.*

Funkciju

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x), \quad x \in \langle a, b\rangle$$

nazivamo n-ti ostatak funkcije u točki c.

Definicija 8.21. Taylorov red

Ako funkcija $f(x)$ ima derivaciju bilo kojeg reda na otvorenom intervalu $I = \langle a, b\rangle$, tada red oblika

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} \cdot (x-c)^k, \quad x \in I$$

*nazivamo **Taylorov red** funkcije u okolini točke c.*

- *Taylorov red defnira red brojeva za svaku vrijednost x iz otvorenog intervala I,*
- *skup brojeva za koje Taylorov red konvergira određen je domenom funkcije $\mathcal{D}_f$.*

Definicija 8.22. MacLaurinov red

*Ako funkcija $f(x)$ ima derivaciju bilo kojeg reda u točki $c = 0$, tada Taylorov red u okolini te točke nazivamo **MacLaurinov red***

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k, \quad x \in [a, b]$$

Primjer 8.51 Odredite MacLaurinov red za funkciju

$$f(x) = \sin(x), \quad x \in [-\pi, \pi]$$

Rješenje *Znamo da je funkcija $\sin(x)$ neprekidna na skupu realnih brojeva, i ima derivacije bilo kojeg reda. Za nalaženje MacLaurinova reda potrebne su nam vrijednosti svih njezinih derivacija u točki $c = 0$. Iz prvih nekoliko derivacija funkcije za $\sin(x)$ možemo matematičkom* *indukcijom pokazati kako je svaka (za $k \in \mathbb{N}$) njezina derivacija oblika*

$$f^{(n)} = \begin{cases} (-1)^k \sin(x), & n = 2k, \ \textit{paran } n \\ (-1)^k \cos(x), & n = 2k+1, \ \textit{neparan } n \end{cases}$$

Odavde vidimo kako za parne derivacije funkcije vrijedi

$$f^{(2k)}(0) = 0$$

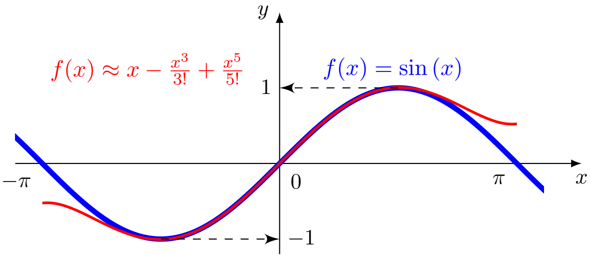
dok za neparne derivacije vrijedi

$$f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k .$$

Zbog toga MacLaurinov red funkcije sinus glasi

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(k)}}{(2k+1)!} \cdot x^{(2k+1)}, \quad \forall x \in [-\pi, \pi] .$$

MacLaurinov red za funkciju sinus možemo koristiti za izračunavanje njezinih vrijednosti na intervalu $[-\pi, \pi]$. *Primjerice, na sljedećoj slici vidimo usporedbu vrijednosti funkcije* $\sin(x)$ *s vrijednostima iz prva tri člana MacLaurinova reda.*



Primjer 8.52 Razviti u Taylorov polinom drugog stupnja funkciju $f(x) = \ln(x)$ u okolini točke $a = 2$.

Rješenje

$$\begin{aligned} f(2) &= \ln(2) \\ f'(x) &= \frac{1}{x} \quad \Rightarrow f'(2) = \frac{1}{2} \\ f''(x) &= -\frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow f''(2) = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(2) + \frac{\frac{1}{2}}{1!} \cdot (x-2) + \frac{-\frac{1}{4}}{2!} \cdot (x-2)^2 = \ln(2) + \frac{1}{2} \cdot (x-2) - \frac{1}{8} \cdot (x^2 - 4x + 4) \\ &= -\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x - 1 + \ln(2) = -\frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{2} + \ln(2) \end{aligned}$$

8.8 Zadaci za vježbu

✍ **Zadatak 8.1** Odredite $f'(x)$ sljedećih funkcija:

a) $f(x) = x^7 + 3x^{-4}$

b) $f(x) = x^{-3} \cdot \sqrt[3]{x^2}$

c) $f(x) = \sqrt{x^3 - 2x + 7}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x^{-2}}$

e) $f(x) = \dfrac{x+2}{3x-1}$

f) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2-1}$

g) $f(x) = \dfrac{\sin(x)+1}{\sin(x)-1}$

h) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$

i) $f(x) = \ln\left(\sqrt{x}\right)$

j) $f(x) = \arcsin\sqrt{x-1}$

k) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

l) $f(x) = \cos^3(x)$

m) $f(x) = \cos\left(x^3\right)$

n) $f(x) = x \cdot \ln(x)$

o) $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

p) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\sqrt{3x}\right)$

q) $f(x) = x^2 \cdot e^x$

r) $f(x) = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$

s) $f(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{1-\ln(x)}$

t) $f(x) = \ln(\sin(-2x))$

Rješenje

a) $7x^6 - \dfrac{12}{x^5}$

b) $\dfrac{2}{3\left(x^2\right)^{5/3}} - \dfrac{3\sqrt[3]{x^2}}{x^4}$

c) $\dfrac{3x^2-2}{2\sqrt{x^3-2x+7}}$

d) $-\dfrac{2}{3\left(\frac{1}{x^2}\right)^{2/3}x^3}$

e) $-\dfrac{7}{(1-3x)^2}$

f) $-\dfrac{6x}{\left(x^2-1\right)^2}$

g) $-\dfrac{2\cos(x)}{(\sin(x)-1)^2}$

h) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}(x+1)^{3/2}}$

i) $\dfrac{1}{2x}$

j) $\dfrac{1}{2\sqrt{-x^2+3x-2}}$

k) $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

l) $-3\sin(x)\cos^2(x)$

m) $-3x^2\sin\left(x^3\right)$

n) $1+\ln(x)$

o) $\dfrac{2\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x^3}$

p) $\dfrac{3}{2(1+3x)\sqrt{3x}}$

q) $xe^x(x+2)$

r) $\dfrac{2}{x^2-1}$

s) $\dfrac{2}{x(1-\ln(x))^2}$

t) $2\operatorname{ctg}(2x)$

✍ **Zadatak 8.2** Odredite derivaciju u točki:

a) $f'(0)$, $f(x) = x^2 + 3x - 1$

b) $f'(2)$, $f(x) = \sqrt{x^3-1}$

c) $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, $f(x) = \dfrac{\cos(2x)}{\sin(x)}$

d) $f''(1)$, $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$

e) $f''(1)$, $f(x) = x^2e^{-3x}$

f) $f''(1)$, $f(x) = e^x \cdot \cos(x)$

Rješenje

a) 3

b) $\dfrac{6}{\sqrt{7}}$

c) $-2\sqrt{2}$

d) $-\dfrac{1}{2}$

e) $-\dfrac{1}{e^3}$

f) $-2e\sin(1)$

✍ **Zadatak 8.3** Odredite y' sljedećih funkcija:

a) $y = \sqrt[x]{x}$

b) $y = (\cos(x))^{2\sin(x)}$

c) $y = x^{\sqrt{x}}$

d) $y = x^{x^2}$

e) $y = (\operatorname{arctg}(x))^x$

f) $y = x^{\sin(x)}$

Rješenje

a) $-x^{\frac{1}{x}-2}(\log(x)-1)$

b) $(\cos(x))^{2\sin(x)}\left(2\cos(x)\ln(\cos(x)) - \dfrac{2\sin^2(x)}{\cos(x)}\right)$

c) $\dfrac{1}{2}x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}(\log(x)+2)$

d) $x^{x^2}(x + 2x\log(x))$

e) $\operatorname{arctg}(x)^x\left(\frac{x}{x^2\operatorname{arctg}(x)+\operatorname{arctg}(x)} + \log(\operatorname{arctg}(x))\right)$

f) $x^{\sin(x)-1}(\sin(x) + x\log(x)\cos(x))$

✍ **Zadatak 8.4** Odredite prvu derivaciju sljedećih funkcija:

a) $x = \sqrt{t},\ y = \sqrt[3]{t}$

b) $x = 4t-1,\ y = t^3$

c) $x = 2\cos^2(t),\ y = 3\sin^2(t)$

d) $x = \dfrac{3t}{1+t^3},\ y = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$

Rješenje

a) $\dfrac{2}{3\sqrt[6]{t}}$

b) $\dfrac{3t^2}{4}$

c) $-\dfrac{3}{2}$

d) $\dfrac{t\left(t^3-2\right)}{2t^3-1}$

✍ **Zadatak 8.5** Odredite y' sljedećih funkcija:

a) $4x - 2y + 3 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 4 = 0$

c) $x^3 + 5xy^2 - y^3 = 1$

d) $\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) - \sqrt{x^2+y^2} = 0$

e) $2x + y - e^y = 0$

f) $\ln(y) + \dfrac{x}{y} = 0$

g) $\sin(y) - x^2y = 0$

h) $y + 2\cos(y) - 3x = 0$

i) $x^3 + y^3 + 3xy = 0$

Rješenje

a) 2

b) $-\dfrac{x}{y}$

c) $\dfrac{3x^2-5y^2}{(10x-3y)\,y}$

d) $-\dfrac{x^3+y\left(\sqrt{x^2+y^2}+xy\right)}{-x\sqrt{x^2+y^2}+x^2y+y^3}$

e) $\dfrac{2}{-1+e^y}$

f) $\dfrac{y}{x-y}$

g) $-\dfrac{2xy}{-x^2+\cos(y)}$

h) $\dfrac{3}{1-2\sin(y)}$

i) $-\dfrac{x^2+y}{y^2+x}$

Zadatak 8.6

a) Odredite jednadžbu tangente na krivulju $y=e^{2x}$ koja prolazi točkom $T\,(0,0)$.

b) Odredite jednadžbu tangente na krivulju $y=e^{x-1}$ koja prolazi prolazi sjecištem krivulje s y osi.

c) Odredite jednadžbu tangente na krivulju $y=\ln(x+1)$ u nultočki funkcije.

d) Odredite jednadžbu tangente i normale na krivulju $y=\mathrm{tg}(2x)$ u ishodištu koordinatnog sustava.

e) Odredite jednadžbu tangente i normale na krivulju $y=\ln(x)$ u sjecištu s osi x.

f) Odredite jednadžbu tangente na krivulju $y=\mathrm{ctg}(x)$ u točki s apscisom $x=\frac{\pi}{4}$.

g) Odredite jednadžbu normale na krivulju $4y^2-2xy-x^3+8=0$ u točki $T\,(2,1)$.

h) Odredite jednadžbu tangente na krivulju $3y^2+6xy+4x^2-2y=5$ u točki $T\,(-2,1)$.

i) Odredite jednadžbe tangenti na krivulju $y=x^2+x-6$ koje prolaze nultočkama funkcije.

j) Odredite jednadžbu tangente na krivulju $y=\ln(2x)$ paralelne s pravcem $y=x+1$.

k) Kroz koju točku na krivulji $y=x^2-2x+\frac{15}{4}$ treba povući tangentu tako da ona bude okomita na simetralu prvog i trećeg kvadranta. Kako glasi jednadžba tangente?

l) Odredite udaljenost tjemena parabole $y=x^2-4x+5$ od tangente u sjecištu parabole s osi ordinata.

m) Odrediti jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x)=2x^2+9x+5$ u točki čija je apscisa $x_0=-6$.

n) Odrediti točke na krivulji $f(x)=x^3-11x+10$ u kojima je tangenta na krivulju paralelna sa simetralom I i III kvadranta.

o) Odrediti točke na krivulji $f(x)=x^3+x^2-4x+2$ u kojima je normala na krivulju okomita sa simetralom I i III kvadranta.

p) Odrediti točke na krivulji $f(x)=x^3-3x^2+2x-1$ u kojima je normala na krivulju paralelna sa simetralom II i IV kvadranta.

q) Odrediti točke na krivulji $f(x)=2x^3-3x^2+x-2$ u kojima je tangenta na krivulju okomita sa simetralom II i IV kvadranta.

r) Odrediti točke na krivulji $f(x) = 7e^{3x}$ u kojima je tangenta na krivulju okomita na pravac $y = -3x + 5$.

Rješenje

a) $y = 2ex$

b) $y = \frac{1}{e}x + \frac{1}{e}$

c) $y = x$

d) $t \dots y = x,\ n \dots y = -x$

e) $t \dots y = x - 1,\ n \dots y = -x + 1$

f) $y = -2x + \frac{\pi}{2} + 1$

g) $2y - 7x + 12 = 0$

h) $4y + 5x + 6 = 0$

i) $t_1 \dots y = -5x - 15,\ t_2 \dots y = 5x - 10$

j) $y = x - 1 + \ln(2)$

k) $T\left(\frac{1}{2}, 3\right)$, $y = -x + \frac{7}{2}$

l) *Tjeme je u točki* $m(2,1)$, *sjecište s osi ordinata je točka* $(0,5)$, *jednadžba tangente je* $y = -4x + 5$, *udaljenost* $d(m, \textit{tangenta}) = \frac{4}{\sqrt{17}}$

m) $y = -27x - 139$

n) $T_1(-2, 24)$, $T_2(2, -4)$

o) $T_1\left(-\frac{5}{3}, \frac{184}{27}\right)$, $T_2(1, 0)$

p) $T_1(0.18, -0.73)$, $T_2(1.82, -1.27)$

q) $T_1(0, -2)$, $T_2(1, -2)$

r) $T\left(\frac{1}{3}\ln\left(\frac{1}{63}\right), \frac{1}{9}\right)$

✍ Zadatak 8.7

a) Pod kojim se kutem sijeku parabole $y = x^2$, $y = x^3$?

b) Pod kojim se kutem sijeku parabole $y = (x-1)^2$, $y = -x^2 + 6x - 4$?

c) Pod kojim se kutem sijeku krivulje $y = \ln(x+1)$, $y = \ln\left(x^2+1\right) - 2\ln(x)$?

d) Pod kojim se kutem sijeku krivulje $y = \sqrt{\frac{x^3}{2-x}}$, $y = \sqrt{x(1-x)}$?

e) Odredite kut u radijanima pod kojim se sijeku krivulje $y = 4x^2$ i $y = -x^2 + 5$.

f) Odredite kut u radijanima pod kojim se sijeku krivulje $y = \ln(8-x)$ i $y = \ln(x+4)$.

g) Odredite kut u radijanima pod kojim se sijeku krivulje $y = x^2 - 2$ i $y = -x$ u I kvadrantu.

h) Odredite kut u radijanima pod kojim se sijeku krivulje $y = x^2 - 2$ i $y = x$ u I kvadrantu.

Rješenje

a) *U točki* $(0,0)$ *pod kutem* $0°$, *u točki* $(1,1)$ *pod kutem* $8.13°$

b) $77.93°$ *i* $78,94°$

c) $71.57°$,

d) $70.53°$

e) $0.588\,rad$,

f) $0.3303\,rad$

g) $1.249\,rad$

h) $\frac{\pi}{4}\,rad$

Zadatak 8.8 Za funkciju $f(x)$ odredite lokalne ekstreme, intervale monotonosti, točke infleksije i intervale zakrivljenosti:

a) $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - x + 1$

b) $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-1}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$

d) $f(x) = \left(x^2 - 1\right) e^x$

e) $f(x) = x\ln(x^2)$

f) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$

g) $f(x) = \ln\left(x^2 + 1\right)$

h) $f(x) = e^{2x} + 2$

Rješenje

a) *Lokalni minimum* $min(0.32, 0.78)$*; f raste na* $\langle 0.32, +\infty\rangle$*, f pada na* $\langle -\infty, 0.32\rangle$*; točke infleksije* $T_1\left(-\frac{1}{3}, \frac{35}{27}\right)$, $T_2(0,1)$*; konveksna na* $\langle -\infty, -\frac{1}{3}\rangle \cup \langle 0, +\infty\rangle$*, konkavna na* $\langle -\frac{1}{3}, 0\rangle$

b) *Nema ekstrema; f pada na* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$*; nema točaka infleksije; konveksna na* $\langle \frac{1}{2}, +\infty\rangle$*, konkavna na* $\langle -\infty, \frac{1}{2}\rangle$

c) $min(1+\sqrt{2}, 2\sqrt{2}+2)$, $Max(1-\sqrt{2}, 2-2\sqrt{2})$*; raste na* $\langle -\infty, 1-\sqrt{2}\rangle \cup \langle 1+\sqrt{2}, +\infty\rangle$*, pada na* $\langle 1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\rangle \setminus \{1\}$*; nema točaka infleksije; konveksna na* $\langle 1, +\infty\rangle$*, konkavna na* $\langle -\infty, 1\rangle$

d) $min(0.41, -1.25)$, $Max(-2.41, 0.43)$*; raste na* $\langle -\infty, -2.41\rangle \cup \langle 0.41, +\infty\rangle$*, pada na* $\langle -2.41, 0.41\rangle$*; točke infleksije* $T_1(-3.73, 0.31)$, $T_2(-0.27, -0.71)$*;*
konveksna na $\langle -\infty, -3.73\rangle \cup \langle -0.27, +\infty\rangle$*, konkavna na* $\langle -3.73, -0.27\rangle$

e) $Max\left(-\frac{1}{e}, \frac{2}{e}\right)$, $min\left(\frac{1}{e}, -\frac{2}{e}\right)$*; raste na* $\langle -\infty, -\frac{1}{e}\rangle \cup \langle \frac{1}{e}, +\infty\rangle$*, pada na* $\langle -\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\rangle$*; nema točaka infleksije; konveksna na* $\langle 0, +\infty\rangle$*, konkavna na* $\langle -\infty, 0\rangle$

f) *Nema stacionarnih točaka; f raste na* $\mathcal{D}(f) = \langle -\infty, -1\rangle \cup [0, +\infty\rangle$*; nema točaka infleksije; konveksna na* $\langle -\infty, -1\rangle$*, konkavna na* $[0, +\infty\rangle$

g) $min(0,0)$*; raste na* $\langle 0, +\infty\rangle$*, pada na* $\langle -\infty, 0\rangle$*;*
točke infleksije $T_1(-1, \ln(2))$, $T_2(1, \ln(2))$*;*

konveksna na $\langle -1, 1\rangle$*, konkavna na* $\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$

h) Nema ekstrema; f raste na $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$*; nema točaka infleksije; konveksna na* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$

Zadatak 8.9 L'Hospitalovim pravilom izračunajte:

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt[3]{x-8}+2}$

2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2(x)}$

3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{e^x-e^{-x}-2x}$

4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x-\operatorname{arctg}(x)}$

5) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{tg}(x-1)}{\sqrt{x}-1}$

6) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{\ln(\sin(x))}$

7) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{\operatorname{arctg}(4x)}$

8) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(3x)}{\operatorname{arctg}(2x)}$

9) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\pi\cos^2(x)\right)}{x^2}$

10) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x\sqrt{x^2+2x+4}-2}{x}$

11) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{-\sin(x)}$

12) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2(3x)-1}{x^2}$

13) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x-\operatorname{arctg}(x)}$

14) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{x^3}$

15) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^3\ln(x)$

16) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{x+3}{x-3}\right)$

17) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(x^2\right)}{1-\cos(x)}$

18) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right)$

19) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2-3x}\right)$

20) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^3e^{-2x}$

21) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (\sin(x))^{\frac{1}{\ln(x)}}$

22) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x)-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}$

23) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

24) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$

25) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$

26) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x^2+x}{e^x-\cos(x)}$

27) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \left(x^2-1\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

Rješenje

1) 3; *2)* $\frac{9}{2}$; *3)* $\frac{1}{2}$; *4)* 3; *5)* 2; *6)* 1; *7)* 0; *8)* $\frac{3}{2}$; *9)* π; *10)* $\frac{5}{2}$; *11)* 1; *12)* -9; *13)* 3; *14)* $\frac{1}{6}$; *15)* 0; *16)* 6; *17)* 2; *18)* $-\frac{1}{2}$; *19)* $\frac{7}{2}$; *20)* 0; *21)* e; *22)* -1; *23)* 1; *24)* 1; *25)* $\frac{1}{2}$; *26)* 2; *27)* $-\frac{4}{\pi}$

Zadatak 8.10 Odredite Taylorov polinom trećeg stupnja funkcije $f(x) = e^x$, za $a = 0$ i pomoću njega izračunajte približno $\sqrt[4]{e}$.

Rješenje $T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$, $\sqrt[4]{e} \approx 1.28385$

✍ **Zadatak 8.11** Odredite Taylorov polinom 2. stupnja funkcije $f(x)$ u okolini točke a

a) $f(x) = \cos(x)$, $a = \pi$

b) $f(x) = \sin(x)$, $a = \frac{2\pi}{3}$

c) $f(x) = \ln(x)$, $a = 2$

d) $f(x) = 2x^4 + x^3 - x^2 + 3x + 1$, $a = 1$

e) $f(x) = xe^{-x}$, $a = 3$

Rješenje

a) $T_2(x) = -1 + \frac{1}{2}(x-\pi)^2$

b) $T_2(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)^2$

c) $T_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{4} + \ln(2)$

d) $T_2(x) = 14x^2 - 16x + 2$

e) $T_2(x) = \frac{e^{-3}}{2}\left(x^2 - 10x + 27\right)$

✍ **Zadatak 8.12** Odredite McLaurinov polinom 3. stupnja funkcije $f(x)$

a) $f(x) = \sin x$

b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x - 1$

Rješenje

1. $M_3(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x$

2. $M_3(x) = f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x - 1$

Poglavlje

Ispitivanje toka funkcije

Uvod

- ❏ *Linearna funkcija*
- ❏ *Kvadratna funkcija*
- ❏ *Potencije i korijeni*
- ❏ *Polinomi*
- ❏ *Racionalna funkcija*
- ❏ *Eksponencijalna i logaritamska funkcija*
- ❏ *Trigonometrijske i ciklometrijske funkcije*

9.1 Tok funkcije

Ispitivanje toka realne funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ svodi se na:

1. određivanje područja definicije $\mathcal{D}_f$ i područja vrijednosti $\mathcal{K}_f$,
2. određivanje svojstava funkcije: parnost ili neparnost, periodičnost,
3. određivanje asimptota: horizontalna, vertikalna, i kosa,
4. nalaženje derivacija, najčešće samo prve i druge,
5. određivanje karakterističnih točaka: nultočke, lokalni ekstremi, točke inflksije,
6. određivanje karakterističnih intervala: monotonosti i zakrivljenosti,
7. crtanje grafa funkcije,
8. određivanje (opcionalno) slike funkcije $\mathcal{R}_f$.

Definicija 9.1. Domena funkcije

Za realnu funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1. *područje definicije (**domena**) označava skup svih realnih brojeva koje funkcija preslikava u realan broj*
$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\} \ ,$$
2. *područje vrijednost (**kodomena**) označava skup iz kojega funkcija poprima vrijednosti, tj. za realne funkcije vrijedi $f(x) \in \mathcal{K}_f$,*
3. ***slika** funkcije je skup svih slika realnih brojeva iz domene*
$$\mathcal{R}_f = \{f(x) \in \mathcal{K}_f : x \in \mathcal{D}_f\} \ .$$

Za realne funkcije uvijek vrijedi:

1. *$\mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}$, domena je podskup skupa realnih brojeva,*
2. *$\mathcal{K}_f \subseteq \mathbb{R}$, kodomena je također podskup skupa realnih brojeva,*
3. *$\mathcal{R}_f \subseteq \mathcal{K}$, slika je podskup kodomene.*

Napomena *Slika funkcije predstavlja skup samo onih vrijednosti iz kodomene koje možemo dobiti primjenom funkcije nad elementima domene, dok kodomena predstavlja skup koji sadrži sve vrijednosti funkcije.*

Definicija 9.2. Uvjeti za domenu

Uobičajeno kod određivanja domene funkcije koristimo sljedeće uvjete

1. *nazivnik različit od nule za racionalni izraz*
$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \implies h(x) \neq 0$$
2. *pozitivnost argumenta za parne korijene*
$$f(x) = \sqrt[2n]{g(x)} \implies g(x) \geq 0$$
3. *pozitivnost argumenta logaritamske funkcije*
$$f(x) = \log_a (g(x)) \implies g(x) > 0$$
4. *ograničenost argumenta za arkus* $\{\text{arcsin}, \text{arccos}\}$ *funkcije*
$$f(x) = \arcsin (g(x)) \implies -1 \leq g(x) \leq 1$$
$$f(x) = \arccos (g(x)) \implies -1 \leq g(x) \leq 1$$

Primjer 9.1 Odredite domenu funkcije
$$f(x) = e^{\frac{1}{x^2-9}} + \frac{2}{x}.$$

Rješenje *Promatramo 2 uvjeta - s obzirom na nazivnike racionalnog izraza koji je eksponent eksponencijalne funkcije iz prvog pribrojnika i drugog pribrojnika:*

1. $x^2 - 9 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 \neq -3, \ x_2 \neq 3$
2. $x \neq 0$ *Domena je skup brojeva dobiven presjekom svih uvjeta koje funkcija preslikava u realne brojeve:*
$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\}$$

Primjer 9.2 Odredite domenu funkcije
$$f(x) = \frac{1}{4^x - 3 \cdot 2^x + 2}.$$

Rješenje *Ponovno promatramo nazivnik koji ne smije biti jednak* 0, *te rješavamo kvadratnu jednadžbu s nepoznanicom* 2^x *nakon zamjene sa* t

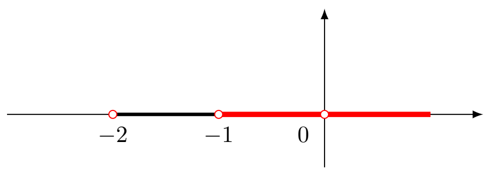
$$
\begin{aligned}
4^x - 3 \cdot 2^x + 2 \neq 0 &\implies 2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 \neq 0 \quad (2^x = t) \\
t^2 - 3t + 2 \neq 0 &\implies t_1 \neq 1,\ t_2 \neq 2 \\
2^x \neq 1 &\implies 2^x \neq 2^0 \implies x \neq 0 \\
2^x \neq 2 &\implies 2^x \neq 2^1 \implies x \neq 1 \\
\mathcal{D}_f &= \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

Primjer 9.3 Odredite domenu funkcije

$$
f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\ln{(x+1)}}.
$$

Rješenje *Promatramo složenu funkciju koja se sastoji od drugog korijena (prvi uvjet), logaritamske funkcije (drugi uvjet) i racionalne funkcije (treći uvjet):*

$$
\left.
\begin{aligned}
& x+2 \geq 0 \implies x \geq -2 \\
& x+1 > 0 \implies x > -1 \\
& \ln(x+1) \neq 0 \implies x+1 \neq e^0 \\
& \implies x+1 \neq 1 \implies x \neq 0
\end{aligned}
\right\} \implies \mathcal{D}_f = \langle -1, \infty \rangle \setminus \{0\}
$$

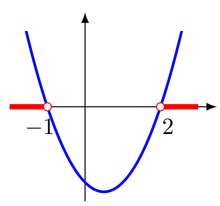


Primjer 9.4 Odredite domenu funkcije

$$
f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right).
$$

Rješenje

$$
\begin{aligned}
x - 2 \neq 0 &\implies x \neq 2 \\
\frac{x+1}{x-2} > 0 & \quad \Big/ \cdot (x-2)^2 \\
(x+1)(x-2) > 0 &\implies x_1 = -1,\ x_2 = 2
\end{aligned}
$$



$$
\mathcal{D}_f = \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 2, \infty \rangle
$$

Primjer 9.5 Odredite domenu funkcije

$$
f(x) = \frac{1}{\sin^2{(x)} - 2\sin{(x)}}.
$$

Rješenje

$$\begin{aligned}
\sin^2(x) - 2\sin(x) \neq 0 &\implies \sin(x)(\sin(x) - 2) \neq 0 \\
\sin(x) \neq 0 &\implies x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\
\sin(x) - 2 \neq 0 &\implies \sin(x) \neq 2, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
\mathcal{D}_f &= \mathbb{R} \setminus \{k\pi\},\ k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

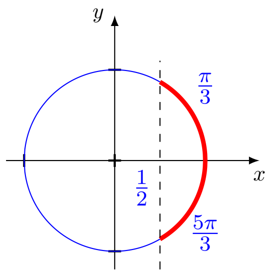
Primjer 9.6 Odredite domenu funkcije

$$f(x) = \ln(2\cos(x) - 1).$$

Rješenje

$$2\cos(x) - 1 > 0$$

$$\cos(x) > \frac{1}{2}$$



$$\mathcal{D}_f = \left\langle 0 + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right\rangle \cup \left\langle \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi \right\rangle,\ k \in \mathbb{Z}$$

Primjer 9.7 Odredite domenu funkcije

$$f(x) = \arccos\sqrt{2x-1}.$$

Rješenje *Iz uvjeta za ograničenost argumenta za arkus funkcije slijede nejednadžbe:*

$$\begin{aligned}
-1 \leq \sqrt{2x-1} \leq 1 &\implies \left|\sqrt{2x-1}\right| \leq 1 \\
\textit{zbog } \left|\sqrt{x}\right| \leq 1 &\implies 0 \leq x \leq 1 \\
\textit{dobijemo } 0 \leq 2x - 1 \leq 1 &\implies 1 \leq 2x \leq 2 \\
\textit{odakle slijedi } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 &\implies \mathcal{D}_f = \left[\frac{1}{2}, 1\right]
\end{aligned}$$

Definicija 9.3. Parnost i neparnost funkcije

Za realnu funkciju $f : \mathcal{D}_f \to \mathcal{K}_f$ kažemo da je:

1. *parna ako vrijedi $f(-x) = f(x), \quad \forall x \in \mathcal{D}_f$,*
2. *neparna ako vrijedi $f(x) = -f(x), \quad \forall x \in \mathcal{D}_f$.*

Napomena *Parnost realne funkcije prepoznajemo iz simetričnosti njezinog grafa*

1. *za parnu funkciju graf je simetričan u odnosu na y os,*
2. *neparna funkcija ima graf simetričan u odnosu na ishodište koordinatnog sustava.*

Primjer 9.8 Ispitajte parnost i neparnost funkcije
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}.$$

Rješenje *Provjeravamo parnost funkcije iz jednakosti $f(-x) = f(x)$:*
$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{-x - 2} = \frac{x^2 - 1}{-x - 2} = -\frac{x^2 - 1}{x + 2} \neq f(x)$$
Zaključujemo funkcija nije parna.
Provjeravamo neparnost funkcije iz jednakosti $f(-x) = -f(x)$:
$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{-x - 2} = \frac{x^2 - 1}{-x - 2} = -\frac{x^2 - 1}{x + 2} \neq -f(x)$$
Zaključujemo funkcija nije neparna.

Primjer 9.9 Ispitajte parnost i neparnost funkcije
$$f(x) = x^4 + 4x^2.$$

Rješenje *Provjeravamo parnost funkcije iz jednakosti $f(-x) = f(x)$:*
$$f(-x) = (-x)^4 + 4(-x)^2 = x^4 + 4x^2 = f(x)$$
Zaključujemo funkcija je parna.

Definicija 9.4. Periodičnost funkcije

Za realnu funkciju $f : \mathcal{D}_f \to \mathcal{K}_f$ kažemo da je periodična na domeni, ako postoji realna broj $P > 0$ takav da vrijedi
$$f(x + P) = f(x) \quad \forall x \in \mathcal{D}_f.$$
Najmanji broj $P > 0$ nazivamo osnovni ili temeljni period funkcije.

Primjer 9.10 Ispitajte periodičnost funkcije
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}.$$

Rješenje *Iz definicije periodičnosti funkcije $f(x) = f(x + P)$ za $x = 0$ slijedi jednakost*
$$f(0) = f(P) \Longrightarrow \frac{1}{2} = \frac{P^2 - 1}{P - 2} \Longrightarrow P = \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$$
Iz uvjeta $P > 0$ u definiciji zaključujemo kako mora vrijediti $P = \frac{1}{2}$. Kada bi taj P bio osnovni period funkcije tada bi vrijedila jednakost
$$f(x) = f(x + P), \forall x \in \mathcal{D}_f.$$

Međutim, uvrštenjem vrijednosti za P te sređivanjem izraza slijedi

$$\frac{x^2}{2} = \frac{7x}{2} \Longrightarrow x = \left\{0, \frac{7}{2}\right\}$$

Što je suprotno pretpostavci da vrijedi za svaki x iz domene. Možemo zaključiti kako zadana funkcija nije periodična.

Primjer 9.11 Odrediti temeljni period funkcije

$$f(x) = 5\sin(4x+5)\,.$$

Rješenje

$$\begin{aligned} f(x+\tau) &= f(x) \\ 5\sin(4(x+\tau)+5) &= 5\sin(4x+5) \\ \sin(4x+4\tau+5) &= \sin(4x+5) \\ 4\tau = 2\pi &\Rightarrow \tau = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Definicija 9.5. Nultočke funkcije

Kažemo da realna funkcija ima nultočku $x_0 \in \mathcal{D}_f$ ukoliko je vrijednost funkcije u toj točki jednaka nuli, tj. ukoliko vrijedi

$$f(x_0) = 0\,.$$

Napomena

1. *U nultočki graf funkcije presijeca apscisu, tj. x koordinatnu os.*
2. *Sjecište grafa funkcije s ordinatnom osi (y-os) nije nultočka funkcije, već se radi samo o točki $(0, f(0))$ presjecišta ordinatne osi.*

Primjer 9.12 Odredite nultočke funkcije

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-3}\,.$$

Rješenje *Nultočku funkcije određujemo rješavanjem jednadžbe $f(x) = 0$, tj. nalaženjem vrijednosti za x u kojima se vrijednost funkcije poništava*

$$f(x) = 0 \Longrightarrow \frac{x^2-4}{x-3} = 0$$

Budući se radi o racionalnoj funkciji, njena vrijednost će biti jednaka nuli samo kada je izraz u brojniku jednak nuli, i to za one x za koje je vrijednost nazivnika različita od nule.

$$\frac{x^2-4}{x-3} = 0 \Longrightarrow x^2-4 = 0 \Longrightarrow x = \pm 2$$

Budući je vrijednost nazivnika za te točke različita od nule zaključujemo kako su

$$x = \{-2, 2\}$$

jedine nultočke funkcije.

Sjecište ordinatne osi je točka s koordinatama

$$T\,(0, f(0)) = T\left(0, \frac{4}{3}\right)$$

Primjer 9.13 Odredite nultočke funkcije

$$f(x) = 4^x + 2^{x+1} - 8\,.$$

Rješenje

$$4^x + 2^{x+1} - 8 = 0 \implies (2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 8 = 0$$

Supstitucijom $2^x = t$, *dobijemo kvadratnu jednadžbu*

$$t^2 + 2t - 8 = 0 \Longrightarrow t_1 = -4, t_2 = 2$$

Kako je funkcija 2^x *uvijek pozitivna, možemo promatrati samo slučaj kada je* $2^x = 2$. *Prema tome je* $x = 1$.

Definicija 9.6. Kritična točka funkcije

Kažemo da je točka $c \in \mathcal{D}_f$ **kritična** *točka realne funkcije* $f(x)$ *ako se prva derivacija poništava* $(f'(c) = 0)$, *ili nije definirana u toj točki.*

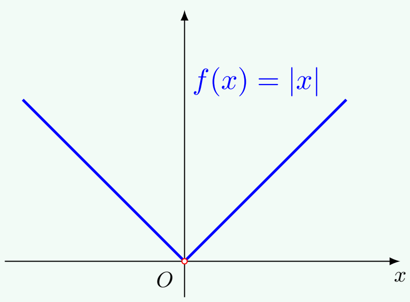
9.1.1 Linearna funkcija

Definicija 9.7. Apsolutna vrijednost

Realnu funkciju zadanu pravilom

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

nazivamo **apsolutna vrijednost** *realnog broja.*



Za sve realne brojeve a, b *vrijedi*

- $|x| \leq a \implies -a \leq x \leq a$
- **nejednakost trokuta**

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

- $||a| - |b|| \leq |a - b|$
- $|ab| = |a||b|$

Napomena *Svojstva apsolutne vrijednosti*

1. *domena, kodomena i slika funkcije*

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
- $\mathcal{K}_f = \mathbb{R}$
- $\mathcal{R}_f = [0, \infty\rangle$
- **nema** *posebnih uvjeta na domeni*

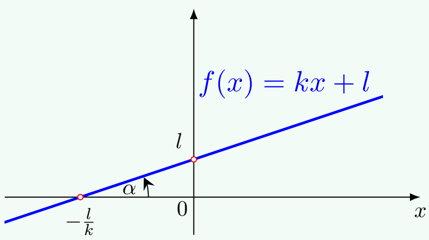
2. *svojstva funkcije*
   - **parna** *je funkcija*
   - **nije** *periodična*
3. *asimptote:* **nema** *nijednu*
4. *derivacije*
   - *prva,* $|x|' = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ \textit{nema}, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$
   - *ostale su* 0 *za* $x \neq 0$, *dok za* $x = 0$ **nema** *nijednu derivaciju*
5. *karakteristične točke*
   - *nultočka i presjecište ordinatne osi je točka* $O(0,0)$
   - **kritična točka** $O(0,0)$ *je ujedno* **lokalni i globalni** *minimum*
   - **nema** *točaka infleksije*
6. *karakteristični intervali*
   - *monotonosti*
     - **pada** *na intervalu* $\mathbb{R}_- = \langle -\infty, 0\rangle$
     - **raste** *na intervalu* $\mathbb{R}_+ = \langle 0, \infty\rangle$
   - **nema** *intervala zakrivljenosti*

Definicija 9.8. Linearna funkcija

Realnu funkciju zadanu izrazom

$$f(x) = kx + l, \quad k, l \in \mathbb{R}, \quad k \neq 0$$

nazivamo **linearna funkcija**.



- *graf funkcije je pravac*
- **koeficijent smjera** *za pravac*

$$k = \operatorname{tg} \alpha$$

- l *je* **odsječak** *na osi* y
- **normalna** *jednadžba pravca*

$$\frac{x}{-\frac{l}{k}} + \frac{y}{l} = 1, \; l \neq 0$$

Napomena *Svojstva linearne funkcije*

1. *domena, kodomena, slika funkcije*

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
- $\mathcal{K}_f = \mathbb{R}$
- $\mathcal{R}_f = \mathbb{R}$
- **nema** *posebnih uvjeta na domeni*

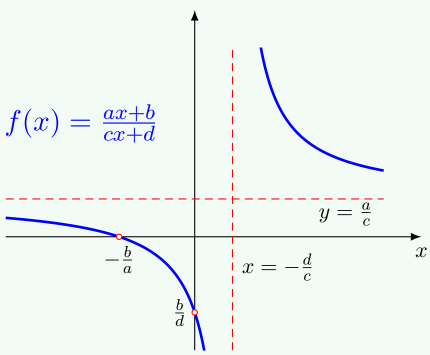
2. *svojstva funkcije*
   - **nije** *parna ni neparna*
   - **nije** *periodična*
3. *asimptote:* **nema** *nijednu*
4. *derivacije*
   - *prva* $(kx + l)' = k$
   - *druga i sve ostale derivacije su nula,* $(kx + l)^{(n)} = 0,\ n > 1$
5. *karakteristične točke*
   - **jedna** *nultočka* $x_0 = \left(-\frac{l}{k}\right)$
   - *presjecište ordinatne osi je točka* $(0, l)$
   - **nema** *stacionarnih ni kritičnih točaka*
   - **nema** *točaka infleksije*
6. *karakteristični intervali*
   - *na* **cijeloj** *domeni* **raste** *($k > 0$) ili* **pada** *($k < 0$)*
   - **nema** *intervala zakrivljenosti*

Definicija 9.9. Razlomljena linearna funkcija

Realnu funkciju zadanu kvocijentom linearnih funkcija

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad a, b, c \neq 0, d \in \mathbb{R}$$

nazivamo **razlomljena linearna funkcija**.



Za razlomljenu racionalnu funkciju vrijedi

- *ukoliko je* $a = 0$*, tada* **nema** *nultočke,*
- *ukoliko je* $d = 0$*, tada* **nema** *presjecišta osi* y.

Napomena *Svojstva razlomljene linearne funkcije*

1. *domena, kodomena i slika funkcije*
   - $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$
   - $\mathcal{K}_f = \mathbb{R}$

- $\mathcal{R}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$
- *uvjet na domeni* $x \neq -\frac{d}{c}$

2. *svojstva funkcije*
   - **nije** *parna ni neparna*
   - **nije** *periodična*
3. *asimptote*
   - *vertikalna je pravac* $x = -\frac{d}{c}$
   - *horizontalna je pravac* $y = \frac{a}{c}$
   - **nema** *kose asimptote*
4. *derivacije*
   - *prva* $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$
   - *druga* $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)'' = \frac{2c(ad-bc)}{(cx+d)^3}$
5. *karakteristične točke*
   - **jedina** *nultočka* $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$, $a \neq 0$
   - *presjecište ordinatne osi* $\left(0, \frac{b}{d}\right)$, $d \neq 0$
   - **nema** *stacionarnih ni kritičnih točaka*
   - **nema** *točaka infleksije*
6. *dva su karakteristična intervala određena točkom prekida* $\left\langle -\infty, -\dfrac{d}{c} \right\rangle$, $\left\langle -\dfrac{d}{c}, \infty \right\rangle$
   - *monotonost: na* **oba** *intervala* **raste**, *ili* **pada**
   - *zakrivljenost: na jednom je konveksna, a na drugom konkavna*

Primjer 9.14 Ispitajte tok funkcije

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1}\,.$$

Rješenje

1. *domena* $x - 1 \neq 0 \implies x \neq 1 \implies \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
2. *kodomena* $\mathcal{K}_f = \mathbb{R}$
3. *razlomljena linearna funkcija* **nije** *parna ni neparna*
4. *razlomljena linearna funkcija* **nije** *periodična*
5. *nultočke,* $f(x) = 0 \implies 2x + 1 = 0 \implies x_0 = -\frac{1}{2}$
6. *presjecište s y osi,* $f(0) = -1 \implies T\,(0, -1)$
7. *asimptote funkcije*
   - **vertikalna** *je pravac* $x = 1$ *kroz točku prekida iz domene*
   - **horizontalna** *je pravac* $y = 2$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}\left(2+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\cancelto{0}{\frac{1}{x}}}{1-\cancelto{0}{\frac{1}{x}}} = 2$$

   - *razlomljena linearna funkcija* **nema kose** *asimptote*

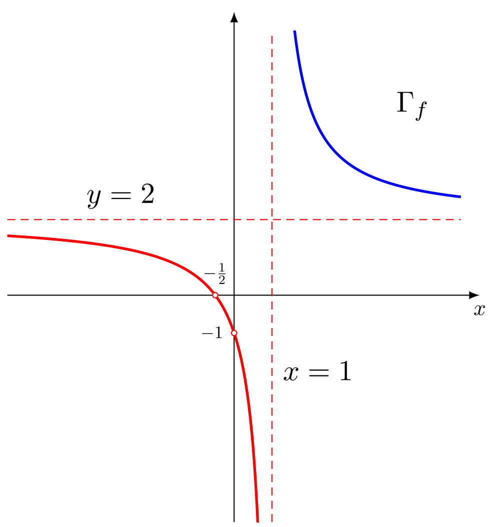
8. *prva derivacija*
$$f'(x) = \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)' = \frac{2(x-1)-(2x+1)}{(x-1)^2} = -\frac{3}{(x-1)^2}$$
9. **nema** *stacionarnih točaka zbog* $f'(x) = 0 \implies -3 = 0$, *što je kontradikscija*
10. *budući nema stacionarnih točaka tada nema ni* **ekstrema**
11. *intervali* **monotonosti** *su određeni točkom prekida iz domene, i vrijedi*
$$f'(x) < 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f$$
tj. funkcija je **padajuća na oba** *intervala monotonosti*

	$-\infty$	1	∞
f'	$-$	$-$	
f	$\searrow$	$\searrow$	

12. *druga derivacija*
$$f''(x) = \left(-\frac{3}{(x-1)^2}\right)' = -3\left((x-1)^{-2}\right)' = -3(-2)(x-1)^{-3} = \frac{6}{(x-1)^3}$$
13. **nema** *točaka infleksije zbog kontradikcije* $f''(x) = 0 \implies 6 = 0$
14. *intervali zakrivljenosti su određeni točkom prekida iz domene*

	$-\infty$	1	∞
f''	$-$	$+$	
f	$\cap$	$\cup$	

- *funkcija je* **konkavna** *na intervalu* $\langle -\infty, 1\rangle$
- *funkcija je* **konveksna** *na intervalu* $\langle 1, \infty\rangle$



Iz grafa funkcije možemo odrediti sliku funkcije $\mathcal{R}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

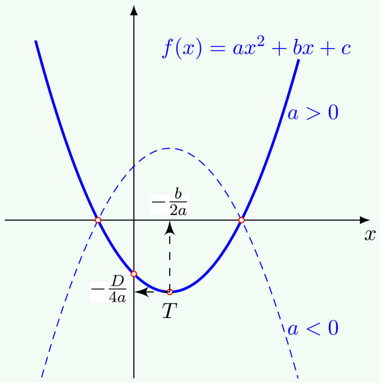
9.1.2 Kvadratna funkcija

Definicija 9.10. Kvadratna funkcija

Realnu funkciju zadanu izrazom

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

nazivamo **opća kvadratna funkcija**, *a njezin graf je* **parabola**.



- *alternativni zapis*

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

- *diskriminanta*

$$D = b^2 - 4ac$$

- *tjeme parabole*

$$T\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$$

Napomena *Svojstva kvadratne funkcije*

1. *domena, kodomena i slika funkcije*
   - $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
   - $\mathcal{K}_f = \mathbb{R}$
   - $\mathcal{R}_f = \begin{cases} \left[-\frac{D}{4a}, \infty\right\rangle, & a > 0 \\ \left\langle -\infty, -\frac{D}{4a}\right], & a < 0 \end{cases}$
   - **nema** *uvjeta na domeni*
2. *svojstva funkcije*
   - **može** *biti parna, ali* **ne može** *biti neparna*
   - **nije** *periodična*
3. *asimptote:* **nema** *nijednu*
4. *derivacije*
   - *prva* $\left(ax^2 + bx + c\right)' = 2ax + b$
   - *druga* $\left(ax^2 + bx + c\right)'' = 2a$
5. *karakteristične točke*
   - *nultočke ovise o predznaku diskriminante* $D = b^2 - 4ac$
     - $D < 0$, **dvije različite** *kompleksne (ne siječe $x-$os)*
     - $D = 0$, **jedna dvostruka** *realna (tjeme)* $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$
     - $D > 0$, **dvije različite** *realne* $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
   - *presjecište ordinatne osi* $(0, c)$
   - **jedina** *stacionarna točka je* **tjeme** *parabole* $T\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$

- **nema** *točaka infleksije*

6. *dva karakteristična intervala određena su točkom tjemena* $\left\langle -\infty, -\frac{b}{2a}\right], \left[-\frac{b}{2a}, \infty\right\rangle$
   - *monotonosti, do tjemena* **pada** *($a > 0$), ili* **raste** *($a < 0$), a nakon tjemena suprotno*
   - *domena je* **jedini** *interval zakrivljenosti, konveksan ($a > 0$) ili konkavan ($a < 0$)*

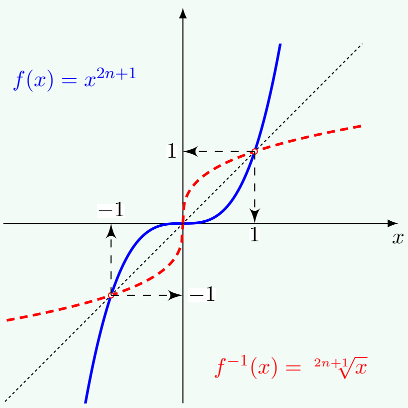
9.1.3 Potencije i korijeni

Definicija 9.11. Neparne potencije

Realne funkcije zadane izrazom

$$f(x) = x^{2n+1},\ n \in \mathbb{N}$$

nazivamo **neparne potencije**.



Neparne potencije su **bijekcije** *te imaju* **neparne korijene** *za inverzne funkcije*

$$f^{-1}(x) = \sqrt[2n+1]{x}$$

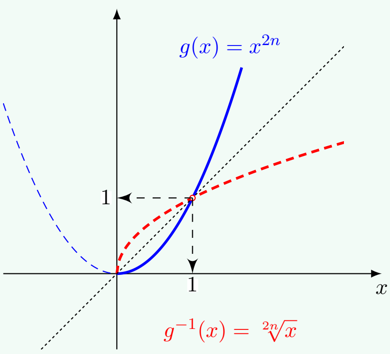
Neparne potencije i neparni korijeni su **strogo rastuće** *funkcije na cijeloj domeni.*

Definicija 9.12. Parne potencije

Realne funkcije zadane izrazom

$$f(x) = x^{2n},\ n \in \mathbb{N}$$

nazivamo **parne potencije**.



Parne potencije **nisu injekcije** *te* **nemaju** *inverze. Restrikcije parnih potencija na pozitivne realne brojeve*

$$g(x) = f(x), \quad \forall x \in [0, \infty\rangle$$

su strogo rastuće bijekcije stoga imaju inverzne funkcije

$$g^{-1}(x) = \sqrt[2n]{x}$$

Napomena *Svojstva potencija i korijena*

1. *domena, kodomena i slika funkcije*
   - $\mathcal{D}_f = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{neparne potencije i korijeni} \\ \mathbb{R}, & \text{parne potencije} \\ [0, \infty\rangle, & \text{parni korijeni} \end{cases}$
   - $\mathcal{K}_f = \mathbb{R}$
   - $\mathcal{R}_f = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{neparne potencije i korijeni} \\ [0, \infty\rangle, & \text{parne potencije i korijeni} \end{cases}$
   - *za parne korijene uvjet za domenu je* $x \geq 0$
2. *svojstva funkcija*
   - *neparne potencije i korijeni su neparne, dok su parne potencije parne funkcije, a parni korijeni* **nisu** *parni ni neparni*
   - **nisu** *periodične funkcije*
3. *asimptote:* **nemaju** *nijednu*
4. *derivacija za potencije i korijene se računa prema pravilu za potencije* $(x^n)' = nx^{n-1}$, *u točki nula korijeni* **nemaju** *nijednu derivaciju*
5. *karakteristične točke*
   - **jedina** *nultočka i presjecište* y *osi je točka* $(0, 0)$
   - $(0, 0)$ *je stacionarna točka za parne potencije, dok parni korijeni te neparne potencije i korijeni nemaju stacionarnih točaka*
   - $(0, 0)$ *je točka infleksije za neparne potencije i korijene, dok parne potencije i korijeni nemaju točaka infleksije*
6. *karakteristični intervali*
   - *parne potencije su* **padajuće** *na intervalu* $\langle -\infty, 0\rangle$ *i* **rastuće** *na intervalu* $\langle 0, \infty\rangle$, *dok su parni korijeni te neparne potencije i korijeni uvijek rastuće funkcije*
   - *parne potencije su konveksne dok su parni korijeni konveksni na* $\langle 0, \infty\rangle$,*, neparne potencije su konkavne na* $\langle -\infty, 0\rangle$ *i konveksne na* $\langle 0, \infty\rangle$, *a neparni korijeni suprotno*

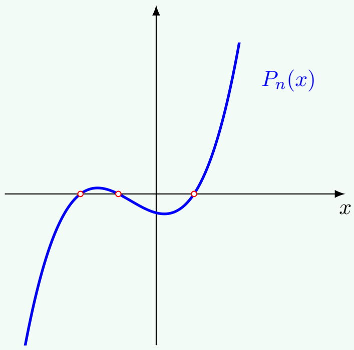
9.1.4 Polinomi

Definicija 9.13. Polinomi

Za prirodan broj $n \in \mathbb{N}$, realnu funkciju zadanu izrazom

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

uz uvjet $a_n \neq 0$ nazivamo **polinom stupnja** n.



- **koeficijenti** *polinoma*

$$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$$

- *broj n nazivamo* **stupanj** *polinoma*

Napomena *Svojstva polinoma*

1. *domena, kodomena i slika funkcije*
   - $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
   - $\mathcal{K}_f = \mathbb{R}$
   - $\mathcal{R}_f \subset \mathbb{R}$
   - **nema** *uvjeta na domenu*
2. *svojstva funkcija*

   parnost i neparnost
   - *ako su* **svi** *članovi s* **parnim** *potencijama, tada je polinom* **parna** *funkcija,*
   - *ako su* **svi** *članovi s* **neparnim** *potencijama i vrijedi $a_0 = 0$, tada je polinom* **neparna** *funkcija*
   - *inače, polinom nije parna ni neparna funkcija*

   periodičnost *nisu periodični*
3. *asimptote: nemaju nijednu*
4. - *derivacija se računa član po član prema pravilu za potencije*

   $$(x^n)' = nx^{n-1}$$

   - *derivacije (n+1)-og (i višeg) reda su 0 za polinom n-tog stupnja*
5. *karakteristične točke*
   - *polinomi mogu imati* **najviše** *n različitih nultočaka te jedino presjecište y osi točku $(0, a_0)$*
   - *polinomi mogu imati* **najviše** *$n-1$ različitih stacionarnih točaka*
   - *polinomi mogu imati* **najviše** *$n-2$ različitih točaka infleksije*

6. *karakteristični intervali*
   - *polinomi mogu imati najviše n različitih intervala monotonosti*
   - *polinomi mogu imati najviše $n-1$ različitih intervala zakrivljenosti*

Napomena Hornerova shema

Vrijednost polinoma za zadanu točku $c \in \mathbb{R}$ možemo izračunati primjenom **Hornerove** *sheme. Ukoliko polinom $P_n(x)$ zapišemo na sljedeći način*

$$P_n(x) = (((\cdots(a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \cdots + a_2)x + a_1)x + a_0$$

tada vrijednost polinoma $P_n(c)$ možemo izračunati algoritmom

Input: *n stupanj polinoma, tj. njegova najviša potencija*
Input: *a_i popis svih koeficijenata polinoma uključujući $a_i = 0$*
Input: *c točka za koju računamo vrijednost polinoma*
Output: *vrijednost polinoma u točki $P_n(c)$*

```
rezultat ← a_n
for ∀i ∈ {n − 1, n − 2, . . . , 1, 0} do
    rezultat ← rezultat ∗ c + a_i
end
return rezultat                        // izračunata vrijednost polinoma
```

Primjer 9.15 Hornerovom shemom za $c = 4$ izračunajte vrijednost polinoma

$$P_5(x) = 2x^5 + 3x^4 - x^2 - 2x + 13\,.$$

Rješenje *Hornerovu shemu zapisujemo u obliku tablice*

1. *redak: koeficijenti polinoma s nulama za $a_i = 0$*
2. *redak: umnožak $rezultat * c$*
3. *redak: zbroj umnoška i koeficijenta a_i u istom stupcu*

	$c=4$					
a_i	2	3	0	−1	−2	13
$rezultat * c$		8	44	176	700	2792
$rezultat * c + a_i$	2	11	44	175	698	**2805**

Iz tablice čitamo vrijednost polinoma $P_5(4) = 2805$.

Napomena Faktorizacija polinoma

Za svaki polinom

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

vrijedi, ako je $\alpha \in \mathbb{R}$ realna nultočka polinoma, tada polinom možemo zapisati u obliku

$$P_n(x) = (x - \alpha)P_{n-1}(x)$$

Napomena Kompleksne nultočke

Ako je $z \in \mathbb{C}$ kompleksna nultočka polinoma, tada vrijedi

1. $\overline{z} \in \mathbb{C}$ *je također nultočka,*
2. $P_n(x) = (x^2 - (z + \overline{z})x + |z|^2)P_{n-2}(x), \quad n \geq 2$

Postupak određivanja polinoma nižeg stupnja kojih umnožak određuje polazni polinom se naziva **faktorizacijom** *polinoma.*

Primjer 9.16 Nađite faktorizaciju polinoma

$$P(x) = x^3 - x^2 + 4x - 4\,.$$

Rješenje

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - x^2 + 4x - 4 = x^{2+1} - x^2 + 4x - 4 \\ &= x^2(x-1) + 4(x-1) = (x^2+4)(x-1) \end{aligned}$$

Primijetimo kako u nekim slučajevima izjednačavanjem s nulom faktoriziranog polinoma možemo jednostavnije odrediti nultočke polaznog polinoma.

$$P(x) = 0 \implies (x^2+4)(x-1) = 0 \implies x^2 + 4 = 0 \text{ ili } x - 1 = 0$$

Odatle, jednostavno dobijemo sve nultočke polinoma $x_0 \in \{1, -2i, 2i\}$.

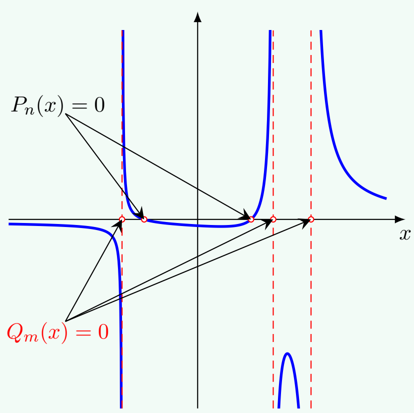
9.1.5 Racionalna funkcija

Definicija 9.14. Racionalna funkcija

Neka su $P_n(x), Q_m(x)$ polinomi, funkciju određenu izrazom

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

nazivamo **racionalna** *funkcija.*



- *nultočke nazivnika $Q_m(x) = 0$ nazivamo* **polovima** *uz uvjet da nisu nultočke brojnika*
- *ako je $n < m$ tada se radi o* **pravoj** *racionalnoj funkciji*
- *za nultočke i polove* **parne** *kratnosti funkcija* **ne mijenja** *predznak dok za neparnu kratnost mijenja*

Napomena *Svojstva racionalne funkcije*

1. *domena, kodomena i slika funkcije*
   - $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \colon Q_m(x) = 0\}$
   - $\mathcal{K}_f = \mathbb{R}$
   - *nema generalnog pravila za* **sliku** *racionalne funkcije*
   - *uvjet za domenu su nultočke nazivnika* $Q_m(x) \neq 0$
2. *svojstva funkcije*
   - *nema općeg pravila za parnost, već za* **svaku** *racionalnu funkciju treba provjeriti uvjete iz definicije*
   - *racionalne funkcije* **nisu** *periodične*
3. *asimptote*
   - *vertikalne su određene nultočkama nazivnika (***polovi***)*
   - **jedna** *horizontalna ako vrijedi* $n = m$*, tj. isti stupanj polinoma u brojniku i nazivniku, dok je za* $n < m$*,* x *os horizontalna asimptota,*
   - **jedna** *kosa ako vrijedi* $n = m + 1$*, inače* **nema** *ako se radi o* **pravoj** *racionalnoj funkciji, za* $n > m + 1$*, radi se o nelinearnim asimptotama*
4. *derivacija bilo kojeg reda se računa primjenom pravila za kvocijent*
5. *karakteristične točke*
   - *nultočke su iz* **brojnika***, tj. rješenja jednadžbe* $P_n(x) = 0$ *uz uvjet da nisu nultočke nazivnika*
   - *polovi su nultočke* **nazivnika***, tj. rješenja jednadžbe* $Q_m(x) = 0$ *uz uvjet da nisu nultočke brojnika*
   - *stacionarne točke se određuju (prema definiciji) iz nultočaka prve derivacije*
   - *točke infleksije se određuju (prema definiciji) iz nultočaka druge derivacije*
6. *karakteristični intervali*
   - *monotonosti su određeni* **stacionarnim** *točkama i* **polovima** *funkcije*
   - *zakrivljenosti su određeni točkama* **infleksije** *i* **polovima** *funkcije*

Napomena **Dijeljenje polinoma s ostatkom**

Ukoliko vrijedi $n \geq m$ *tada dijeljenjem polinoma možemo rastaviti racionalnu funkciju*

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = P_{n-m}(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)}, \quad k < m$$

gdje je $P_{n-m}(x)$ *kvocijent dva polinoma dok je* **ostatak** *prava racionalna funkcija.*

Dijeljenjem polinoma možemo odrediti **asimptote** *racionalne funkcije, naime, vrijedi*

- $n = m$*, tada je* $P_{n-m}(x) = b$ *konstanta koja je ujedno* **horizontalna** *asimptota* $(y = b)$ *za racionalnu funkciju*
- $n = m + 1$*, tada je* $P_{n-m}(x) = ax + b$*, linearna funkcija koja je* **kosa** *asimptota* $(y = ax + b)$ *za racionalnu funkciju*
- $n > m + 1$*, tada* $P_{n-m}(x)$ *određuje* **nelinearnu asimptotu**

Primjer 9.17 Odredite kvocijent i ostatak za racionalnu funkciju

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 2x + 4}{x - 1}.$$

Rješenje *Budući je polinom u brojniku većeg stupnja od polinoma u nazivniku možemo napraviti dijeljenje polinoma s ostatkom*

$$
\begin{array}{l}
\left(\quad x^3 + 2x^2 - 2x + 4\right) \div \left(x - 1\right) = x^2 + 3x + 1 + \dfrac{5}{x-1} \\
\underline{-x^3 \;\; + x^2} \\
\qquad\quad 3x^2 - 2x \\
\qquad \underline{-3x^2 + 3x} \\
\qquad\qquad\qquad x + 4 \\
\qquad\qquad \underline{-x + 1} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 5
\end{array}
$$

- *kvocijent* $x^2 + 3x + 1$ *(nelinearna asimptota funkcije)*
- *ostatak* $\dfrac{5}{x-1}$

Primjer 9.18 Ispitajte tok funkcije

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2}.$$

Rješenje

1. *domena* $x^2 - 2 \neq 0 \implies x \neq 0 \pm \sqrt{2} \implies D = \mathbb{R} \backslash \{\pm\sqrt{2}\}$
2. *kodomena* $\mathcal{K}_f = \mathbb{R}$
3. *funkcija je parna jer je* $f(-x) = \dfrac{(-x)^2 - 4}{(-x)^2 - 2} = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2} = f(x)$
4. *funkcija nije periodična*
5. *nultočke* $f(x) = 0 \implies x = \pm 2$
6. *presjek s y osi* $f(0) = \dfrac{0^2 - 4}{0^2 - 2} = 2 \implies T(0, 2)$
7. *asimptote funkcije*
   - *vertikalne asimptote su pravci* $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$ *kroz točke prekida iz domene*
   - *horizontalna je pravac* $y = 1$

     $$y = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2} = 1$$
   - *kosa asimptota ne postoji jer ima horizontalnu*
8. *prva derivacija*

   $$f'(x) = \left(\frac{x^2 - 4}{x^2 - 2}\right)' = \frac{2x \cdot (x^2 - 2) - (x^2 - 4) \cdot 2x}{(-2 + x^2)^2} = \frac{4x}{(-2 + x^2)^2}$$
9. *stacionarna točka* $(0, 2)$

   $$f'(x) = 0 \implies 4x = 0 \implies x = 0 \implies (0, 2)$$
10. *intervali monotonosti su određeni stacionarnom točkom*

	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$		$-$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	
			min.		

11. stacionarna točka je lokalni minimum

12. druga derivacija

$$f''(x) = \left(\frac{4x}{(-2+x^2)^2}\right)' = \frac{4(-2+x^2)^2 - 4x \cdot 2(-2+x^2) \cdot 2x}{(x^2-2)^4} = -\frac{8+12x^2}{(x^2-2)^3}$$

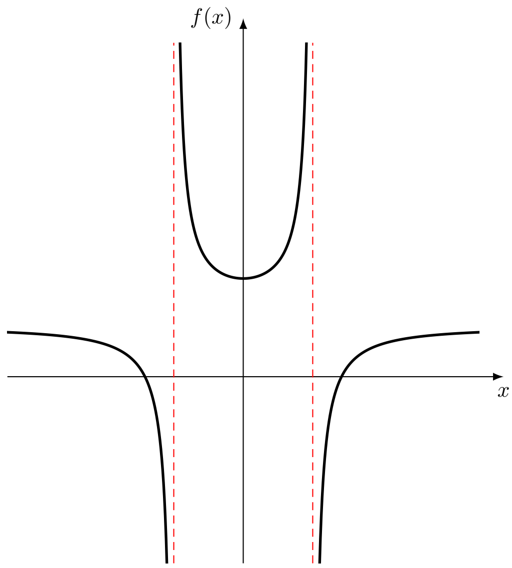
13. točke infleksije ne postoje

$$f''(x) = 0 \Longrightarrow 8 + 12x^2 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{3}{2}}$$

14. intervali zakrivljenosti

	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
f''		$+$		$-$		$+$	
f		$\cap$		$\cup$		$\cap$	
		konkavna		*konveksna*		*konkavna*	

15. graf funkcije



Iz grafa funkcije možemo odrediti sliku funkcije $\mathcal{R}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Primjer 9.19 Ispitajte tok funkcije

$$f(x) = \frac{x^2-2}{x+2}.$$

Rješenje

1. domena $x + 2 \neq 0 \Longrightarrow x \neq -2 \Longrightarrow \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

2. kodomena $\mathcal{K}_f = \mathbb{R}$

3. *funkcija nije ni parna ni neparna*

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 2}{-x + 2} = \frac{x^2 - 2}{-x + 2} \neq f(x)$$
$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 2}{-x + 2} = -\frac{x^2 - 2}{x - 2} \neq -f(x)$$

4. *funkcija nije periodična*

5. *nultočke*

$$f(x) = 0 \Longrightarrow x = \pm - \sqrt{2} \Longrightarrow \left(-\sqrt{2}, 0\right), \left(\sqrt{2}, 0\right)$$

6. *presjek s y osi* $f(0) = \frac{0^2-2}{0+2} = -1 \Longrightarrow T(0, -1)$

7. *asimptote funkcije*

- *vertikalna asimptota je pravac* $x = -2$ *kroz točku prekida iz domene*
- *horizontalna ne postoji*

$$y = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - 2}{x + 2} = \infty$$

- *kosa asimptota je pravac* $y = x - 2$

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - 2}{x^2 + 2x} = 1$$
$$l = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - 2}{x + 2} - x = -2$$

8. *prva derivacija*

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 - 2}{x + 2}\right)' = \frac{x^2 + 4x + 2}{(x + 2)^2}$$

9. *stacionarne točke* $(-3.41, -6.83)$, $(-0.59, -1.17)$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow x^2 + 4x + 2 = 0 \Longrightarrow x_1 = -3.41, x_2 = -0.59$$

10. *intervali monotonosti su određeni stacionarnim točkama*

	$-\infty$	-3.41	-0.59	$+\infty$
f'	$+$	$-$	$+$	
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
		Maks.	*min.*	

11. *ima lokalne ekstreme u stacionarnim točkama: Maks.*$(-3.4, -6.8)$, *min.*$(-0.6, -1.2)$

12. *druga derivacija*

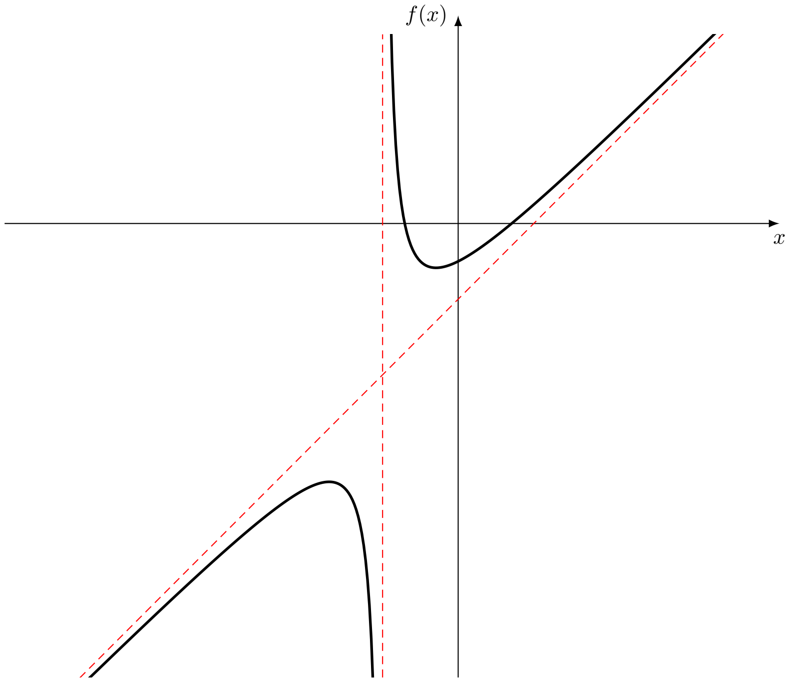
$$f''(x) = \left(\frac{x^2 + 4x + 2}{(x + 2)^2}\right)' = \frac{4}{(x + 2)^3}$$

13. *točke infleksije ne postoje jer je* $f''(x) \neq 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f$

14. *intervali zakrivljenosti*

	$-\infty$	-2	$+\infty$
f''	$-$	$+$	
f	$\cap$	$\cup$	
	konkavna	*konveksna*	

15. *graf funkcije*



Iz grafa funkcije možemo odrediti sliku funkcije $\mathcal{R}_f = \langle -\infty, -3.41] \cup [-0.59, \infty\rangle$.

9.1.6 Eksponencijalna i logaritamska funkcija

Definicija 9.15. Eksponencijalna funkcija b^x

Postoji točno jedna bijekcija $f\colon \mathbb{R} \to \langle 0, \infty\rangle$ *za koju vrijedi*

$$f(x+y) = f(x)f(y), \; \forall x, y \in \mathbb{R}$$

sa svojstvima

$$f(0) = 1,$$
$$f(1) = b > 0, \; b \in \mathbb{R}$$

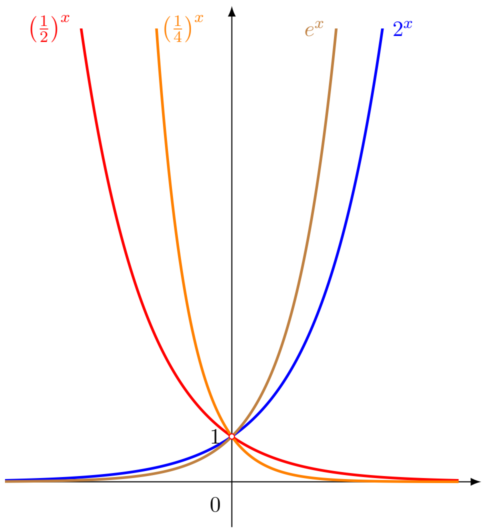
Bijekciju nazivamo ***eksponencijalna funkcija s bazom*** b*, te pišemo*

$$f(x) = b^x, \qquad b > 0, \; b \neq 1.$$

Eksponencijalna funkcija s bazom b *ima ova svojstva:*

1. $b^{x+y} = b^x b^y$
2. $b^{x-y} = \frac{b^x}{b^y}$
3. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$
4. $(b^x)^y = b^{xy}$
5. $(ab)^x = a^x b^x$

Napomena *Na sljedećoj slici su prikazani grafovi nekih eksponencijalnih funkcija (b^x) za različite vrijednosti baze $b > 0, b \neq 1$.*



Definicija 9.16. Eksponencijalna funkcija e^x

Funkciju $f(x) = e^x$, *gdje je* $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \approx 2,718281828$ *nazivamo samo* **eksponencijalna** *funkcija.*

Napomena *Svojstva eksponencijalne funkcije b^x*

1. *područje definicije, vrijednosti i slika funkcije*
   - $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
   - $\mathcal{K}_f = \langle 0, \infty\rangle$
   - $\mathcal{R}_f = \langle 0, \infty\rangle$
   - **nema** *posebnih uvjeta na domeni*
2. *svojstva funkcije*
   - *nije* **parna** *ni* **neparna** *funkcija*
   - **nije** *periodična*
3. *asimptote*
   - *vertikalnu* **nema**
   - *horizontalna $y = 0$ prema pravilu*

$$\begin{aligned} 0 < b < 1, &\quad \textit{desna} \\ b > 1, &\quad \textit{lijeva} \end{aligned}$$

   - **nema** *kosih asimptota*

4. *derivacija bilo kojeg reda ($n \in \mathbb{N}$) je dana pravilom*

$$(b^x)^{(n)} = \begin{cases} (\ln(b))^n \, b^x, & b \neq e \\ e^x, & b = e \end{cases}$$

5. *karakteristične točke*
   - **nema** *nultočaka, i presjecište ordinatne osi je točka* $(0,1)$
   - **nema** *stacionarnih (ni kritičnih) točaka, te zato nema lokalnih ekstrema*
   - **nema** *točaka infleksije*
6. *karakteristični intervali*
   - *uvijek je* **strogo monotona** *prema pravilu*

$$\begin{aligned} 0 < b < 1, &\quad \textit{padajuća} \\ b > 1, &\quad \textit{rastuća} \end{aligned}$$

   - *uvijek je* **konveksna**

Primjer 9.20 Ispitajte tok funkcije

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

Rješenje

1. *nema uvjeta za domenu* $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
2. *kodomena je određena eksponencijalnom funkcijom* $\mathcal{K}_f = \langle 0, \infty \rangle$
3. $f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$*, funkcija je parna*
4. *eksponencijalna funkcija nije periodična*
5. *nema nultočaka zbog eksponencijalne funkcije*
6. *presjecište s* y *osi,* $f(0) = e^{-0^2} = e^0 = 1 \implies T(0,1)$
7. *asimptote funkcije*
   - *nema* **vertikalnu** *ni* **kosu** *asimptoptu budući ih nema ni eksponencijalna*
   - **horizontalna** *je pravac* $y = 0$ *(x-os). Budući je parna funkcija dovoljno je odrediti limes za* $x \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\infty} = 0$$

8. *prva derivacija*

$$f'(x) = \left(e^{-x^2}\right)' = e^{-x^2}\left(-x^2\right)' = -2xe^{-x^2}$$

9. **stacionarne** *točke, budući je eksponencijalna uvijek rastuća i pozitivna ($f(x) > 0$), vrijedi,*

$$f'(x) = 0 \implies -2x = 0 \implies x = 0,$$

10. *lokalni ekstrem (lokalni maksimum) je u stacionarnoj točki* $(0,1)$
11. *intervali* **monotonosti** *su određeni stacionarnom točkom*

	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$+$	$-$	
f	$\nearrow$	$\searrow$	
		Maks.	

12. *druga derivacija*

$$f''(x) = \left(-2xe^{-x^2}\right)' = (-2x)'e^{-x^2} + (-2x)\left(e^{-x^2}\right)'$$
$$= -2e^{-x^2} + (-2x)\left(-2xe^{-x^2}\right) = \left(4x^2 - 2\right)e^{-x^2}$$

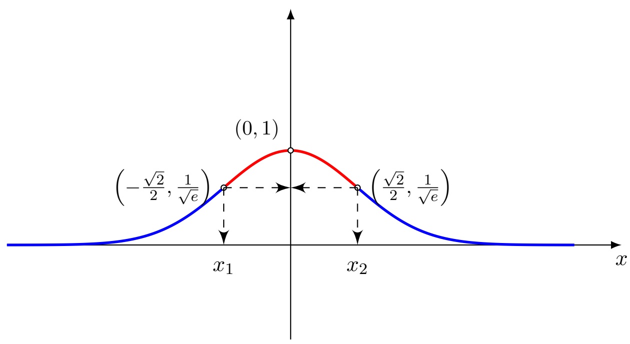
13. *točke infleksije slijede iz*

$$f''(x) = 0 \implies \left(4x^2 - 2\right)e^{-x^2} = 0$$
$$\implies 4x^2 - 2 = 0 \implies x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

14. *intervali zakrivljenosti su određeni točkama infleksije*

	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
f''	$+$	$-$	$+$	
f	$\cup$ *konveksna*	$\cap$ *konkavna*	$\cup$ *konveksna*	

15. *Graf funkcije* $f(x) = e^{-x^2}$



Iz grafa funkcije možemo odrediti sliku funkcije $\mathcal{R}_f = \langle 0, 1\rangle$.

Primjer 9.21 Ispitajte tok funkcije

$$f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Rješenje

1. *domena* $x \neq 0 \implies \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
2. *kodomena* $\mathcal{K}_f = \mathbb{R}$
3. $f(-x) = -x \cdot e^{-\frac{1}{(-x)^2}} = -x \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} = -f(x)$, *funkcija je neparna*
4. *eksponencijalna funkcija nije periodična*
5. *funkcija nema nultočaka*
6. *ne postoji presjecište s y osi*

7. *asimptote funkcije*
   - *nema vertikalnu asimptotu*
   - *horizontalna asimptota ne postoji*

$$y = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} = \pm\infty \cdot 1 = \pm\infty$$

   - *kosa asimptota je pravac* $y = x$

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{-\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{(\pm\infty)^2}} = e^0 = 1$$

$$l = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(x \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} - 1 \cdot x\right) = (\infty - \infty)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} x\left(e^{-\frac{1}{x^2}} - 1\right) = (\infty \cdot 0) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2}{x^3} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2}{x \cdot e^{\frac{1}{x^2}}} = \frac{-2}{\infty} = 0$$

8. *prva derivacija*

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} + x \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{-2}{x^3}\right) = e^{-\frac{1}{x^2}} \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)$$

9. *lokalni ekstremi ne postoje jer je* $f'(x) > 0$, *za svaki* x, *te je funkcija strogo rastuća na cijeloj domeni*

10. *druga derivacija*

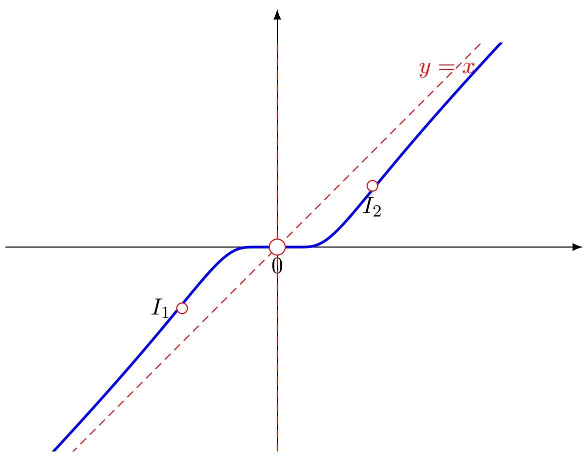
$$f''(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{1}{x^3} \cdot \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) + e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{4}{x^3}\right) = e^{-\frac{1}{x^2}} \left(\frac{2}{x^3} + \frac{4}{x^5} - \frac{4}{x^3}\right)$$

$$= e^{-\frac{1}{x^2}} \left(-\frac{2}{x^3} + \frac{4}{x^5}\right) = e^{-\frac{1}{x^2}} \left(\frac{-2x^2 + 4}{x^5}\right)$$

11. *točke infleksije:* $f''(x) = 0 \implies -2x^2 + 4 = 0 \implies x_1 = -\sqrt{2},\ x_2 = \sqrt{2}$

	$-\infty$ do $-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$ do 0	0 do $\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$ do $+\infty$
f''	$+$	$-$	$+$	$-$
f	$\cup$ konveksna	$\cap$ konkavna	$\cup$ konveksna	$\cap$ konkavna

12. *graf funkcije*



Iz grafa funkcije možemo odrediti sliku funkcije $\mathcal{R}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Definicija 9.17. Logaritamska funkcija $\log_b(x)$

Inverznu funkciju eksponencijalne funkcije $f(x) = b^x$ nazivamo **logaritamska** *funkcija po bazi b*

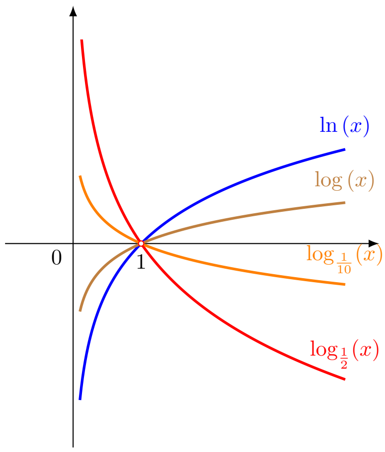
$$f^{-1} : \langle 0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$$

te ju označavamo s $\log_b$. Za bazu b logaritamske funkcije također vrijedi $b > 0$, i $b \neq 1$.

Svojstva logaritamske funkcije:

- $\log_b(1) = 0$
- $\log_b(b) = 1$
- $\log_b(x) = \dfrac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$
- $\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$
- $\log_b\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$
- $\log_b(x^r) = r\log_b(x),\ \forall r \in \mathbb{R}$

Napomena *Na sljedećoj slici su prikazani grafovi logaritamskih funkcija za različite vrijednosti baze.*



Napomena *Logaritam po bazi e označavamo s $\ln$ i zovemo prirodnim logaritmom, dok logaritam po bazi 10 označavamo samo $\log$, te ga nazivamo dekadnim ili ponekad Briggsovim logaritmom.*

Napomena *Opću potenciju $f(x) = x^\alpha$ za $x > 0$ možemo definirati pomoću eksponencijalne i logaritamske funkcije na sljedeći način $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Napomena *Svojstva logaritamske funkcije $\log_b(x)$*

1. *područje definicije, vrijednosti i slika funkcije*
   - $\mathcal{D}_f = \langle 0, \infty\rangle$
   - $\mathcal{K}_f = \mathbb{R}$
   - $\mathcal{R}_f = \mathbb{R}$

- *uvjet za domenu* $\log_b g(x) \implies g(x) > 0$

2. *svojstva funkcije*
   - *nije parna ni neparna funkcija*
   - *nije periodična*
3. *asimptote*
   - *vertikalna asimptota je y-os* $x = 0$
   - *nema horizontalnih ni kosih asimptota*
4. *derivacija bilo kojeg reda*

$$(\log_b(x))^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{\ln(b)} \cdot \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}, & b \neq e \\ \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}, & b = e, \text{ tj. za } \ln(x) \end{cases}$$

5. *karakteristične točke*
   - **nema** *presjecišta ordinatne osi, jedina nultočka je* $(1, 0)$
   - **nema** *stacionarnih (ni kritičnih) točaka, te zato nema lokalnih ekstrema*
   - **nema** *točaka infleksije*
6. *karakteristični intervali*
   - *uvijek je* **strogo monotona** *prema pravilu*

$$\begin{aligned} 0 < b < 1, &\quad \textit{padajuća} \\ b > 1, &\quad \textit{rastuća} \end{aligned}$$

   - *cijela domena je jedan interval zakrivljenosti*

$$\begin{aligned} 0 < b < 1, &\quad \textit{konveksna} \\ b > 1, &\quad \textit{konkavna} \end{aligned}$$

Primjer 9.22 Ispitajte tok funkcije

$$f(x) = \ln\left(x^2 + 1\right) .$$

Rješenje

1. *budući je* $x^2 + 1 \geq 1 \implies \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
2. $\mathcal{K}_f = \mathbb{R}$
3. $f(-x) = \ln\left((-x)^2 + 1\right) = \ln\left(x^2 + 1\right) = f(x)$, *funkcija je parna*
4. *logaritamska funkcija nije periodična*
5. *nultočka,* $f(x) = 0 \implies \ln\left(x^2 + 1\right) = 0 \implies x^2 + 1 = 1 \implies x^2 = 0 \implies x = 0$
6. *presjecište s y osi,* $f(0) = \ln\left(0^2 + 1\right) = \ln(1) = 0 \implies T(0, 0)$
7. *asimptote funkcije*
   - *nema* **vertikalnu** *budući je domena cijeli skup realnih brojeva*
   - *nema* **horizontalne** *ni* **kose** *budući ih nema ni logaritamska*

8. *prva derivacija*

$$f'(x) = \left(\ln\left(x^2+1\right)\right)' = \frac{1}{x^2+1} \cdot \left(x^2+1\right)' = \frac{2x}{x^2+1}$$

9. **stacionarne** *točke,* $f'(x) = 0 \implies 2x = 0 \implies x = 0,$

10. *lokalni ekstrem (lokalni minimum) je u stacionarnoj točki* $(0,0)$

11. *intervali* **monotonosti** *su određeni stacionarnom točkom*

	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$		$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	
			min.		

12. *druga derivacija*

$$f''(x) = \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)' = \frac{2(x^2+1) - 2x(2x)}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{2-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

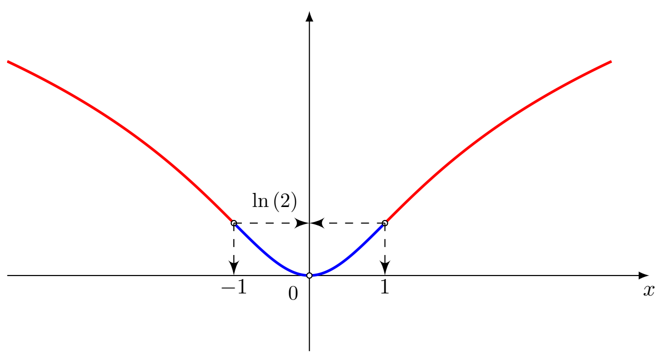
13. *točke infleksije slijede iz*

$$f''(x) = 0 \implies 2 - 2x^2 = 0 \implies x^2 = 1 \implies x_{1,2} = \pm 1$$

14. *intervali zakrivljenosti su određeni točkama infleksije*

	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f''		$-$		$+$		$-$	
f		$\cap$		$\cup$		$\cap$	
		konkavna		*konveksna*		*konkavna*	

15. *graf funkcije* $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)$



Iz grafa funkcije možemo odrediti sliku funkcije $\mathcal{R}_f = [0, \infty\rangle$.

Primjer 9.23 Ispitajte tok funkcije

$$f(x) = \frac{x}{\ln(x)}.$$

Rješenje

- *budući je* $\ln(x) \neq 0 \implies x \neq 1$ *i* $x > 0 \implies \mathcal{D}_f = \langle 0, \infty\rangle \setminus \{1\}$
- $\mathcal{K}_f = \mathbb{R}$

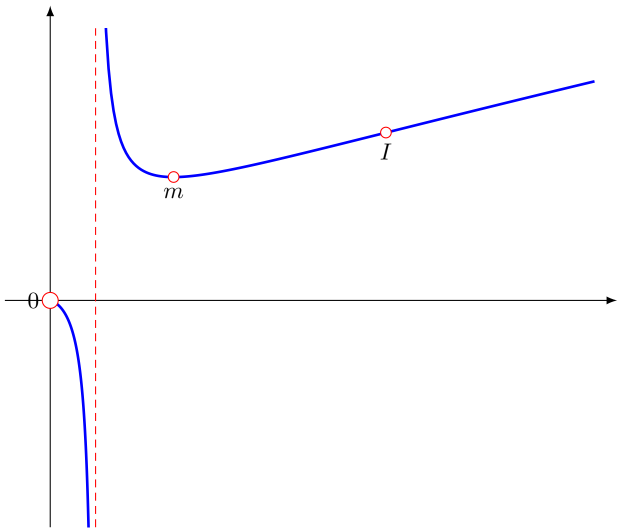
- $f(-x) = \dfrac{-x}{\ln(-x)} \neq f(x)$, *funkcija nije parna*
  $f(-x) = \dfrac{-x}{\ln(-x)} \neq -f(x)$, *funkcija nije neparna*
- *funkcije nije periodična*
- *nultočka funkcije ne postoji*
- *presjecište s y osi ne postoji*
- *asimptote funkcije:*
  - *vertikalna asimptota je pravac $x = 1$.*
  - *kosa asimptota ne postoji*
  $$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{\ln(x)}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln(x)} = \frac{1}{\infty} = 0$$
  - *horizontalna asimptota ne postoji*
  $$y = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln(x)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} x = \infty$$
- *prva derivacija*
  $$f'(x) = \frac{\ln(x) - x\cdot\frac{1}{x}}{\ln^2(x)} = \frac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)}$$
- *intervali monotonosti i lokalni ekstremi:* $m(e, e)$
  $$f'(x) = 0 \implies \ln(x) - 1 = 0 \implies \ln(x) = 1 \implies x = e$$

	0	1	e	$+\infty$
f'	$-$	$-$	$+$	
f	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
			min.	

- *druga derivacija*
  $$f''(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot\ln^2(x) - (\ln(x) - 1)\cdot 2\ln(x)\cdot\frac{1}{x}}{\ln^4(x)} = \frac{\frac{1}{x}\ln(x)\cdot[\ln(x) - 2(\ln(x) - 1)]}{\ln^4(x)}$$
  $$= \frac{\frac{1}{x}\cdot[\ln(x) - 2\ln(x) + 2]}{\ln^3(x)} = \frac{-\ln(x) + 2}{x\ln^3(x)}$$
- *intervali zakrivljenosti i točke infleksije* $I\left(e^2, \frac{e^2}{2}\right)$
  $$f''(x) = 0 \implies -\ln(x) + 2 = 0 \implies \ln(x) = 2 \implies x = e^2$$

	0	1	e^2	$+\infty$
f''	$+$	$+$	$-$	
f	$\cup$	$\cup$	$\cap$	
	konveksna	*konkavna*	*konveksna*	

- *graf funkcije*



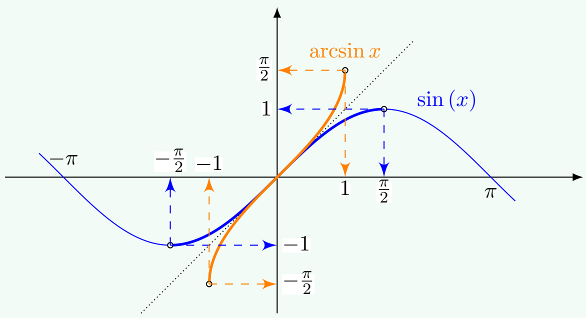
Iz grafa funkcije možemo odrediti sliku funkcije $\mathcal{R}_f = \langle -\infty, 0] \cup [e, \infty\rangle$.

9.1.7 Trigonometrijske i ciklometrijske funkcije

Budući su trigonometrijske funkcije periodičke, njihove restrikcije na područje definicije gdje su strogo monotone imaju inverzne funkcije.

Definicija 9.18. Sinus i arkus sinus

Na slici je prikazan graf funkcije sinus, te graf inverzne funkcije ($\arcsin$) *za restrikciju funkcije sinus na interval* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.



Napomena *Svojstva funkcije sinus i arkus sinus*

1. *područje definicije, vrijednosti i slika funkcije*
   - $\mathcal{D}_{\sin} = \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_{\arcsin} = [-1, 1]$
   - $\mathcal{K}_{\sin} = \mathcal{K}_{\arcsin} = \mathbb{R}$
   - $\mathcal{R}_{\sin} = [-1, 1]$, $\mathcal{R}_{\arcsin} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
   - *sinus nema uvjet na domenu, ali arkus sinus ima*

$$\arcsin g(x) \implies -1 \leq g(x) \leq 1$$

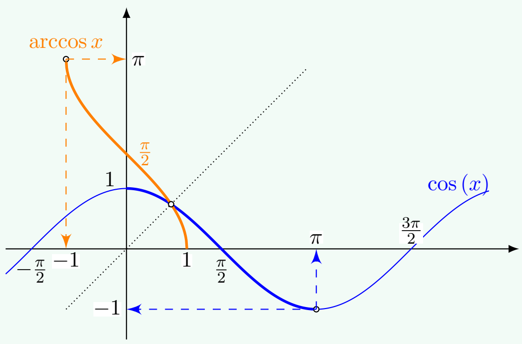
2. *svojstva funkcije*
   - *sinus i arkus sinus su* **neparne** *funkcije*
   - *sinus je periodična funkcija (temeljni period je 2π), ali arkus sinus nije periodična funkcija*
3. *obje funkcije* **nemaju** *nijednu asimptotu*
4. *derivacije*

   sinus $(\sin(x))' = \cos(x),\ (\sin(x))'' = -\sin(x)$

   arkus sinus $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ (\arcsin x)'' = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$
5. *karakteristične točke*
   - *nultočke za sinus su* $x_0 = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ *, dok arkus sinus ima jednu nultočku* $(0,0)$
   - *za obje funkcije točka presjecišta ordinatne osi je točka* $(0,0)$
   - *stacionarne točke funkcije sinus su* $x_k = \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$ *, dok arkus sinus ima samo kritične točke* $x = \pm 1$
   - *točke infleksije su jednake nultočkama*
6. *karakteristični intervali*
   - *budući je sinus periodična funkcija njena restrikcija na interval* $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ *je strogo rastuća, dok je arkus sinus strogo rastuća na cijeloj domeni*
   - *svaki interval određen susjednim nultočkama je jedan interval zakrivljenosti za funkciju sinus, dok je funkcija arkus sinus* **konkavna** *na intervalu* $[-1, 0\rangle$ *te* **konveksna** *na intervalu* $\langle 0, 1]$

Definicija 9.19. Kosinus i arkus kosinus

Na slici je prikazan graf funkcije kosinus, te graf inverzne funkcije $(\arccos)$ *za restrikciju funkcije kosinus na interval* $[0, \pi]$.



Napomena *Svojstva funkcije kosinus i arkus kosinus*

1. *područje definicije, vrijednosti i slika funkcije*
   - $\mathcal{D}_{\cos} = \mathbb{R},\ \mathcal{D}_{\arccos} = [-1, 1]$
   - $\mathcal{K}_{\cos} = \mathcal{K}_{\arccos} = \mathbb{R}$
   - $\mathcal{R}_{\cos} = [-1, 1],\ \mathcal{R}_{\arccos} = [0, \pi]$

- *kosinus nema uvjet na domenu, dok arkus kosinus ima*

$$\arccos g(x) \implies -1 \leq g(x) \leq 1$$

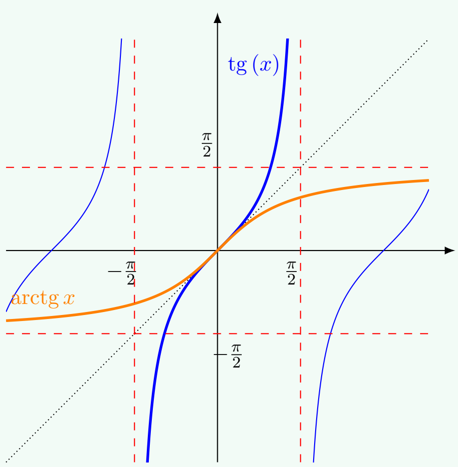
2. *svojstva funkcije*
   - *kosinus je parna, ali arkus kosinus nije parna ni neparna*
   - *kosinus je periodična funkcija (temeljni period je 2π), ali arkus kosinus nije periodična funkcija*
3. *obje funkcije nemaju nijednu asimptotu*
4. *derivacije*

   kosinus $(\cos(x))' = -\sin(x)$, $(\cos(x))'' = -\cos(x)$

   arkus kosinus $(\arccos(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos(x))'' = \frac{-x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$
5. *karakteristične točke*
   - *nultočke za kosinus su $x_0 = \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \colon k \in \mathbb{Z}\right\}$, dok arkus kosinus nema nultočku*
   - *za kosinus presjecište ordinatne osi je točka $(0,1)$, dok je za arkus kosinus to točka $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$*
   - *stacionarne točke funkcije kosinus su $x_k = \{k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\}$, dok arkus kosinus ima samo kritične točke $x = \pm 1$*
   - *za kosinus nultočke su točke infleksije, dok je za arkus kosinus jedina točka infleksije presjecište ordinatne osi*
6. *karakteristični intervali*
   - *budući je kosinus periodična funkcija njena restrikcija na interval $[0,\pi]$ je strogo padajuća, dok je arkus kosinus strogo padajuća na cijeloj domeni*
   - *svaki interval određen susjednim nultočkama je jedan interval zakrivljenosti za funkciju kosinus, dok je funkcija arkus sinus* **konveksna** *na intervalu $[-1,0\rangle$ te* **konkavna** *na intervalu $\langle 0,1]$*

Definicija 9.20. Tangens i arkus tangens

Na slici je prikazan graf funkcije tangens, te graf inverzne funkcije (arctg) *za restrikciju funkcije tangens na interval* $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.



Napomena *Svojstva funkcije tangens i arkus tanges*

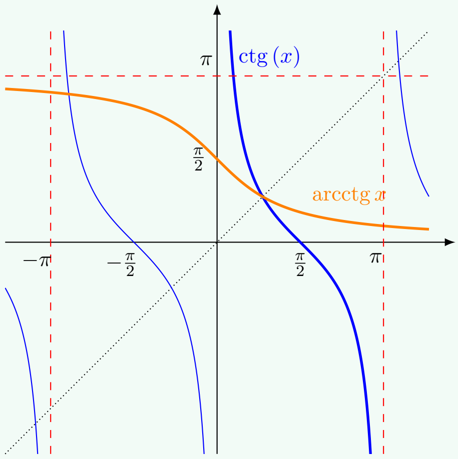
1. *područje definicije, vrijednosti i slika funkcije*
   - $\mathcal{D}_{\mathrm{tg}} = \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \colon k \in \mathbb{Z}\right\}, \ \mathcal{D}_{\mathrm{arctg}} = \mathbb{R}$
   - $\mathcal{K}_{\mathrm{tg}} = \mathcal{K}_{\mathrm{arctg}} = \mathbb{R}$
   - $\mathcal{R}_{\mathrm{tg}} = \mathbb{R}, \ \mathcal{R}_{\mathrm{arctg}} = \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$
   - *arkus tangens nema uvjet na domenu, ali tangens ima*
   $$\mathrm{tg}\,(x) \implies x \notin \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \colon k \in \mathbb{Z}\right\}$$
2. *svojstva funkcije*
   - *tanges i arkus tangens su neparne funkcije*
   - *tangens je periodična funkcija (temeljni period je π), ali arkus tangens nije periodična funkcija*
3. *za vertikalne asimptote tangens ima pravce*
   $$x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z}$$
   dok arkus tangens ima dvije horizontalne asimptote
   $$y = \pm\frac{\pi}{2}$$
4. *derivacije*

   tangens $(\mathrm{tg}\,(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}, \ (\mathrm{tg}\,(x))'' = \frac{2\,\mathrm{tg}\,(x)}{\cos^2(x)}$

   arkus tangens $(\mathrm{arctg}\,(x))' = \frac{1}{1+x^2}, \ (\mathrm{arctg}\,(x))'' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$
5. *karakteristične točke*
   - *nultočke za tanges su $x_0 = \{k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\}$, dok arkus tangens ima jednu nultočku $(0,0)$*
   - *za obje funkcije točka presjecišta ordinatne osi je točka $(0,0)$*
   - *obje funkcije nemaju stacionarnih točaka*
   - *nultočke su im točke infleksije*
6. *karakteristični intervali su određeni domenom za obje funkcije*
   - *tangens je strogo rastuća na svakom intervalu određenom vertikalnim asimptotama, dok je arkus tangens strogo rastuća na cijeloj domeni*
   - *za tangens su intervali zakrivljenosti određeni asimptotama te podijeljeni nultočkom na dva podintervala, dok je arkus tangens* **konveksna** *na $\langle -\infty, 0\rangle$ i* **konkavna** *na $\langle 0, \infty\rangle$*

Definicija 9.21. Kotangens i arkus kotangens

Na slici je prikazan graf funkcije kotangens, te graf inverzne funkcije (arcctg) *za restrikciju funkcije kotangens na interval* $\langle 0, \pi\rangle$.



Napomena *Svojstva funkcije kotangens i arkus kotanges*

1. *područje definicije, vrijednosti i slika funkcije*
    - $\mathcal{D}_{\text{ctg}} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\colon k \in \mathbb{Z}\}$, $\mathcal{D}_{\text{arcctg}} = \mathbb{R}$
    - $\mathcal{K}_{\text{ctg}} = \mathcal{K}_{\text{arcctg}} = \mathbb{R}$
    - $\mathcal{R}_{\text{ctg}} = \mathbb{R},\ \mathcal{R}_{\text{arcctg}} = \langle 0, \pi\rangle$
    - *arkus kotangens nema uvjet na domenu, ali kotangens ima*

$$\operatorname{ctg}(x) \implies x \notin \{k\pi\colon k \in \mathbb{Z}\}$$

2. *svojstva funkcije*
    - *kotanges i arkus kotangens nisu parne ni neparne funkcije*
    - *kotangens je periodična funkcija (temeljni period je* π*), ali arkus kotangens nije periodična funkcija*
3. *kotangens ima za vertikalne asimptote pravce* $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$*, dok arkus kotangens ima dvije horizontalne* $y = 0,\ y = \pi$
4. *derivacije*

    kotangens $(\operatorname{ctg}(x))' = -\dfrac{1}{\sin^2(x)},\ (\operatorname{ctg}(x))'' = \dfrac{2\operatorname{ctg}(x)}{\sin^2(x)}$

    arkus kotangens $(\operatorname{arcctg}(x))' = -\dfrac{1}{1+x^2},\ (\operatorname{arcctg}(x))'' = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$
5. *karakteristične točke*
    - *nultočke za kotanges su* $x_0 = \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\colon k \in \mathbb{Z}\right\}$ *, arkus kotangens nema nultočku*
    - *kotangens nema presjecišta ordinatne osi, dok je presjecište za arkus kotangens točka točka* $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$
    - *obje funkcije nemaju stacionarnih točaka*
    - *točke infleksije za kotangens su nultočke, dok je presjecište ordinatne osi točka infleksije za arkus kotangens*

6. *karakteristični intervali su određeni domenom za obje funkcije*
   - *kotangens je padajuća na svakom intervalu određenom vertikalnim asimptotama, arkus kotangens je padajuća na cijeloj domeni*
   - *za kotangens su intervali zakrivljenosti određeni asimptotama te podijeljeni nultočkom na dva podintervala, dok je arkus kotangens* **konkavna** *na* $\langle -\infty, 0\rangle$ *i* **konveksna** *na* $\langle 0, \infty\rangle$

Definicija 9.22. Opći oblik trigonometrijske funkcije sinus

Opća trigonometrijska funkcija sinus dana je izrazom

$$f(x) = A\sin\left(B(x-\varphi)\right) + C, \quad A, B, C, \varphi \in \mathbb{R}$$

s parametrima A, B, C, φ*, koji imaju sljedeće značenje*

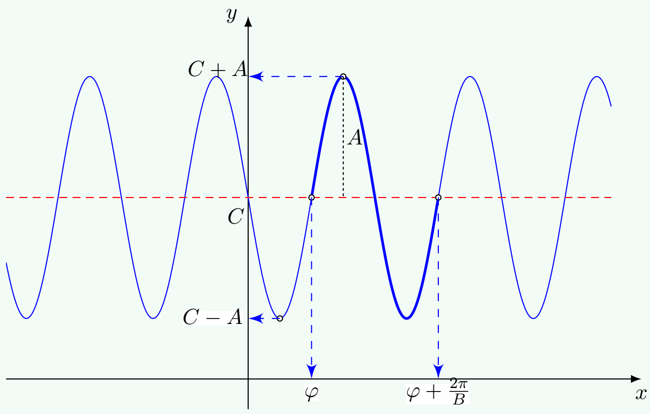
A *promjene amplitude, tj. vertikalnog skaliranja funkcije*

B *promjene temeljnog perioda funkcije*

C *iznosa vertikalnog pomaka funkcije*

φ *vrijednosti horizontalnog pomaka, tj. fazni pomak*

Utjecaj parametara na vrijednost opće funkcije sinus prikazan je grafom:



Napomena *Zbog identiteta* $\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ *možemo u izrazu za opći oblik umjesto sinus koristiti kosinus.*

Primjer 9.24 Ispitajte tok funkcije $f(x) = 2\sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right) + 1$.

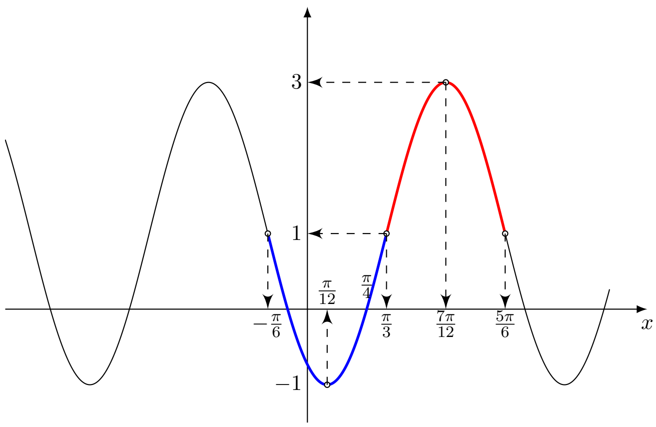
Rješenje

1. $\sin$ *nema uvjeta na domenu odakle zaključujemo* $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
2. $\mathcal{K}_f = \mathbb{R}$
3. *nije parna ni neparna zbog*

$$f(-x) = 2\sin\left(2\left(-x - \frac{\pi}{3}\right)\right) + 1 = -2\sin\left(2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right) + 1 \neq f(x)$$

4. *temeljni period joj slijedi iz* $T = \frac{2\pi}{B} \implies T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

5. *nultočke dobijemo iz uvjeta*
$$f(x)=0\Rightarrow 2\sin\left(2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)+1=0\Rightarrow \sin\left(2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)=-\frac{1}{2}$$
odakle slijedi
$$x_0=\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{11\pi}{12}+k\pi\colon k\in\mathbb{Z}\right\}$$
6. *presjecište s y osi,* $f(0)=2\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+1\approx -0.732 \implies T(0,-0.732)$
7. *nema niti jednu asimptotu*
8. *prva derivacija*
$$f'(x)=\left(2\sin\left(2(x-\frac{\pi}{3})\right)+1\right)'=4\cos\left(2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
9. **stacionarne** *točke,*
$$f'(x)=0 \implies 2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=(2k+1)\frac{\pi}{2}$$
odakle slijedi
$$x=\frac{\pi}{3}+(2k+1)\frac{\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}$$
10. *lokalne minimume postiže u točkama*
$$\left(\frac{\pi}{12}+k\pi,-1\right)$$
a lokalne maksimume u točkama
$$\left(\frac{7\pi}{12}+k\pi,3\right)$$
11. *intervali* **monotonosti** *su određeni stacionarnim točkama*
12. *druga derivacija*
$$f''(x)=\left(4\cos\left(2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)'=-8\sin\left(2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
13. *točke infleksije,*
$$f''(x)=0 \implies -8\sin\left(2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)=0 \implies 2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=k\pi$$
odakle dobijemo
$$x=\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$$
14. *intervali zakrivljenosti su određeni točkama infleksije*
15. *graf funkcije* $f(x)=2\sin\left(2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)+1$



Iz grafa funkcije možemo odrediti sliku funkcije $\mathcal{R}_f = [-1, 3]$.

Primjer 9.25 Ispitajte tok funkcije $f(x) = 2\cos\left(3\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)\right) - 1.$

Rješenje

1. *domena:* $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
2. *funkcija* f *nije ni parna ni neparna.*

$$\begin{aligned} f(-x) &= 2\cos\left(3\left(-x - \frac{\pi}{6}\right)\right) - 1 = 2\cos\left(-3\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right) - 1 \\ &= 2\cos 3\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1 \neq f(x) \end{aligned}$$

3. *periodičnost funkcije je* $T = \frac{2\pi}{B} = \dfrac{2\pi}{3}$
4. *ne postoji niti jedna asimptota*
5. *nultočke funkcije*

$$\begin{aligned} f(x) = 2\cos\left(3\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right) - 1 &= 0 \\ 3\left(x - \frac{\pi}{6}\right) &= \frac{1}{2} \\ 3\left(x - \frac{\pi}{6}\right) &= \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x - \frac{\pi}{6} &= \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \\ 3\left(x - \frac{\pi}{6}\right) &= \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \\ x - \frac{\pi}{6} &= \frac{5\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{9} + \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} = \frac{13\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \\ x_0 &= \left\{\frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{13\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} : k \in \mathbb{Z}\right\} \end{aligned}$$

6. *točke presjeka s* y *osi su* $f(0) = 2\cos\left(3\left(0 - \frac{\pi}{6}\right)\right) - 1 = -1 \implies (0, -1)$
7. *prva derivacija*

$$f'(x) = -2\sin\left(3\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right) \cdot (3) = -6\sin\left(3\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right)$$

8. *Intervali monotonosti i lokalni ekstremi*

$$f'(x)=0 \implies \sin\left(3\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right)=0 \implies 3\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=k\pi$$

$$x-\frac{\pi}{6}=\frac{k\pi}{3} \implies x=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}, k\in\mathbb{Z} \text{ stacionarne točke}$$

$$k=0 \implies \left(\frac{\pi}{6}, f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=\left(\frac{\pi}{6},1\right)=Maks.$$

$$k=1 \implies \left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=\left(\frac{\pi}{2},-3\right)=min.$$

$$k=-1 \implies \left(-\frac{\pi}{6}, f\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=\left(-\frac{\pi}{6},1\right)=Maks.$$

$$k=-2 \implies \left(-\frac{\pi}{2}, f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\left(-\frac{\pi}{2},-3\right)=min.$$

9. *druga derivacija*

$$f''(x)=-6\cos\left(3\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right)\cdot 3=-18\cos\left(3\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

10. *Intervali zakrivljenosti i točke infleksije*

$$f''(x)=0 \implies \cos\left(3\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right)=0 \implies 3\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

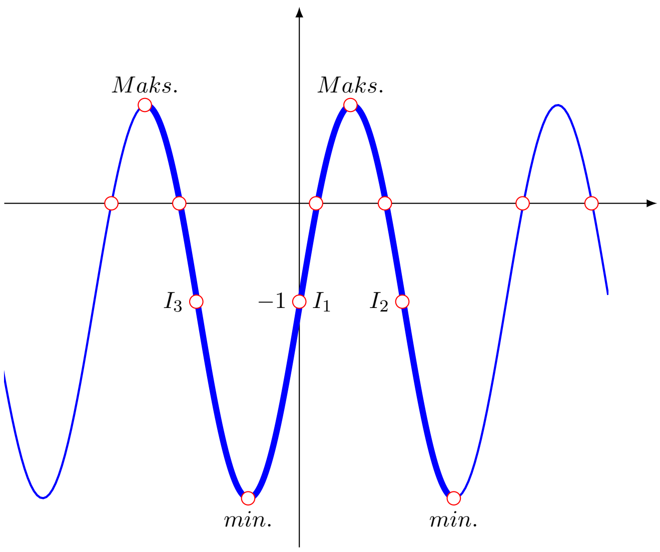
$$x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3} \implies x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z} \text{ točke infleksije}$$

$$k=0 \implies I_1=\left(\frac{\pi}{3}, f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=\left(\frac{\pi}{3},-1\right)$$

$$k=-1 \implies I_2=(0, f(0))=(0,-1)$$

$$k=-2 \implies I_3=\left(-\frac{\pi}{3}, f\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=\left(-\frac{\pi}{3},-1\right)$$

11. *Graf funkcije:*



Iz grafa funkcije možemo odrediti sliku funkcije $\mathcal{R}_f=[-3,1]$.

Primjer 9.26 Ispitajte tok funkcije $f(x) = 2\arccos\left(\frac{1}{x-1}\right)$.

Rješenje

1. *domena funkcije je* $\mathcal{D}_f = \langle -\infty, 0] \cup [2, \infty\rangle$

$$-1 \le \frac{1}{x-1} \le 1$$

$$-1 \le \frac{1}{x-1} \implies \frac{1}{x-1} + 1 \ge 0 \implies \frac{x}{x-1} \ge 0$$

$$x \cdot (x-1) \ge 0 \implies x \in \langle -\infty, 0] \cup \langle 1, \infty]$$

$$\frac{1}{x-1} \le 1 \implies \frac{1}{x-1} - 1 \le 0 \implies \frac{2-x}{x-1} \le 0$$

$$(2-x) \cdot (x-1) \le 0 \implies x \in \langle -\infty, 1\rangle \cup [2, \infty\rangle$$

2. *funkcija f nije ni parna ni neparna.*

$$f(-x) = 2\arccos\left(\frac{1}{-x-1}\right) = 2\arccos\left(-\frac{1}{x+1}\right)$$

3. *nultočke funkcije*

$$f(x) = 2\arccos\left(\frac{1}{x-1}\right) = 0$$

$$\frac{1}{x-1} = \cos(0)$$

$$\frac{1}{x-1} = 1 \implies x = 2 \implies (2, 0)$$

4. *Točka presjeka s y osi*

$$f(0) = 2\arccos\left(\frac{1}{0-1}\right) = 2\arccos(-1) = 2 \cdot \pi \implies (0, 2\pi)$$

5. *asimptote funkcije*

- *vertikalna asimptota ne postoji.*
- *horizontalna asimptota je pravac $y = \pi$*

$$y = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} 2\arccos\left(\frac{1}{x-1}\right) = 2\arccos(0) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

- *kosa asimptota ne postoji*

6. *prva derivacija*

$$f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x-1}\right)^2}} \cdot \left(\frac{1}{x-1}\right)' = \frac{-2}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x-1}\right)^2}} \cdot \frac{0\cdot(x-1) - 1\cdot 1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2}{(x-1)^2\sqrt{1-\left(\frac{1}{x-1}\right)^2}}$$

7. *intervali monotonosti i lokalni ekstremi*

$$f'(x) = 0 \implies 2 \ne 0 \implies \text{nema stacionarnih točaka}$$

$$(x-1)^2 > 0 \quad i \quad \sqrt{1-\left(\frac{1}{x-1}\right)^2} > 0 \implies f'(x) > 0 \text{ tj. funkcija raste za } \forall x \in \mathcal{D}_f$$

8. *druga derivacija*

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= -\left((x-1)^2\cdot(x^2-2x)\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(2(x-1)\cdot(x^2-2x)+(x-1)^2\cdot(2x-2)\right)\\
&= -\left((x-1)^2\cdot(x^2-2x)\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2(x-1)\left(x^2-2x+(x-1)^2\right)\\
&= -\left((x-1)^2\cdot(x^2-2x)\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2(x-1)\left(2x^2-4x+1\right)\\
&= \frac{-2(x-1)\left(2x^2-4x+1\right)}{\sqrt{(x-1)^6\cdot(x^2-2x)^3}} = \frac{-2(x-1)\left(2x^2-4x+1\right)}{(x-1)^3\sqrt{(x^2-2x)^3}}\\
&= \frac{-2\left(2x^2-4x+1\right)}{(x-1)^2\sqrt{(x^2-2x)^3}}
\end{aligned}
$$

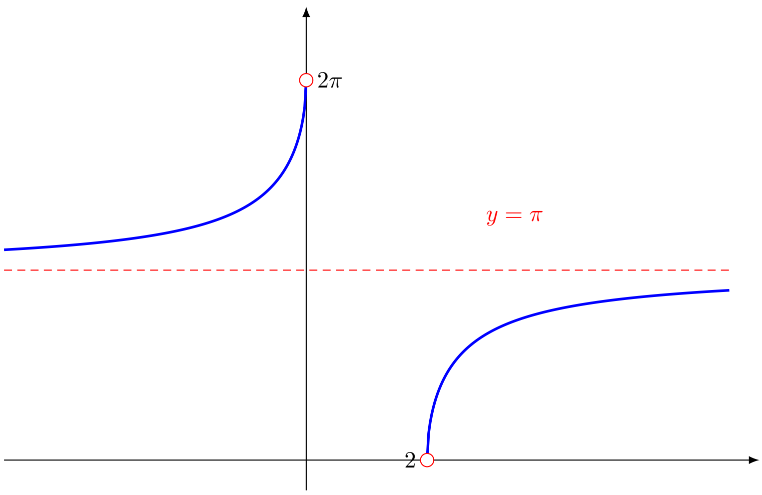
9. *intervali zakrivljenosti i točke infleksije*

$$f''(x)=0 \implies 2x^2-4x+1=0 \implies x_1=0.3\notin\mathcal{D}_f,\ x_2=1.7\notin\mathcal{D}_f$$

Zaključujemo kako ne postoje točke infleksije.

	$-\infty$	0	2	∞
f''	$-$		$-$	
f	$\cap$		$\cap$	
f	*konveksna*	*nije definirana*	*konkavna*	

10. *graf funkcije*



Iz grafa funkcije možemo odrediti sliku funkcije $\mathcal{R}_f=[0,2\pi]\setminus\{\pi\}$.

Primjer 9.27 Odredite inverz funkcije $f(x)=\ln(2\cos(x)-1)$.

Rješenje *Zapišimo danu funkciju kao* $y=\ln(2\cos(x)-1)$. *Inverznu funkciju* f^{-1} *dobit ćemo rješavanjem jednadžbe* $y=f(x)$ *po varijabli* x, *to jest izražavanjem varijable* x *kao funkcije varijable* y. *Za početak, zamijenimo varijable* x *i* y *tako da iz jednadžbe* $x=\ln(2\cos(y)-1)$ *izrazimo* y *pomoću* x. *To ćemo učiniti djelujući na jednadžbu inverznim funkcijama poznatih* *elementarnih funkcija:*

$$\begin{aligned}
y &= \ln\left(2\cos(x) - 1\right) \\
x &= \ln\left(2\cos(y) - 1\right) \quad \Big/ e^{\uparrow} \\
e^x &= e^{\ln(2\cos(y)-1)} \\
e^x &= 2\cos(y) - 1 \\
e^x + 1 &= 2\cos(y) \\
\frac{e^x+1}{2} &= \cos(y) \quad \Big/ \arccos \\
\arccos\left(\frac{e^x+1}{2}\right) &= \arccos(\cos(y)) \\
\arccos\left(\frac{e^x+1}{2}\right) &= y = f^{-1}(x)
\end{aligned}$$

Primjer 9.28 Odredite inverz funkcije $f(x) = 4e^{2-x} - 1$.

Rješenje

$$\begin{aligned}
y &= 4e^{2-x} - 1 \\
x &= 4e^{2-y} - 1 \\
x + 1 &= 4e^{2-y} \\
\frac{x+1}{4} &= e^{2-y} \\
\ln\left(\frac{x+1}{4}\right) &= \ln e^{2-y} \\
\ln\left(\frac{x+1}{4}\right) &= 2 - y \\
\ln\left(\frac{x+1}{4}\right) - 2 &= -y \\
-\ln\left(\frac{x+1}{4}\right) + 2 &= y = f^{-1}(x)
\end{aligned}$$

Primjer 9.29 Odredite inverz funkcije $f(x) = e^{\operatorname{tg}\sqrt{x}}$.

Rješenje

$$\begin{aligned}
y &= e^{\operatorname{tg}\sqrt{x}} \\
x &= e^{\operatorname{tg}\sqrt{y}} \\
\ln(x) &= \ln e^{\operatorname{tg}\sqrt{y}} \\
\ln(x) &= \operatorname{tg}\sqrt{y} \\
\operatorname{arctg}(\ln(x)) &= \sqrt{y} \\
\operatorname{arctg}^2(\ln(x)) &= y = f^{-1}(x)
\end{aligned}$$

Primjer 9.30 Odredite inverz funkcije $f(x) = \operatorname{arcctg}\big(\ln\big(x^3 - 1\big)\big)$.

Rješenje

$$\begin{aligned}
y &= \operatorname{arcctg}\big(\ln\big(x^3 - 1\big)\big) \\
x &= \operatorname{arcctg}\big(\ln\big(y^3 - 1\big)\big) \\
\operatorname{ctg}(x)x &= \ln\big(y^3 - 1\big) \\
e^{\operatorname{ctg}(x)} &= y^3 - 1 \\
e^{\operatorname{ctg}(x)} + 1 &= y^3 \\
\sqrt[3]{e^{\operatorname{ctg}(x)} + 1} &= y = f^{-1}(x)
\end{aligned}$$

9.2 Zadaci za vježbu

✍ **Zadatak 9.1** Odredite nultočke funkcije $f(x)$:

a) $f(x) = \dfrac{(5x-2)(7x+8)}{7x-1}$

b) $f(x) = -9x^3 + 6x^2 + 21x + 6$

c) $f(x) = \ln(5x^2 - 3)$

d) $f(x) = e^x - 3e^{-x} + 4$

e) $f(x) = 9e^x + 8e^{-x} - 3$

f) $f(x) = e^{-x} - 1$

Rješenje

a) $x_1 = -\dfrac{8}{7},\ x_2 = \dfrac{2}{5}$

b) $x_1 = -1,\ x_2 = -\dfrac{1}{3},\ x_3 = 2$

c) $x_1 = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\ x_2 = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

d) $x = \ln(-2 + \sqrt{7})$

e) *ne postoji*

f) $x = 0$

✍ **Zadatak 9.2** Ako je $f(x) = \dfrac{7x+10}{18x-5}$ koliko je $f(x-11)$?

Rješenje $f(x-11) = \dfrac{7x-67}{18x-203}$

✍ **Zadatak 9.3** Ako su $f(x) = \sqrt{3x}$, $g(x) = \dfrac{2x^2}{3x+4}$ koliko iznosi $g(f(x))$?

Rješenje $g(f(x)) = \dfrac{6x}{3\sqrt{3x}+4}$

✍ **Zadatak 9.4** Odredite domenu funkcije $f(x)$:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 11x - 42}$

b) $f(x) = \dfrac{5x+2}{\sqrt{x^2 - 11x - 51}}$

c) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 9x + 70}$

d) $f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt[3]{x^2 - 9x + 14}}$

e) $f(x) = \sqrt{-8x+17} - \sqrt{16x-10}$

f) $f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}$

g) $f(x) = \sqrt{e^{5x} - 4e^{7x}}$

h) $f(x) = \dfrac{\sqrt{e^x - 1}}{e^{2x} + 6e^x}$

i) $f(x) = \sqrt{e^{2x} + 4e^x + 3}$

j) $f(x) = \sqrt{\log(x^2 + 9x + 9)}$

k) $f(x) = \ln\dfrac{2x-1}{3x+2}$

l) $f(x) = \arccos\sqrt{3x+2}$

m) $f(x) = \arccos\frac{x+1}{2x-1}$

n) $f(x) = \arcsin(\ln(2x+1))$

Rješenje

a) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \backslash \{-3, 14\}$

b) $\mathcal{D}_f = \langle -\infty, -3.5\rangle \cup \langle 14.5, \infty\rangle$

c) $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} : x \in [-5, 14]\}$

d) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \backslash \{2, 7\}$

e) $\mathcal{D}_f = \left[\frac{5}{8}, \frac{17}{8}\right]$

f) $\mathcal{D}_f = \left\langle -\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \langle 1, \infty\rangle$

g) $\mathcal{D}_f = \langle -\infty, -\ln(2)\rangle$

h) $\mathcal{D}_f = [0, \infty\rangle$

i) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

j) $\mathcal{D}_f = \langle -\infty, -8] \cup [-1, \infty\rangle$

k) $\mathcal{D}_f = \left\langle -\infty, -\frac{3}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{1}{2}, \infty\right\rangle$

l) $\mathcal{D}_f = \left\langle -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right\rangle$

m) $\mathcal{D}_f = \langle -\infty, 0\rangle \cup [2, \infty\rangle$

n) $\mathcal{D}_f = \left\langle \frac{1-e}{2e}, \frac{e-1}{2}\right\rangle$

Zadatak 9.5 Odredite inverznu funkciju funkcije $f(x)$

a) $f(x) = \dfrac{3x-1}{5x+1}$

b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{4x-2}{3x+1}}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x}{2x-1}}$

d) $f(x) = \ln \dfrac{2x+3}{x-1}$

e) $f(x) = \arccos\left(\dfrac{x+3}{2x-1}\right)$

f) $f(x) = \ln\left(\arcsin \dfrac{x-1}{2x+1}\right)$

g) $f(x) = e^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$

h) $f(x) = e^{\arccos\sqrt{-x+2}}$

i) $f(x) = \dfrac{\sin(x)+1}{2\sin(x)-3}$

j) $f(x) = \dfrac{2\operatorname{tg}(x)+3}{3\operatorname{tg}(x)}$

k) $f(x) = \dfrac{2e^{\operatorname{tg}(x)}-1}{3e^{\operatorname{tg}(x)}+3}$

l) $f(x) = e^{3x+2} - 4$

Rješenje

a) $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{3-5x}$

b) $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2+2}{4-3x^2}$

c) $f^{-1}(x) = -\dfrac{x^3}{1-2x^3}$

d) $f^{-1}(x) = -\dfrac{e^x+3}{2-e^x}$

e) $f^{-1}(x) = \dfrac{\cos(x)+3}{2\cos(x)-1}$

f) $f^{-1}(x) = \dfrac{\sin(e^x)+1}{1-2\sin(e^x)}$

g) $f^{-1}(x) = \ln^2(x)$

h) $f^{-1}(x) = 2 - \cos^2(\ln(x))$

i) $f^{-1}(x) = \arcsin\left(\dfrac{3x+1}{2x-1}\right)$

j) $f^{-1}(x) = -\dfrac{3}{2-3x}$

k) $f^{-1}(x) = \ln\left(\dfrac{3x+1}{2-3x}\right)$

l) $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{3}\ln(x+4) - \dfrac{2}{3}$

Zadatak 9.6 Odredite temeljni period funkcije $f(x)$

a) $f(x) = 9\cos(\frac{3}{2}x - 2)$

b) $f(x) = 7\,\text{tg}\,(6x + 5)$

c) $f(x) = 4\,\text{ctg}\,(\frac{5}{3}x + 1)$

d) $f(x) = e^{2\sin(7x+4)}$

e) $f(x) = e^{\text{ctg}\,(2x+1)}$

f) $f(x) = \ln(9\cos(3x + 10))$

Rješenje

a) $\frac{4\pi}{3}$

b) $\frac{\pi}{6}$

c) $\frac{3\pi}{5}$

d) $\frac{2\pi}{7}$

e) $\frac{\pi}{2}$

f) $\frac{2\pi}{3}$

Zadatak 9.7 Ispitajte parnost i neparnost funkcije $f(x)$

a) $f(x) = -3x^4 + 2x^2 - 3$ b) $f(x) = -3x^3 + 4x$ c) $f(x) = 9x^3$

Rješenje

a) parna *b) neparna* *c) neparna*

Zadatak 9.8 Odredite kvocijent i ostatak za racionalnu funkciju

a) $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 2x + 1}{x - 2}$

b) $f(x) = \dfrac{x^4 - 2x + 3}{x - 1}$

c) $f(x) = \dfrac{x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 3x - 1}{x^2 + x - 1}$

Rješenje

a) $\dfrac{x^3 + 3x^2 - 2x + 1}{x - 2} = x^2 + 5x - 2 + \dfrac{7}{x - 2}$

b) $\dfrac{x^4 - 2x + 3}{x - 1} = x^3 + x^2 + x - 1 + \dfrac{2}{x - 1}$

c) $\dfrac{x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 3x - 1}{x^2 + x - 1} = x^3 + x^2 - 2x + 1 + \dfrac{4x}{x^2 + x - 1}$

✍ **Zadatak 9.9** Ispitajte tok funkcije $f(x)$

a) $f(x) = -x^3 - 6x^2 + 9x - 3$

b) $f(x) = \left(x^2 - 1\right) e^x$

c) $f(x) = x + \dfrac{2}{x}$

d) $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$

e) $f(x) = \dfrac{x+3}{x}$

f) $f(x) = \dfrac{x}{x+3}$

g) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$

h) $f(x) = \dfrac{x^{-3}}{(x-2)^2}$

i) $f(x) = \dfrac{e^{-3x}}{x}$

j) $f(x) = \dfrac{4}{2-3e^x}$

k) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$

l) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$

Rješenje

a) *Domena* $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$;

nultočke $N_1(-7.29, 0)$, $N_2(0.57, 0)$, $N_3(0.72, 0)$, *presjek y osi:* $(0, -3)$;

funkcija nije parna niti neparna, nije periodična; nema asimptota;

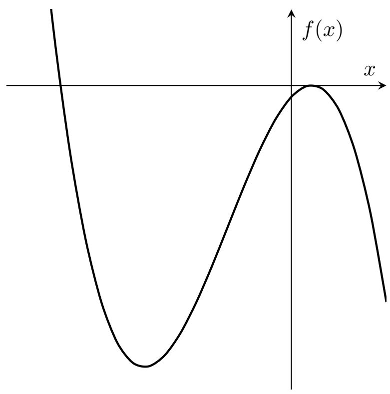
$f'(x) = -3x^2 - 12x + 9 \implies M\,(0.65, 0.04)\,,\ m\,(-4.65, -74.04)\,,$

$\nearrow \langle -4.65, 0.65 \rangle$, $\searrow \langle -\infty, -4.65 \rangle \cup \langle 0.65, \infty \rangle$;

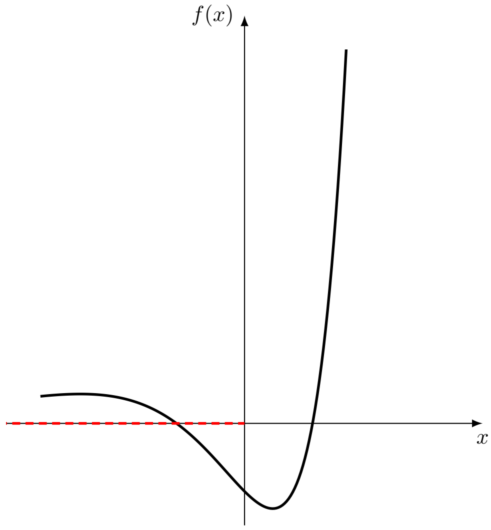
$f''(x) = -6x - 12$, *točka infleksije* $T(-2, -37)$,

konveksna $\langle -\infty, -2 \rangle$, *konkavna* $\langle -2, \infty \rangle$;

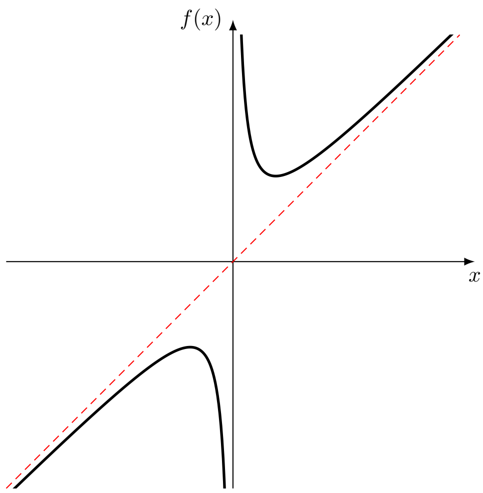
slika funkcije $\mathcal{R}_f = \mathbb{R}$



b) *Domena* $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$*;*
nultočke $N_1(-1,0),\ N_2(1,0)$, *presjek s* y *osi:*$(0,-1)$;
funkcija nije parna niti neparna, nije periodična;
lijeva horizontalna asimptota $y = 0$*;*
$f'(x) = (x^2 + 2x - 1)e^x,\ \Longrightarrow\ M(-2.41, 0.43),\ m(0.41, -1.25),$
$\nearrow \langle -\infty, -2.41\rangle \cup \langle 0.41, \infty\rangle,\ \searrow \langle -2.41, 0.41\rangle$*;*
$f''(x) = (x^2 + 4x + 1)e^x$, *točke infleksije* $T_1(-3.73, 0.31),\ T_2(-0.27, -0.71),$
konveksna $\langle -\infty, -3.73\rangle \cup \langle -0.27, \infty\rangle$, *konkavna* $\langle -3.73, -0.27\rangle$*;*
slika $\mathcal{R}_f = [-1.25, \infty\rangle$



c) *Domena* $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$*; nema nultočki, nema presjeka s* y *osi;*
funkcija je neparna, nije periodična;
asimptote: vertikalna (V.A.) $x = 0$, *nema horizontalne (H.A.), kosa (K.A.)* $y = x$*;*
$f'(x) = 1 - \dfrac{2}{x^2},\ \Longrightarrow\ M(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2}),\ m(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}),$
$\nearrow \langle -\infty, -\sqrt{2}\rangle \cup \langle \sqrt{2}, \infty\rangle,\ \searrow \langle -\sqrt{2}, \sqrt{2}\rangle \setminus \{0\}$*;*
$f''(x) = -\dfrac{4}{x^3}$, *nema točaka infleksije,*
konveksna $\langle 0, \infty\rangle$, *konkavna* $\langle -\infty, 0\rangle$*; slika* $\mathcal{R}_f = \langle -\infty, -2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}, \infty\rangle$



d) *Domena* $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

nultočka $N(-1, 0)$, *nema presjeka s* y *osi;*

niti parna niti neparna, nije periodična;

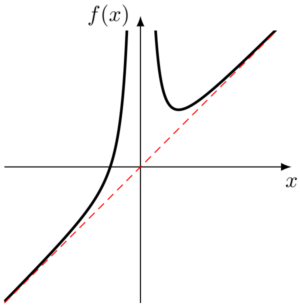
asimptote: V.A. $x = 0$, *nema H.A., K.A.* $y = x$;

$f'(x) = 1 - \dfrac{2}{x^3}, \implies m\left(\sqrt[3]{2}, \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2}\right)$,

$\nearrow \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle \sqrt[3]{2}, \infty\rangle, \ \searrow \langle 0, \sqrt[3]{2}\rangle$;

$f''(x) = \dfrac{6}{x^4}$, *nema točaka infleksije,*

konveksna ($\cup$) *na cijeloj domeni; slika* $\mathcal{R}_f = \mathbb{R}$



e) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

$N(-3, 0)$, *nema presjeka s* y *osi;*

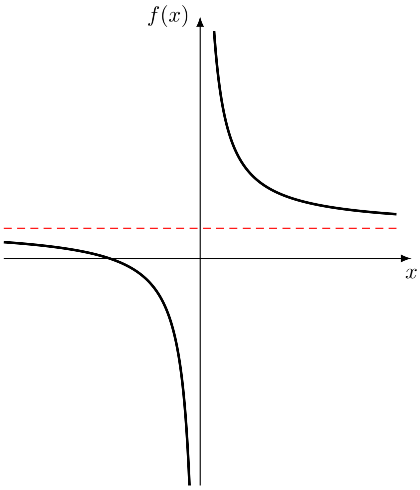
niti parna niti neparna, nije periodična;

asimptote: V.A. $x = 0$, *H.A.* $y = 1$, *nema K.A.;*

$f'(x) = -\dfrac{3}{x^2}$, *nema ekstrema,* $\searrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

$f''(x) = \dfrac{6}{x^3}$, *nema točaka infleksije,*

konveksna $\langle 0, \infty\rangle$, *konkavna* $\langle -\infty, 0\rangle$; *slika* $\mathcal{R}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$



f) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$;

$N(0,0)$, *presjek s y osi* $T(0,0)$;

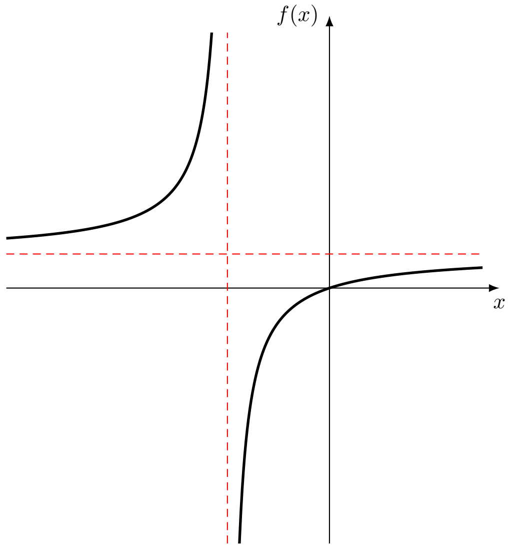
niti parna niti neparna, nije periodična;

asimptote: V.A. $x = -3$, *H.A.* $y = 1$, *nema K.A.;*

$f'(x) = \dfrac{3}{(x+3)^2}$, *nema ekstrema,* $\nearrow \mathbb{R} \setminus \{-3\}$;

$f''(x) = \dfrac{6}{x^3}$, *nema točaka infleksije,*

konveksna $\langle -\infty, -3 \rangle$, *konkavna* $\langle -3, \infty \rangle$; *slika* $\mathcal{R}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$



g) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$;

nema nultočaka, presjek s y osi $T(0,-1)$;

niti parna niti neparna, nije periodična;

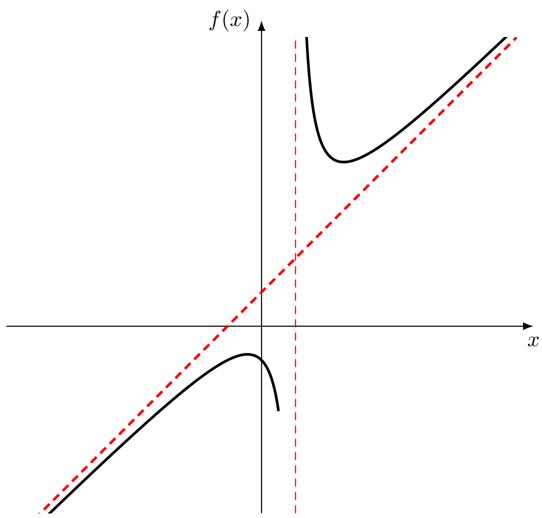
asimptote: V.A. $x = 1$, *nema H.A., K.A.* $y = x + 1$;

$f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}, \implies M(-0.41, -0.82),\ m(2.41, 4.82),$

$\nearrow \langle -\infty, -0.41 \rangle \cup \langle 2.41, \infty \rangle$, $\searrow \langle -0.41, 2.41 \rangle \setminus \{1\}$;

$f''(x) = \dfrac{4}{(x-1)^3}$, *nema točaka infleksije,*

konveksna $\langle 1, \infty \rangle$, *konkavna* $\langle -\infty, 1 \rangle$; *slika* $\mathcal{R}_f = \langle -\infty, -0.82] \cup [4.82, \infty \rangle$



h) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$;

nema presjeka s osima;

niti parna niti neparna, nije periodična;

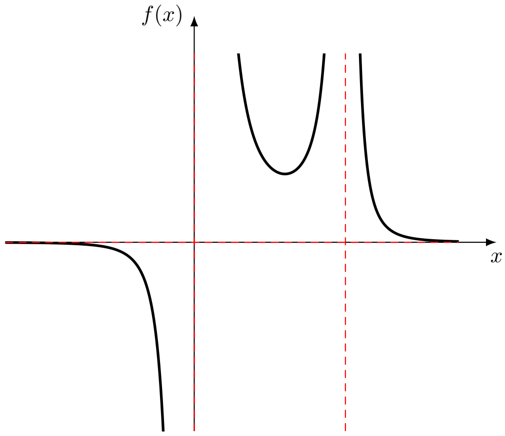
asimptote: V.A. $x = 0$, $x = 2$, H.A. $y = 0$, *nema K.A.;*

$f'(x) = \dfrac{-5x + 6}{x^4(x-2)^3}$, $\implies m(1.2, 0.9)$,

$\nearrow \langle 1.2, 2\rangle$, $\searrow \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 0, 1.2\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle$;

$f''(x) = \dfrac{30x^2 - 72x + 48}{x^5(x-2)^4}$, *nema točaka infleksije,*

konveksna $\langle 0, \infty\rangle \setminus \{2\}$, *konkavna* $\langle -\infty, 0\rangle$; *slika* $\mathcal{R}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



i) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

nema presjeka s osima;

niti parna niti neparna, nije periodična;

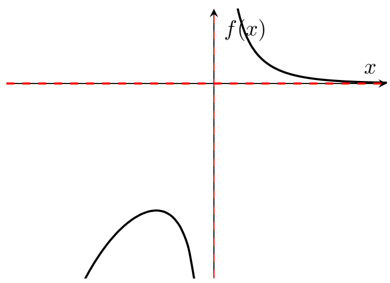
asimptote: V.A. $x = 0$, *desna* H.A. $y = 0$, *nema K.A.;*

$f'(x) = -\dfrac{3x + 1}{x^2 e^{3x}}$, $\implies M\left(-\dfrac{1}{3}, -3e\right)$,

$\nearrow \left\langle -\infty, -\dfrac{1}{3}\right\rangle$, $\searrow \left\langle -\dfrac{1}{3}, \infty\right\rangle \setminus \{0\}$;

$f''(x) = \dfrac{9x^2 + 6x + 2}{x^3 e^{3x}}$, *nema točaka infleksije,*

konveksna $\langle 0, \infty\rangle$, *konkavna* $\langle -\infty, 0\rangle$; *slika* $\mathcal{R}_f = \langle -\infty, -3e] \cup \langle 0, \infty\rangle$



j) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\ln\left(\frac{2}{3}\right)\right\}$;

nema nultočke, presjek s y *osi* $T(0,-4)$;

niti parna niti neparna, nije periodična;

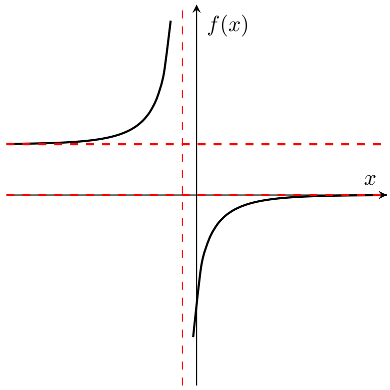
asimptote: V.A. $x = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$, *desna H.A.* $y = 0$, *lijeva* $y = 2$, *nema K.A.;*

$f'(x) = \frac{12e^x}{(2-3e^x)^2}$, *nema ekstrema,*

$\nearrow$ $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\ln\left(\frac{2}{3}\right)\right\}$;

$f''(x) = \frac{9x^2+6x+2}{x^3e^{3x}}$, *nema točaka infleksije,*

konveksna $\langle -\infty, \ln\left(\frac{2}{3}\right)\rangle$, *konkavna* $\langle \ln\left(\frac{2}{3}\right), \infty\rangle$; *slika* $\mathcal{R}_f = \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle$



k) $\mathcal{D}_f = \langle \infty, -1] \cup [0, \infty]$;

$N(-1,0)$, *nema presjeka s* y *osi;*

niti parna niti neparna, nije periodična;

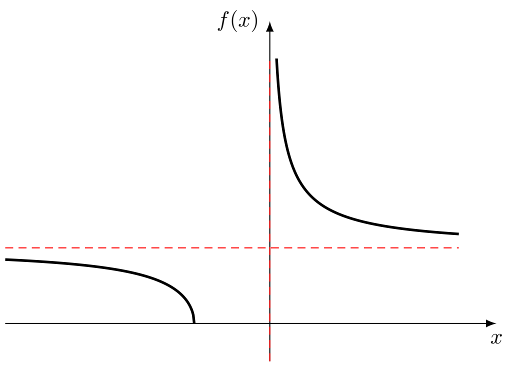
asimptote: V.A. $x = 0$, *H.A.* $y = 1$, *nema K.A.;*

$f'(x) = -\frac{\sqrt{x}}{2x^2\sqrt{x+1}}$, *nema ekstrema,*

$\searrow$ $D = \langle -\infty, -1] \cup \langle 0, \infty\rangle$;

$f''(x) = \frac{4x+3}{4x(x^2+x)\sqrt{x^2+x}}$, *nema točaka infleksije,*

konveksna $\langle 0, \infty\rangle$, *konkavna* $\langle -\infty, -1\rangle$; *slika* $\mathcal{R}_f = [0, \infty\rangle \setminus \{1\}$



l) $\mathcal{D}_f = \langle -\infty, -1\rangle \cup [0, \infty\rangle$;

$N(0,0)$, *presjek s y osi* $T(0,0)$;

niti parna niti neparna, nije periodična;

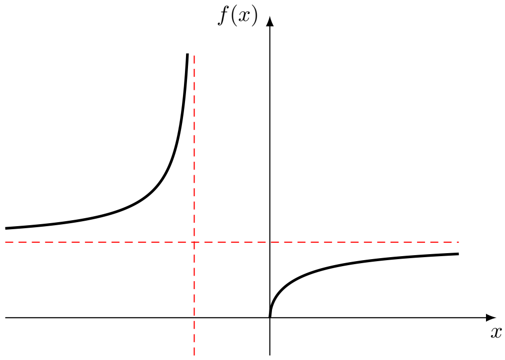
asimptote: V.A. $x = -1$, *H.A.* $y = 1$, *nema K.A.;*

$f'(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$, *nema ekstrema,*

$\nearrow$ $D = \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 0, \infty\rangle$;

$f''(x) = -\dfrac{4x+1}{4x(x+1)\sqrt{x^4+3x^3+3x^2+x}}$, *nema točaka infleksije,*

konveksna $\langle -\infty, -1\rangle$, *konkavna* $\langle 0, \infty\rangle$; *slika* $\mathcal{R}_f = [0, \infty\rangle \setminus \{1\}$



Dodatak

Primjeri kolokvija i ispita

Uvod

- *Primjeri kolokvija*
- *Primjeri ispita*

A.1 Primjeri kolokvija

Prvi kolokvij – godina 2023/24 – A grupa

1. Izračunajte
$$\left|\frac{(x+2)\cdot(x-1)}{x^2+1}\right| > 1$$
2. Odredite polarne koordinate za točku $T\left(\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ zadanu pravokutnim koordinatama. Skicirajte točku u koordinatnom sustavu te označite njene polarne i pravokutne koordinate.
3. Riješite Gauss-Jordanovom metodom sustav
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & & & - & 4z & = & 1 \\ & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ -x & + & 4y & + & z & = & 2 \end{array}$$
4. Odredite površinu paralelograma određenog vektorima
$$\vec{a}+2\vec{b},\ \ 3\vec{b}+\vec{a},\ \text{ako je } |\vec{a}| = \left|\vec{b}\right| = 1,\ \ \angle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{\pi}{3}$$
5. Odredite jednadžbu ravnine koja sadrži pravac
$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{-1}$$
i okomita je na ravninu određenu točkama
$$A\,(1,2,1)\,,\ B\,(1,0,1)\,,\ C\,(2,3,-1)$$

Rješenja zadataka – A grupa

1. $x \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, 3\rangle$
2. $T\left(3, \frac{5\pi}{3}\right)$
3. $x = 13,\ y = 3,\ z = 3$
4. $\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\times\left(3\vec{b}+\vec{a}\right) = \vec{a}\times\vec{b}, \quad P = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$
5. $\Pi_1 \ldots\ 4x+2z-6=0, \quad \Pi \ldots\ x-4y-2z+11=0$

Prvi kolokvij – godina 2023/24 – B grupa

1. Izračunajte
$$\frac{x-1}{x} > \frac{-2}{x\cdot(x+2)}$$
2. Odredite polarne koordinate za točku $T\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ zadanu pravokutnim koordinatama. Skicirajte točku u koordinatnom sustavu te označite njene polarne i pravokutne koordinate.
3. Riješite Gauss-Jordanovom metodom sustav
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & 4z & = & 1 \\ x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ -x & + & 4y & + & z & = & 2 \end{array}$$
4. Zadani su vektori
$$\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{b} = \vec{i} + \vec{j}, \quad \vec{c} = \vec{i} - \vec{j}$$
Odredite vektor $\vec{d}$ ako je
$$\vec{d}\cdot\vec{a} = 3, \quad \vec{d}\times\vec{b} = \vec{c}$$
5. Odredite udaljenost točke $T\,(1,2,1)$ od pravca koji se dobije kao presjek ravnina
$$x + 2y - 3z + 1 = 0, \quad 2x - y - z + 2 = 0$$

Rješenja zadataka – B grupa

1. $x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle -1, \infty\rangle$
2. $T\left(1, \frac{7\pi}{4}\right)$
3. $x = 2,\ y = 1,\ z = 0$
4. $\vec{d} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$
5. $p\ldots\ x = -1 + z, y = z, z = z, \quad d = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}} = 2.94$

Prvi kolokvij – godina 2023/24 – C grupa

1. Izračunajte
$$2x + \frac{1}{x} - 2 > |x|$$
2. Odredite polarne koordinate za točku $T\,(1, -1)$ zadanu pravokutnim koordinatama.
Skicirajte točku u koordinatnom sustavu te označite njene polarne i pravokutne koordinate.
3. Riješite Gauss-Jordanovom metodom sustav
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & - & 3z & = & -1 \\ x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ -x & + & y & + & z & = & 1 \end{array}$$
4. Odredite površinu trokuta određenog vektorima
$$2\vec{a} - \vec{b}, \quad 3\vec{b} + \vec{a}$$
ako je
$$|\vec{a}| = \left|\vec{b}\right| = 1, \quad \angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{\pi}{6}$$
5. Odredite udaljenost točke $T\,(1, 2, 1)$ od ravnine koja sadrži točku $A\,(-1, 0, 1)$ i pravac
$$x = 1 - 2\lambda, \quad y = 1 + 3\lambda, \quad z = -1 - \lambda$$

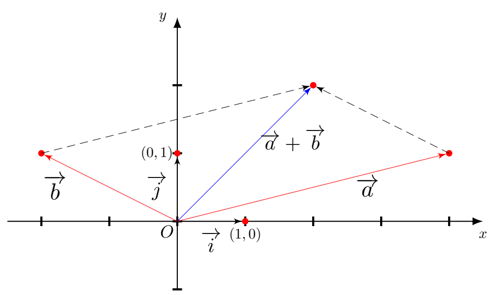
Rješenja zadataka – C grupa

1. $x \in \langle 0, \infty \rangle$
2. $T\left(2, \dfrac{2\pi}{3}\right)$
3. $x = 2,\ y = 2,\ z = 1$
4. $\left(2\vec{a} - \vec{b}\right) \times \left(3\vec{b} + \vec{a}\right) = 7\vec{a} \times \vec{b}, \quad P = \dfrac{7}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \dfrac{7}{4}$
5. $\Pi \ldots\ 5x + 6y + 8z - 3 = 0, \quad d = \dfrac{23}{\sqrt{125}} = 2.06$

Prvi kolokvij – godina 2023/24 – D grupa

1. Izračunajte
$$\frac{1}{x+2} > \frac{x-3}{2}$$
2. Odredite pravokutne koordinate za točku $T\left(4, \frac{5\pi}{6}\right)$ zadanu polarnim koordinatama. Skicirajte točku u koordinatnom sustavu te označite njene polarne i pravokutne koordinate.
3. Riješite Gauss-Jordanovom metodom sustav
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 4z & = & 1 \\ 2x & - & 3y & & & = & 0 \\ -x & + & 4y & + & z & = & 2 \end{array}$$
4. Zadani su vektori
$$\vec{a} = 4\vec{i} + \vec{j}, \quad \vec{b} = -2\vec{i} - \vec{j}$$
   (a). Skicirajte vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ u ravnini.
   Na istoj slici prikažite pravilo paralelograma za zbroj vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.
   (b). Odredite kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.
5. Odredite kut što ga zatvara pravac određen točkama
$$T_1\,(1,2,1)\,,\ T_2\,(0,3,-1)$$
i ravnina određena točkama
$$A\,(1,2,3)\,,\ B(2,0,3),\ C(-1,1,-2)$$

Rješenja zadataka – D grupa

1. $x \in \langle -2, \infty \rangle$
2. $T\left(-2\sqrt{3}, 2\right)$
3. $x = 1,\ y = \frac{2}{3},\ z = \frac{1}{3}$
4. 

$$\cos\left(\angle(\vec{a},\vec{b})\right) = -0.7593$$
$$\angle(\vec{a},\vec{b}) = 139.4^\circ$$

5. $p \ldots \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-1}{-2}$

   $\Pi \ldots 2x + y - z - 1 = 0$

   $\sin\left(\angle(\vec{s},\vec{n})\right) = 0.167,\ \angle(\vec{s},\vec{n}) = 9.59^\circ$

Prvi kolokvij – godina 2023/24 – E grupa

1. Izračunajte
$$\frac{|-x+3|}{x+1}<1$$

2. Odredite pravokutne koordinate za točku $T\left(4, \frac{5\pi}{3}\right)$ zadanu polarnim koordinatama.
   Skicirajte točku u koordinatnom sustavu te označite njene polarne i pravokutne koordinate.

3. Riješite Gauss-Jordanovom metodom sustav
$$\begin{array}{rcrcrcr} -x & - & 2y & + & 3z & = & 0 \\ 3x & - & y & + & z & = & 1 \\ x & & & + & z & = & -2 \end{array}$$

4. Zadani su vektori
$$\vec{a}=-\vec{i}+3\vec{j}, \quad \vec{b}=2\vec{i}-4\vec{j}$$
   (a). Skicirajte vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ u ravnini.
   Na istoj slici prikažite pravilo paralelograma za zbroj vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.
   (b). Odredite ortogonalnu projekciju vektora $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$.

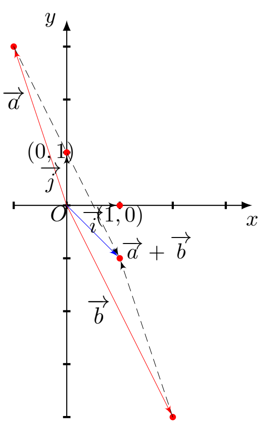
5. Odredite udaljenost točke $T(1,0,-1)$ od ravnine koja sadrži točku $A(3,1,0)$ i pravac određen točkama $P(1,2,4)$, $Q(2,1,5)$.

Rješenja zadataka – E grupa

1. $x \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, 3\rangle$

2. $T\left(2, -2\sqrt{3}\right)$

3. $x=0,\ y=-3,\ z=-2$

4. 

$$\vec{P}_{\vec{b}}(\vec{a})=-\frac{7}{5}\vec{i}+\frac{14}{5}\vec{j}$$

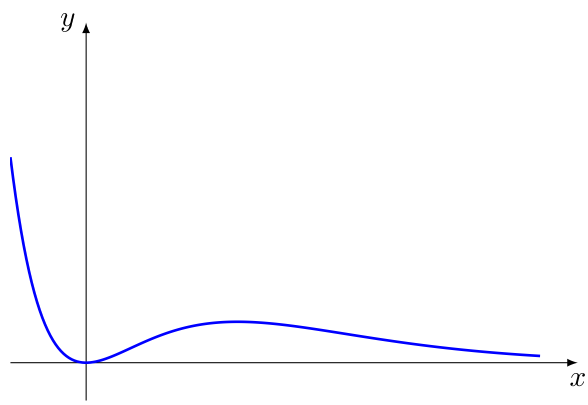
5. $$p \ldots \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-4}{1}$$
$\Pi \ldots 5x+6y+z-21=0$
$$d=\frac{17}{\sqrt{62}}=2.16$$

Drugi kolokvij – godina 2023/24 – A grupa

1. Izračunajte vrijednost izraza
$$\left(1+\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^6$$
2. Odredite jednadžbe tangenti za krivulju
$$y^2 = 4 - x$$
u sjecištima ordinatne osi. Na istoj slici skicirajte krivulju i tangente.
3. Izračunajte i sredite do kraja drugu derivaciju funkcije
$$f(x) = \ln\frac{e^x}{1+x^2}$$
4. Izračunajte limes
$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$$
5. Ispitajte tokk funkcije
$$f(x) = x^2\, e^{-x}$$

Rješenja zadataka – A grupa

1. $\left(1+\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^6 = \left(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6 = \left(\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})\right)^6 =$ Moivre $= -27$
2. $S_1(0,2) \implies x+4y=8, \quad S_2(0,-2) \implies x-4y=8$
3. $f'(x) = \dfrac{(1-x)^2}{1+x^2} \implies f''(x) = \dfrac{2x^2-2}{(1+x^2)^2}$
4. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} =$ logaritam $= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{1-x} =$ LH $= -\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x} = -1 \implies \lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \dfrac{1}{e}$
5. $m(0,0),\ M(2,4e^{-2}),\ I = 2\pm\sqrt{2}$

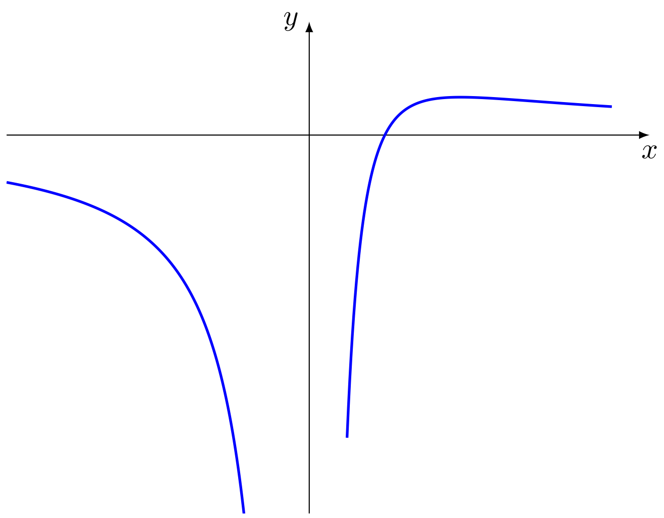


Drugi kolokvij – godina 2023/24 – B grupa

1. Izračunajte sve vrijednosti korijena
$$\sqrt[4]{i}$$
i prikažite ih u kompleksnoj ravnini.
2. Odredite jednadžbu tangente na krivulju $y = \ln x$ u sjecištu osi apscise.
Na istoj slici skicirajte tangentu i krivulju.
3. Izračunajte i sredite do kraja drugu derivaciju funkcije
$$f(x) = \ln\left(e^{-x} + x\,e^{-x}\right)$$
4. Izračunajte limes
$$\lim_{x\to 0} x\,\ln x$$
5. Ispitajte tok funkcije
$$f(x) = 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$$

Rješenja zadataka – B grupa

1. $z_k = \cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\frac{k\pi}{2}\right) \implies z_0 = 0.92 + i0.38,\ z_1 = -0.38 + i0.92,\ z_2 = -0.92 - i0.38,\ z_3 = 0.38 - i0.92$
2. tangenta $y = x - 1$
3. $f(x) = \ln\dfrac{1+x}{e^x} = \ln(1+x) - x \implies f'(x) = -\dfrac{x}{1+x} \implies f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} x\,\ln x = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \text{LH} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim\limits_{x\to 0} x = 0$
5. $N(1,0),\ M(2,0.5),\ I = \frac{3}{2}$

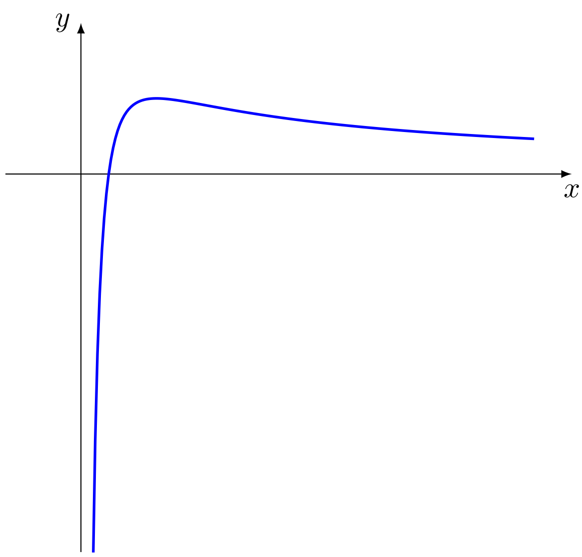


Drugi kolokvij – godina 2023/24 – C grupa

1. Izračunajte vrijednost izraza
$$(1-i)^6$$
2. U kojim točkama i pod kojim kutem se sijeku krivulje
$$2y = x^2, \quad 2y = 8 - x^2$$
3. Izračunajte i sredite do kraja drugu derivaciju funkcije
$$f(x) = e^{-x}(\sin x + \cos x)$$
4. Izračunajte limes
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-\operatorname{tg} x}{\cos(2x)}$$
5. Ispitajte tok funkcije
$$f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$$

Rješenja zadataka – C grupa

1. $(1-i)^6 = \left(\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})\right)^6 = \text{Moivre} = 8i$
2. $S(\pm 2, 2) \implies \operatorname{tg}\varphi = \frac{4}{3} \implies \varphi \approx 0.927 \implies \varphi \approx 53.13°$
3. $f'(x) = -2\sin x e^{-x} \implies f''(x) = 2e^{-x}(\sin x - \cos x)$
4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{1-\operatorname{tg} x}{\cos(2x)} = \text{LH} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\frac{1}{\cos^2 x}}{-2\sin(2x)} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{1}{2\cos^2 x \sin(2x)} = 1$
5. $N(e^{-1}, 0)$, $m(1, 1)$, $I = \sqrt{e}$



Popravni kolokvij – godina 2023/24

1. Riješite Gauss-Jordanovom metodom sustav

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ 2x & + & y & - & z & = & 1 \\ -x & + & 2y & - & z & = & 0 \end{array}$$

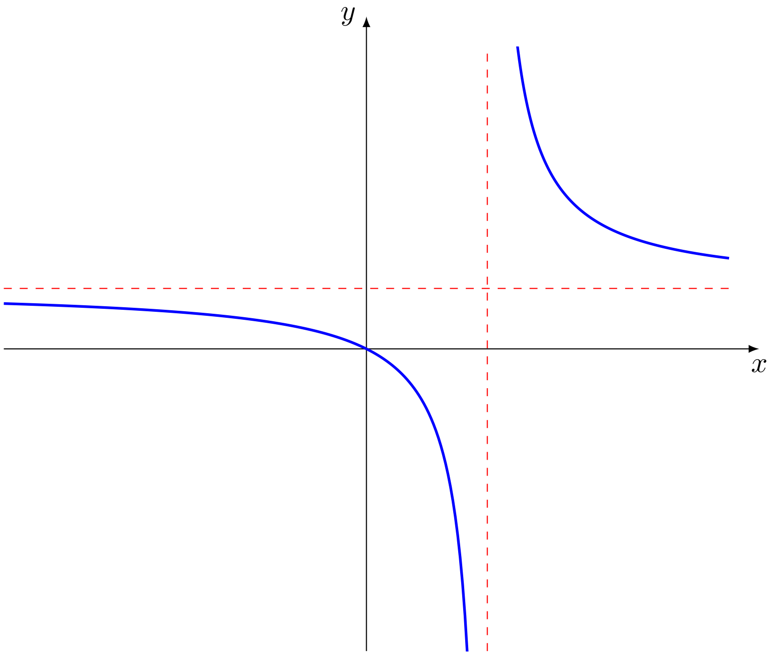
2. Riješite nejednadžbu

$$\frac{x-1}{x+2} > 1$$

3. Zadani su vektori $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$ i $b = -\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}$. Izračunajte vektorski produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.
4. Odredite prvu derivaciju funkcije $f(x) = (-3x+2) \cdot e^{4x}$.
5. Isptajte tok funkcije

$$f(x) = \frac{x}{x-2}$$

Rješenja zadataka

1. $x = y = z = \dfrac{1}{2}$
2. $x < -2$
3. $\vec{a} \times \vec{b} = -14\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}$
4. $-3e^{4x} + 4(-3x+2)e^{4x}$
5. 

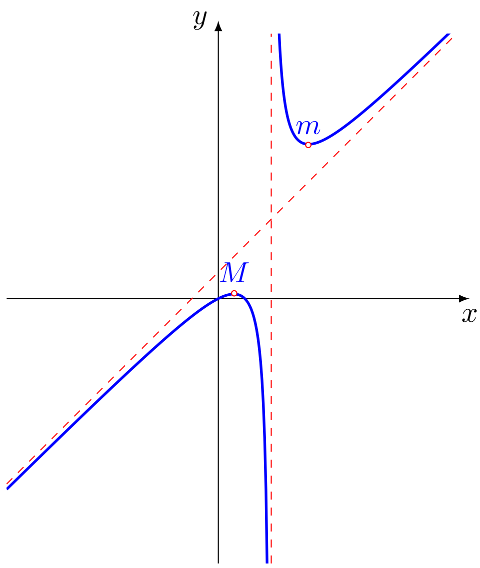
A.2 Primjeri ispita

Zimski rok – godina 2023/24

1. Riješite nejednadžbu
$$\frac{x-1}{x} > \frac{4}{x(x-2)}$$
2. Riješite Gauss-Jordanovom metodom sustav
$$\begin{array}{ccccccc} 2x & + & 5y & + & 3z & = & 2 \\ x & + & 2y & + & 2z & = & 4 \\ x & + & y & + & 4z & = & 11 \end{array}$$
3. Odredite jednadžbu ravnine koja je okomita na ravninu $x-2y+3z-1=0$ te sadrži točke $A\,(1,2,3)$ i $B\,(-2,5,4)$.
4. Odredite prvu derivaciju funkcije
$$f(x) = \ln^2\left(\sin\left(2x^2\right)\right) .$$
5. Isptajte tokk funkcije
$$f(x) = \frac{x^2-x}{x-2}$$

Rješenja zadataka

1. $x \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 0, 2\rangle \cup \langle 4, \infty\rangle$
2. $x = 12$, $y = -5$, $z = 1$
3. $11x + 10y + 3z - 40 = 0$
4. $f'(x) = 2\ln\left(\sin\left(2x^2\right)\right) \cdot \frac{1}{\sin\left(2x^2\right)} \cdot \cos\left(2x^2\right) \cdot 4x = 8x \cdot \ln\left(\sin\left(2x^2\right)\right) \cdot \operatorname{ctg}\left(2x^2\right)$
5.
   - $D_f = \mathbb{R}/\left\{2\right\}$
   - ni parna ni neparna
   - nultočka $N(0,0)$, N(1,0)
   - asimptote: $x = 2$, $y = x + 1$
   - $f'(x) = \dfrac{x^2-4x+2}{(x-2)^2}$, $M(0.6, 0.2)$, $m(3.4, 5.8)$
   - $f''(x) = \dfrac{4}{(x-2)^3}$, nema točke infleksije

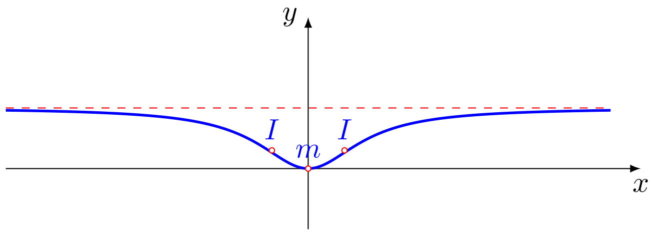


Zimski rok – godina 2023/24

1. Izračunajte svojstvene vrijednosti i pridružene svojstvene vektore za matricu
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$
2. Odredite jednadžbu tangente koja prolazi nultočkom funkcije
$$f(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}.$$
3. Odredite kut što ga zatvara pravac $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-1}{-2}$ i ravnina određena točkama $A\,(1,2,3)\,,\ B\,(2,0,3)\,,\ C\,(-1,1,-2)$.
4. Izračunajte limes
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\pi\cos^2(x)\right)}{x^2}.$$
5. Isptajte tok funkcije
$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}.$$

Rješenja zadataka

1. $\sigma(L) = \{-1, 3\}$, $\vec{x_1} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{x_2} = -\vec{i} + \vec{j}$
2. $f'(x) = \frac{-\ln(x)+2}{2x\sqrt{x}}$, $y = x - 1$
3. $2x + y - z - 1 = 0,\ \sin\angle = \dfrac{1}{6},\ \Longrightarrow\ \angle = 9.59^\circ = 0.17$ rad
4. $L = \pi$
5.
   - $D_f = \mathbb{R}$
   - parna
   - nultočka $N(0,0)$
   - asimptote: $y = 1$
   - $f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2},\ m(0,0)$
   - $f''(x) = \frac{-6x^2+2}{(x^2+1)^3}$ točke infleksije $I\,(-0.6, 0.3)$, $I\,(0.6, 0.3)$



Izvanredni rok – godina 2023/24

1. Riješite nejednadžbu $\dfrac{(x+1)^2(x-2)}{(x-1)^2(x+2)} < 0$

2. Odredite sva sjecišta kružnice $|z-2+i| = \sqrt{3}$ s x osi.

3. Odredite matrični zapis linearnog operatora $L\colon \mathbb{V}^2 \to \mathbb{V}^2$ koji ima svojstvene vrijednosti
$$\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 7,$$
i pridružene svojstvene vektore
$$\vec{v}_1 = \vec{i} - \vec{j}, \quad \vec{v}_2 = 4\vec{i} + 5\vec{j}$$

4. Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x-1} - \sqrt{x^2-1}\right)$

5. Ispitajte tok funkcije $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$

Rješenja zadataka

1.

$-\infty$		-2		-1		1		2		∞
	$+$		$-$		$-$		$-$		$+$	

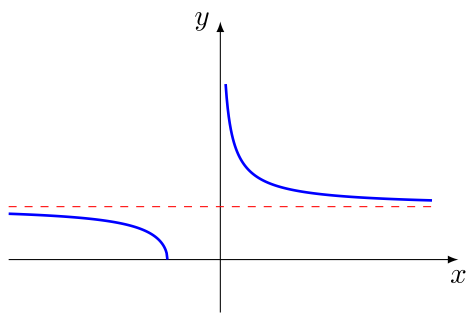
$\Longrightarrow x \in \langle -2, 2\rangle,\ x \neq \pm 1$

2. $|z-2+i| = \sqrt{3} \Longrightarrow |(x-2)+(y+1)i| = \sqrt{3} \Longrightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2} = \sqrt{3}$
sjecišta x osi određena su uvrštenjem $y=0$ u jednadžbu
$(x-2)^2+(0+1)^2 = 3 \Longrightarrow x^2-4x+2=0 \Longrightarrow x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$

3. Matricu $L = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ određujemo iz sustava jednadžbi
$$M\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1 \Longrightarrow a-b=-2,\ c-d=2$$
$$M\vec{v}_2 = \lambda_2\vec{v}_2 \Longrightarrow 4a+5b=28,\ 4c+5d=35$$
odakle slijede koeficijenti za matricu $L = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x-1} - \sqrt{x^2-1}\right) = 1$

5.
- $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \langle -1, 0]$
- $f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x^3(x+1)}}$
- $f''(x) = \dfrac{4x+3}{4\sqrt{x^5(x+1)^3}}$



Ljetni rok – godina 2023/24

1. Jedno rješenje jednadžbe $z^3+z+10=0$ iznosi $z_1=1+2i$. Izračunajte ostala rješenja jednadžbe?

2. Izračunajte jednadžbu ravnine koja sadrži pravce
$$\frac{x-6}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-7}{2}, \qquad \frac{x-6}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-4}{1}$$

3. Odredite jednadžbu normale na krivulju $x^3-2xy+y^2-13=0$ u točki $T(-2,3)$.

4. Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x^3}+2\sqrt{x}-12}{x-4}$

5. Ispitajte tok funkcije $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$

Rješenja zadataka

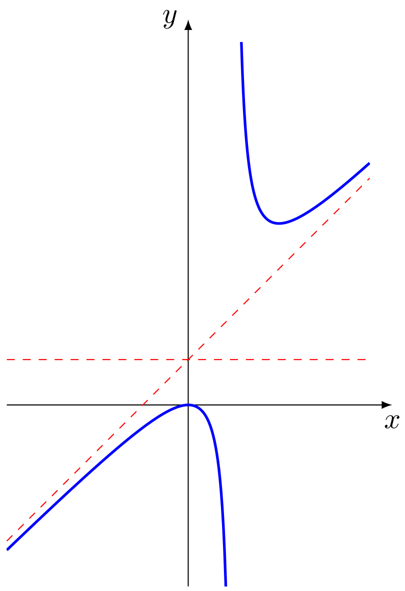
1. $z_2=\overline{z_1}=1-2i$. Treće rješenje $z_3=-2$ dobijemo nakon dijeljenja s polinomom $(z-z_1)(z-z_2)=z^2-4z+13$

2. Normala za ravninu je vektorski umnožak smjera pravaca $\vec{n}=-\vec{i}+3\vec{j}-\vec{z}$ a ravnina sadrži sjecište pravaca $T(4,1,3)$ stoga je jednadžba ravnine $-x+3y-z+4=0$

3. Implicitnim deriviranjem dobijemo jednadžbu normale $5x-3y+19=0$

4. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x^3}+2\sqrt{x}-12}{x-4}=\dfrac{7}{2}$

5.
   - $f(x)=x+1+\dfrac{1}{x-1}$,
     kosa asimprota $y=x+1$
   - $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$
   - $f'(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$
     $Maks(0,0), min(2,4)$
   - $f''(x)=\dfrac{2}{(x-1)^3}$



Dodatak

Pregled formula

Realni brojevi	
Apsolutna vrijednost realnog broja a	$\lvert a\rvert = \begin{cases} a, & \text{za } a \geqslant 0 \\ -a, & \text{za } a < 0 \end{cases}$
Za sve $a, b, c \in \mathbb{R}$ vrijede sljedeće jednakosti	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$ $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

Binomni poučak	
$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} A_k = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n}b^n, \quad n \in \mathbb{N}$	
Opći član: prvi $(k=0)$, drugi $(k=1), \ldots$	$A_k = \binom{n}{k}a^{n-k}b^k,\ k = 0, 1, \ldots n$
Binomni koeficijent	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}$
Svojstva binomnih koeficijenata	$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{0}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = 1$ $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Kompleksni brojevi	
Algebarski oblik	$z = a + bi$
Kompleksno konjugirani broj	$\overline{z} = a - bi$
Modul	$\lvert z\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$
Trigonometrijski oblik	$z = \lvert z\rvert(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
Argument	$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{b}{a}$
Potencije od i	$i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i$
Algebarske operacije za kompleksne brojeve $z = a + bi = \lvert z\rvert(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $w = c + di = \lvert w\rvert(\cos\psi + i\sin\psi)$	$z \pm w = (a \pm c) + (b \pm d)i$ $z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc)i,\ \frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{\lvert w\rvert^2}$ $z \cdot w = \lvert z\rvert\lvert w\rvert(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi))$ $\frac{z}{w} = \frac{\lvert z\rvert}{\lvert w\rvert}(\cos(\varphi - \psi) + i\sin(\varphi - \psi))$ $z^n = \lvert z\rvert^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \quad n \in \mathbb{N}$ $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\lvert z\rvert}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$ $k = 0, \ldots, n-1$

Vektori	
Skalarni umnožak	$\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$
Kut između vektora	$\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert}$
Ako su $\vec{a}=a_x\vec{\imath}+a_y\vec{\jmath}$ i $\vec{b}=b_x\vec{\imath}+b_y\vec{\jmath}$	$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y$
Ako su $\vec{a}=a_x\vec{\imath}+a_y\vec{\jmath}+a_z\vec{k}$ i $\vec{b}=b_x\vec{\imath}+b_y\vec{\jmath}+b_z\vec{k}$	$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$
Ortogonalna projekcija vektora $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$	$\vec{p}_{\vec{a}}\left(\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert^2}\,\vec{a}$
Duljina ortogonalne projekcije	$\left\lvert\vec{p}_{\vec{a}}\left(\vec{b}\right)\right\rvert=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert}$
Ortogonalna projekcija vektora $\vec{a}$ na ravninu π s vektorom smjera $\vec{n}$	$\vec{p}_{\pi}\left(\vec{a}\right)=\vec{a}-\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{n}}{\lvert\vec{n}\rvert^2}\,\vec{n}$
Vektorski umnožak	$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$
Duljina vektorskog umnoška	$\left\lvert\vec{a}\times\vec{b}\right\rvert=\lvert\vec{a}\rvert\left\lvert\vec{b}\right\rvert\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$
Površina paralelograma	$P=\left\lvert\vec{a}\times\vec{b}\right\rvert$
Mješoviti umnožak	$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$
Volumen paralelopipeda	$V=\left\lvert\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right\rvert$ $V=B\cdot v\,,\quad B=\left\lvert\vec{a}\times\vec{b}\right\rvert$
Volumen trostrane prizme	$V=\dfrac{1}{2}\left\lvert\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right\rvert$ $V=B\cdot v\,,\quad B=\dfrac{1}{2}\left\lvert\vec{a}\times\vec{b}\right\rvert$
Volumen tetraedra	$V=\dfrac{1}{6}\left\lvert\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right\rvert$ $V=\dfrac{1}{3}B\cdot v\,,\quad B=\dfrac{1}{2}\left\lvert\vec{a}\times\vec{b}\right\rvert$

Pravac u ravnini	
Jednadžba pravca kroz dvije točke $P(x_1, y_1)$ i $Q(x_2, y_2)$	$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$
Eksplicitni oblik jednadžbe pravca	$y = ax + b$
Jednadžba pravca kroz točku $T(x_0, y_0)$ s koeficijentom smjera $a \in \mathbb{R}$	$y - y_0 = a(x - x_0)$
Implicitni oblik jednadžbe pravca	$Ax + By + C = 0$
Vektor normale za pravac $Ax + By + C = 0$	$\vec{n} = A\vec{\imath} + B\vec{\jmath}$
Udaljenost točke $T(x_0, y_0)$ od pravca $Ax + By + C = 0$	$d = \frac{\lvert Ax_0 + By_0 + C\rvert}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Ravnina u prostoru	
Jednadžba ravnine kroz tri točke	$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$
Implicitni oblik	$Ax + By + Cz + D = 0$
Vektor normale	$\vec{n} = A\vec{\imath} + B\vec{\jmath} + C\vec{k}$
Jednadžba ravnine kroz točku $T(x_0, y_0, z_0)$ sa zadanim vektorom normale	$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$
Udaljenost točke $T(x_0, y_0, z_0)$ od ravnine	$d = \frac{\lvert Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\rvert}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Pravac u prostoru	
Jednadžbe pravca kroz dvije točke $T_1(x_1, y_1, z_1)$ i $T_2(x_2, y_2, z_2)$	
kanonski oblik	$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$
parametarski oblik	$x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1)$ $y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1)$ $z = z_1 + \lambda(z_2 - z_1)$
Jednadžbe pravca kroz točku $T_0(x_0, y_0, z_0)$, s vektorom smjera $\vec{s} = s_x\vec{\imath} + s_y\vec{\jmath} + s_z\vec{k}$	
kanonski oblik	$\frac{x - x_0}{s_x} = \frac{y - y_0}{s_y} = \frac{z - z_0}{s_z}$
parametarski oblik	$x = x_0 + \lambda s_x$ $y = y_0 + \lambda s_y$ $z = z_0 + \lambda s_z$
Udaljenost točke T od pravca određenog točkom T_0 i vektorom smjera $\vec{s}$	$d = \frac{\lvert\overrightarrow{T_0T} \times \vec{s}\rvert}{\lvert\vec{s}\rvert}$
Udaljenost između dva pravca određena točkama T_1, T_2 i vektorima smjera $\vec{s_1}, \vec{s_2}$	$d = \frac{\lvert(\vec{s_1} \times \vec{s_2}) \cdot \overrightarrow{T_1T_2}\rvert}{\lvert\vec{s_1} \times \vec{s_2}\rvert}$
Kut φ između pravca s vektorom smjera $\vec{s}$ i ravnine s vektorom normale $\vec{n}$	$\sin\varphi = \frac{\vec{s} \cdot \vec{n}}{\lvert\vec{s}\rvert\lvert\vec{n}\rvert}$

Nizovi i redovi	
Neki važni limesi nizova	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1,\ \text{za } a > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0,\ \text{za } a \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$
Nužan uvjet konvergencije reda	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
Geometrijski red	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_1 q^n = a_1 + a_1 q + a_1 q^3 + \dots$
Kvocijent	$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$
Geometrijski red konvergira	$-1 < q < 1 \ \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_1 q^n = \frac{a_1}{1-q}$
Geometrijski red divergira	$q \leq -1$ i $q \geq 1$
Harmonijski red	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$
Apsolutna konvergencija	Ako $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lvert a_n \rvert$ konvergira, onda i $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergira.

Kriteriji konvergencije	
REDOVI S POZITIVNIM ČLANOVIMA	
Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za $n \geqslant n_0$ vrijedi $a_n \leqslant b_n$ onda: - ako $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergira, onda i $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergira. - ako $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ divergira, onda i $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ divergira.	1. poredbeni kriterij
Ako vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$, gdje je $0 < c < \infty$, onda redovi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ istovremeno konvergiraju ili divergiraju.	2. poredbeni kriterij
Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ onda vrijedi: - ako je $L < 1$, onda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergira. - ako je $L > 1$, onda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ divergira.	D'Alambertov kriterij
Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ onda vrijedi: - ako je $L < 1$, onda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergira. - ako je $L > 1$, onda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ divergira.	Cauchyjev kriterij
REDOVI S ALTERNIRANIM ČLANOVIMA	
Ako niz (a_n) pozitivnih brojeva strogo pada i vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ onda red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ konvergira k s i pritom je $0 < s < a_1$.	Leibnizov kriterij

Funkcije	
Eksponencijalna funkcija s bazom a	$f(x) = a^x,\ a > 0, a \neq 1$
Svojstva	$a^{x+y} = a^x a^y$ $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$ $(a^x)^y = a^{xy}$
Logaritamska funkcija s bazom a	$f(x) = \log_a(x)$
Svojstva	$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$ $\log_a(x^n) = n\log_a(x)$ $\log_a(x) = n \Leftrightarrow x = a^n$ $a^{\log_a(x)} = x$ $\log_a(a^x) = x$

PRIRODNA DOMENA	
Oblik funkcije	Uvjet za prirodnu domenu
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$g(x) \neq 0$
$\sqrt{f(x)}$	$f(x) \geq 0$
$\ln(f(x)),\ \log_a(f(x))$	$f(x) > 0$
$\arcsin(f(x)), \arccos(f(x))$	$-1 \leq f(x) \leq 1$

NEKI VAŽNI LIMESI FUNKCIJA

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

ASIMPTOTE	
$\lim\limits_{x\to c} f(x) = \pm\infty$, ili $\lim\limits_{x\to c+} f(x) = \pm\infty$, ili $\lim\limits_{x\to c-} f(x) = \pm\infty$	$x = c$ je vertikalna asimptota
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = l$	$y = l$ je horizontalna asimptota
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x} = k$, i $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx) = l$	$y = kx + l$ je kosa asimptota

Vrijednosti trigonometrijskih funkcija									
x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$	x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
0	0	1	0	-	π	0	-1	0	-
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	-	0	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	-	0
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$

Trigonometrijski identiteti	
Osnovni identiteti $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$	Parnost i neparnost funkcija $\sin(-x) = -\sin(x)$ $\cos(-x) = \cos(x)$ $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}(x)$ $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg}(x)$
Funkcije dvostrukog argumenta $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ $\operatorname{tg}(2x) = \frac{2\operatorname{tg}(x)}{1-\operatorname{tg}^2(x)}$ $\operatorname{ctg}(2x) = \frac{\operatorname{ctg}^2(x)-1}{\operatorname{ctg}^2(x)}$	Funkcije polovine argumenta $\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos(x)}{2}$ $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1+\cos(x)}{2}$ $\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$ $\operatorname{ctg}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1+\cos(x)}{\sin(x)}$
Funkcije zbroja i razlike $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(x) \pm \cos(x)\sin(y)$ $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(x) \mp \sin(x)\sin(y)$ $\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg}(x) \pm \operatorname{tg}(y)}{1 \mp \operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(y)}$ $\operatorname{ctg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{ctg}(x)\operatorname{ctg}(y) \mp 1}{\operatorname{ctg}(x) \pm \operatorname{ctg}(y)}$	Poučak o sinusu i kosinusu $a : b : c = \sin(\alpha) : \sin(\beta) : \sin(\gamma)$ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$
Pretvoranje zbroja u umnožak $\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$ $\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$ $\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ $\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$	Pretvaranje umnoška u zbroj $\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$ $\cos(x)\sin(y) = \frac{1}{2}[\sin(x+y) - \sin(x-y)]$ $\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$ $\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)]$

Polarni koordinatni sustav
$x = r \cdot \cos(\varphi)$ $y = r \cdot \sin(\varphi)$ $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad r > 0, r \in \mathbb{R}$ $\text{tg}(\varphi) = \frac{y}{x}, \quad \varphi \in [0, 2\pi)$

Pravila deriviranja	
$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$	Derivacija zbroja
$(\lambda f(x))' = \lambda f'(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}$	
$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	Derivacija umnoška
$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$	Derivacija kvocijenta
$(g(f(x)))' = g'(f(x))f'(x)$	Derivacija složene funkcije
$\left(u(x)^{v(x)}\right)' = u(x)^{v(x)} \left(v'(x) \ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right)$	Logaritamsko deriviranje

Tablica derivacija

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
c	0	e^x	e^x	$\sin x$	$\cos x$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
x^a	ax^{a-1}	a^x	$a^x \ln a$	$\cos x$	$-\sin x$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\text{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\text{arctg}\, x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\text{ctg}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\text{arcctg}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Primjene derivacija	
$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$	Jednadžba tangente u točki $(x_0, f(x_0))$
$y - f(x_0) = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$	Jednadžba normale u točki $(x_0, f(x_0))$
$\alpha = \operatorname{arctg} \dfrac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) f_2'(x_0)}$	Kut između krivulja $y = f_1(x)$ i $y = f_2(x)$ x_0 je apscisa sjecišta krivulja. Ako je nazivnik jednak 0, krivulje su okomite.
$v(t) = s'(t)$	Brzina u trenutku t
$a(t) = v'(t) = s''(t)$	Akceleracija u trenutku t

Taylorova formula

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

L'Hospitalovo pravilo	
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$	Primjenjuje se za neodređene oblike $\frac{0}{0}$ ili $\pm\frac{\infty}{\infty}$. Pravilo vrijedi za jednostrane limese $a = \pm\infty$.

Intervali monotonosti	
$f'(x) > 0$	$f(x)$ strogo raste
$f'(x) < 0$	$f(x)$ strogo pada

Lokalni ekstremi	
$f'(a) = 0$ i $f''(a) > 0$	lokalni minimum u točki $(a, f(a))$
$f'(a) = 0$ i $f''(a) < 0$	lokalni maksimum u točki $(a, f(a))$

Konveksnost, konkavnost i točka infleksije	
$f''(x) > 0$	funkcija $f(x)$ je konveksna
$f''(x) < 0$	funkcija $f(x)$ je konkavna
$f''(a) = 0$ i $f''(x)$ mijenja predznak prolaskom kroz a	$(a, f(a))$ je točka infleksije.

Tok funkcije

1. odrediti domenu funkcije
2. ispitati eventualnu parnost, neparnost i periodičnost
3. odrediti sjecišta grafa funkcije s koordinatnim osima
4. odrediti asimptote: vertikalnu, horizontalnu i kosu
5. odrediti intervale monotonosti (rast i pad) i lokalne ekstreme
6. odrediti intervale zakrivljenosti (konveksnost, konkavnost) i točke infleksije
7. skicirati graf funkcije koristeći dobivene podatke

Bibliografija

[1] B. Apsen. *Repetitorij više matematike I*. Golden marketing - Tehnička knjiga, 2003.

[2] L. Čaklović. *Zbirka zadataka iz linearne algebre*. Školska knjiga, 1985.

[3] B. P. Demidović. *Zadaci i riješeni primjeri iz matematičke analize za tehničke fakultete*. Golden marketing - Tehnička knjiga, 2003.

[4] V. Devide. *Riješeni zadaci iz više matematike sv. I*. Školska knjiga, 1985.

[5] V. Devide. *Riješeni zadaci iz više matematike sv. II*. Školska knjiga, 1989.

[6] V. P. Minorski. *Zbirka zadataka više matematike*. Tehnička knjiga, 2003.

[7] M. Orlić, T. Perkov. *Repetitorij matematike za studente graditeljstva*. TVZ, 2014.

[8] S. Suljagić. *Matematika 1*. TVZ, 2005.

Kazalo