

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU ZAGREB UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

DARIO MATIKA

OSNOVE INDUSTRIJSKE ROBOTIKE

Studeni, 2022. godine

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU ZAGREB UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Manualia polytechnici studiorum Zagrabiensis

izdavač	Tehničko veleučilište u Zagrebu Vrbik 8, Zagreb
za izdavača	prof. dr. sc. Jana Žiljak Gršić
autor	prof.dr.sc. Dario Matika
recenzenti	prof.dr.sc. Ivan Petrović prof.dr.sc. Alfredo Višković
vrsta djela	udžbenik

Objavljivanje je odobrilo Stručno vijeće Tehničkog veleučilišta u Zagrebu odlukom **5489-2/22 od 21. studenog 2022. godine**

ISBN 978-953-8444-07-4

Mojoj dragoj obitelji (Eva, Mario i Nevenka)

PREDGOVOR

Pred vama je izdanje udžbenika „Osnove industrijske robotike“ koji je nastao na iskustvima u nastavnom procesu kao i kroz mnoge stručne kontakte s kolegama nastavnicima i asistentima na Tehničkom veleučilištu u Zagrebu. Udžbenik je namjenjen studentima specijalističkog diplomskog studija strojarstvo.

Svrha je udžbenika omogućiti studentima uspješno usvajanje teorijskih osnova i praktičnih znanja u rješavanju osnovnih problema iz područja industrijske robotike, a koji su povezani uz direktnu, diferencijalnu i indirektnu kinematiku, planiranje putanje i trajektorije robota, dinamiku robota, programiranja rada robota kao i analizu i sintezu upravljanja pogonom robota.

Udžbenik omogućuje stjecanje sljedećih ishoda učenja:

- studenti će biti sposobni klasificirati temeljna svojstva i tehničke karakteristike robotskih sustava u industriji, razumijeti razvoj i primjenu robotskih manipulatora u industrijskim procesima,
- moći će povezivati temeljne fizikalne zakone i pojave kojima je određeno ponašanje i kretanje robotskih manipulatora,
- moći će projektirati regulacijski krug i sustav upravljanja robotskom rukom i alatom,
- moći će izvoditi složene proračune kinematike i dinamike robotskog manipulatora, kao i projektiranje putanje i trajektorije robotske ruke.

U prvom poglavlju pod naslovom *„Uvod u robotiku“* daje se kronološki pregled razvoja industrijskih robota od izuma G.C. Devola iz 1954. godine koji je postao temelj moderne robotske industrije pa sve do suvremenog doba i industrijskih robota koji sami uče upravljati „samim sobom“. Prezentiraju se glavne karakteristike suvremenih industrijskih robota, daje se klasifikacija industrijskih robota i na kraju poglavlja prezentirano je 10 najvećih proizvođača industrijskih robota koji čine brend (marku) proizvodnje.

U drugom poglavlju pod naslovom *„Modeliranje industrijskih robota“* opisuje se proces modeliranja robota u obliku lanaca krutih članaka koji su povezani pokretljivim zglobovima**.** Definiraju se tipovi i kinematički parovi zglobova robota, matrica osnovnih rotacija, sprilano gibanje kao i matrica složene homogene transfromacije na primjeru troosnog planarnog robota.

U trećem poglavlju pod naslovom *„Direktna kinematika“* polazeći od definicije problema direktne kinematike određuje se matrica složene homogene transfromacije za troosni planarni robot na temlju zadanog vektora konfiguracije zglobova robota, a to znači da se određuje

položaj i orijentacija alata robota u operacijskom prostoru. Jednako tako određuje se i za SCARA robot RRTR konfiguracije i SCARA robot KR5 R350 Z200. U ovom poglavlju određuje se i kvarternion orijentacije alata te se na primjeru spomenutog SCARA robota u simulacijskom paketu ARTE određuje matrica složene homogene transformacije i kvarternion orijentacije alata za zadane kinematičke parametre.

U četvrtom poglavlju pod naslovom *„Diferencijalna kinematika“* polazeći od definicije problema diferencijalne kinematike i od definicije problema diferencijalne kinematike određuje se veza između brzine zglobova te linearne i kutne brzine vrha manipulatora (alata) pomoću *Jacobiana odnosno Jacobijeve matrice* na primjeru troosnog planarnog robota. Jednako tako polazeći od definicije statike robota određuju se zakretni momenti u zglobovima robota kada se robot nalazi u stanju ravnoteže kako bi se ostvarila zadana sila na vrhu manipulatora (alata). U tom slučaju koristi se Jacobijeva transponirana matrica.

U petom poglavlju pod naslovom *„Indirektna kinematika“* polazeći od definicije problema indirektne kinematike određuje se vektor varijabli zglobova robotskog manipulatora na temelju zadane pozicija i orijentacija vrha manipulatora (alata) u odnosu na koordinatni sustav pridružen bazi robota na primjeru troosnog planarnog robota.

U šestom poglavlju pod naslovom *„Planiranje trajektorije robota“* polazeći od činjenice da robot mora proći kroz niz prethodno definiranih točaka u operativnom prostoru koje čine putanju vrha manipulatora (alat) nužno je bilo proučiti postupke generiranja takvog kretanja koje će slijediti zadanu putanju. Analizirana su dva postupka generiranja trajektorije i to *„Od točke do točke* (engl. *point-to-point*)“ i *„Kretanje po putanji* (engl. *path motion*)“.

U sedmom poglavlju pod naslovom *„Dinamika robota“* polazeći od definicije problema dinamika robota određen je dinamički model (engl. *dinamic model*) troosnog planarnog robota pomoću Langrangeove metode. U ovom poglavlju određene su vrijednosti zakretnih momenata zglobova robota u odnosu na vremensku promjenu konfiguracije robotske ruke ako je zadan vektor konfiguracije zglobova robota, masa robotskih članaka, kutna brzina i ubrzanje u zglobovima robota, kao i trajektorija robota. Langrangeova metoda opisuje dinamičko ponašanje robota na osnovu kinetičke i potencijalne energije, a rezultirajuća jednadžba kretanja robota izražena je pomoću momenata i kutnih pomaka, i naziva se *jednadžba kretanja robota*.

U osmom poglavlju pod nazivom *„Programiranje robota pomoću simulacijskog model“* koristi se paket ARTE koji je podržan u MatLabu, a kojim se može programirati rad robota. Na primjeru robota ABB IRB140 prikazan je način aktiviranja paketa, određivanje direktne

kinematike robota ABB IRB 140 M2000 s alatom kao i način vizualizacije kretanja robot au operacijskom prosoru. Jednako tako određeni su parametri indirektne kinematike spomenutog robota, prezentirano je programiranje robota i izrada odgovarjuće *rutine* u MatLabu, određivanje točaka putanje kao i realizacija određene radnje robota kroz izradu samostalne programske rutinu.

U devetom poglavlju pod nalsovom *„Pogon robota“* definiraju se elementi pogona robota u regulacijskom krugu, a zatim se pozornost usmjerava na upravljanje i regulaciju elektromotornih pogona u robotici i to: istosmjerni motor s permanentnim magnetima i sinhroni motor s permenentnim magnetima. Posebno se obrađuje upravljanje robotskim mehanizmom obzirom na moment i brzinu, zatim upravljenje robotskim sustavom CNC tipa i završno upravljanje robotskim mehanizmom obzirom na silu dodira.

Vjerujem kako će studenti u ovom udžbeniku pronaći dovoljno korisnih i zanimljivih informacija koje će im pomoći pri studiranju i usavršavanju na Tehničkom veleučilištu u Zagrebu.

AUTOR

O autoru

Dario Matika, redoviti je naslovni profesor u trajnom izboru na Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci, profesor stručnih studija na Tehničkom veleučilištu u Zagrebu i vanjski suradnik na Hrvatskom vojnom učilištu „Dr. Franjo Tuđman“ u Zagrebu kao profesor i brigadir Hrvatske vojske u mirovini.

Područje njegovog znanstvenog i stručnog djelovanja je automatizacija postrojenja i procesa, primjena industrijske robotike i fleksibilni proizvodni sustavi. Autor je i koautor više članaka objavljenih u najviše rangiranim časopisima, te je samostalno ili koautorstvo napisao četiri udžbenika i jednu znanstvenu monografiju.

U području društvenih znanosti, znanstveno polje sigurnosne i obrambene znanosti, izabran je u znanstveno zvanje znanstvenog savjetnika u trajnom izboru i profesora stručnih studija.

Sadržaj Str.

1. UVOD U ROBOTIKU 10
1.1 Suvremeni industrijski roboti 12
1.2 Klasifikacija industrijskih robota 14
2. MODELIRANJE INDUSTRIJSKIH ROBOTA 21
2.1 Rotacije 26
2.2 Spiralno gibanje 28
2.3 Matrica složene homogene transformacije 29
3. DIREKTNA KINEMATIKA ROBOTA 32
3.1 Orijentacija alata i primjena kvarternion (quaternion)..... 36
3.2 Kinematički parametri SCARA robota 41
4. DIFERENCIJALNA KINEMATIKA ROBOTA 56
4.1 Jacobieva matrica 56
4.2 Jacobieva transponirana matrica 61
5. INDIREKTNA KINEMATIKA 65
6. PLANIRANJE TRAJEKTORIJE ROBOTA 73
6.1 Planiranje trajektorije u prostoru zglobova 74
6.2 Planiranje trajektorije u operacijskom prostoru 87
7. DINAMIKA ROBOTA 97
7.1 Langrangeova funkcija (Langragian) 99
7.2 Jednadžba kretanja robota 106
8. PROGRAMIRANJE ROBOTA PUTEM SIMULACIJSKOG MODELA 116
8.1 Direktna kinematika robota ABB IRB 140 M2000 122
8.2 Dinamika robota s alatom 133
8.3 Indirektna kinematika robota ABB IRB 140 M2000 139
8.4 **Programiranje robota 142**
8.4.1 Rutina *„parameters“* 142
8.4.2 Točke putanje robota 148
9. POGON ROBOTA 160
9.1 Elektromotorni pogoni u robotici 161
9.1.1 Istosmjerni motor s permanentnim magnetima 162
9.1.2 Sinhroni motor s permanentnim magnetima 179
9.2 Upravljanje robotskim mehanizmom obzirom na moment i brzinu 191

9.3 Upravljanje robotskim sustavom CNC tipa 218
9.4 Upravljanje robotskim mehanizmom obzirom na silu dodira 228

Popis određenih oznaka i skraćenica 267

Literatura 268

1. UVOD U ROBOTIKU

Pod pojmom *robot* najčešće se podrazumijeva *industrijski robot* i prisutni su pojmovi kao što je „robotski manipulator“ ili „robotska ruka“. Riječ *robot* (čes. *rabota* – rad) prvi je uveo češki pisac Karel Čapek u svojoj darmi R.U.R (RossUm's Universal Robots, 1920). K. Čapek opisao je robot kao: *„Stroj vješt u radu, a ponaša se slično čovjeku te ponekad ispunjava funkcije čovjeka”.* Riječ manipulator (lat. *manipulus* – šaka) upotrebljava se za strojeve koji obavljaju pomoćne radne operacije u cilju promjene položaja materijala pri obradi i montaži. Suvremeni manipulator izumio je G.C. Devol (1954. godine) i patentirao je prvi manipulator koji je postao temelj moderne robotske industrije. Georege Devol i Joe Engelberger osnovali su tvrtku Universal Animation (Unimation) , a patent je dobio naziv „Programmed Artical Transfer“ (hrv. programirani pomak artikla). Prihvaćenim patentom 1961. godine uvodi se koncept Unimation (UNIMAT roboti).

Nakon koncepta UNIMAT roboti, Harry Johnson i Veljko Milenković razvili su cilindrični robot „VERSTRAN Industrial Robot“. Roboti su instalirani u AMF[1]-ovu Fordovu tvornicu u Catonu, a ime „VERSTRAN“ dobiveno je od složenice „VERSatile TRANsfer“ (hrv. višenamjenski prijenos). Patent je bio prihvaćen 1965. godine.

General Motor instalira 1969. godine prvi robot za točkasto zavarivanje u svom montažnom postrojenju u Lordstown-u, a Norveška tvrtka Trallfa nudi na tržištu prve komercijalne robot za bojanje. Unimate roboti ulaze na Japansko tržište (ugovor s Kawasaki Heavy Industries).

Na tržištu se sve više uočavala potreba za raličitim vrstama robota koji bi služili za različite namjene kao što su: pokupi i smjesti, aplikacije lijepljenja, montažne operacije, rukovanje sa strojnim alatima, točkasto zavarivanje, rukovanje strojevima za lijevanje, obrada odljevaka, plinsko zavarivanje, elektrolučno zavarivanje, bojanje prskanjem i slično. Upravo iz prije navedenih razloga 1970. godine organiziran je prvi simpozij o robotici (The first National Symposium on Industrial Robots, Chicago, USA) .

Nedugo nakon toga 1973. godine pojavljuje se prvi robot koji ima šest elektomehaničkih pogonskih osi, naime pojavljuju se roboti familije KUKA s konceptom koji se odmiče od koncepta Unimat robots. Već sljedeće 1974. godine pojavljuje se na tržištu prvi industrijski robot koji se upravlja mikroračunalom. Razvijen od strane Richarda Hohna za Cincinnati

[1] AMF - American Machine and Foundry (američki strojevi i ljevaonice)

Milacron Corporation, a robot je nazvan Alat za Sutra (*The Tomorrow Tool*, T3). Iste godine razvijen je i prvi industrijski robot potpuno mikroprocesorski upravljan (robot IRB6 ASEA) švedsko-švicarske tvrtke ABB (IRB – industrial robots, ASEA - *Allmänna Svenska Elektriska Aktiebolaget* (engl. General Swedish Electrical Limited Company).

Tvrtka Olivetti „SIGMA“ izradila je 1975. godine jedan od prvih robota koji se koristi za montažne aplikacije (Kartezijev koordinatni robot), a koristio se u Italiji za montažne operacija s dvije ruke. Slijedilo je razdoblje izrade novih klasa industrijskih robota, a posebno je važna 1978. godine kada je razvijen robot PUMA (engl. Programmable Universal Machine for Assembly - programibilni univerzalni stroj za montažu). Izradila ga je tvrtka General Motors, a radi se o robotu za rukovanje malim djelovima na radnoj liniji koji zauzima isti prostor rukovanja kao i čovjek. Zaključilo se da je 90% svih dijelovi obrađenih tijekom montaže težine cca 2kg ili manje. U Japanu je iste godine proizveden robot SCARA (engl. *Selective Compliance Assembly Robot Arm*), dok je Njemačka proizvela robot RE15 kao prvi robot s djelovanjem u šest osi s vlastitim sustavom upravljanja.

Japan je 1979. godine razvio prvi robot na elektromotorni pogon za točkasto zavarivanje čime je otvorena nova era električki upravljivih robota koja je zamjenila prethodnu eru na hidaulični pogon. Jedan od najvažnijih doprinosa u razvoju robotike dogodio se 1981. godine kada je Takeo Kanade s Carnegise Mellon University, USA projektirao prvu direktno upravljivu robotsku ruku bez transmisije između istosmjernog motora i opterećenja. Nedugo zatim Sjedinjene Američke Države uvode 1984. godine na tržište robot AdeptOne (engl. *Adept* – vješt). To je prvi robot tipa SCARA s izravnim elektromotornim pogonom povezanim s robotskom rukom. Radi se o jednostavnom mehanizmu robota, izuzetno robusnom i s visokom preciznošću (točnošću pozicije).

Njemačka uvodi 1985. godine potpuno novo koncepcijsko rješenje industrijskih robota KUKA, naime uvodi novi Z-oblik robotske ruke čiji dizajn ignorira tradicionalni paralelogram. Postiže se potpuna fleksibilnost s tri translacijska i tri rotacijska pokreta za ukupno šest stupnjeva slobode. Nova konfiguracija učinkovito koristi proizvodni prostor.

Švicarska uvodi 1992. godine Delat robote za pakiranje, a Švedska tvrtka ABB razvila je i na tržište stavila 1998. godine robot FlexPicker na konceptu Delta robota. FlexPicker bio je najbrži robot za podizanje objekata (mogao je podići 120 objekata u minuti pri brzini od 10m/s) Koristio je tehnologiju strojnog vida (engl. *Image technology*). Iste godine Švicarska je lansirala na tržište „roboLoop“ sustav kao jedini sustav za zakrivljene - staza s pokretnim postoljem i

prijenosnim sustavom. Koncept „roboLoop" omogućuje da jedan ili više *Robo-prijevoznika* prate krivulje i cirkuliraju u zatvorenom sustavu. Otvorena je bila nova mogućnosti za automatizaciju tvornice.

Njemačka uvodi 1999. godine uvodi integriranu lasersku zraku za vođenje unutar robotske ruke. Ovom tehnologijom zamjenjuje se potreba vanjskog sklopa uređaj za vođenje. Korištenjem lasera u kombinaciji s robotom postiže se visoka dinamika i nema sudara konture.

Japan uvodi 2004. godine poboljšani sustav za upravljanje robotom (NX100), koji predviđa sinkronizaciju upravljanja četiri roboti i do 38 osi. NX100 programiranje ima zaslon osjetljiv na dodir (engl. *Touch Screen*), a temelji se na Windows CE operativnom sustavu. Iste godine Italija uvodi prvi bežični uređaj (engl. *Wireless Teach Pendant,* WiTP). Sva tradicionalna komunikacija i razmjena podataka važnih za programiranje robota može se sada provoditi bez ograničenja uzrokovanih spojnim kablom i u isto vrijeme je osigurana i ukupna sigurnost.

Njemačka je 2006. godine predstavila prvi lagani robot KUKA "Light Weight Robot". Robot je bio izrađen od aluminija, imo je nosivosti od 7 kg, a zahvaljujući integriranim senzorima, bio je vrlo osjetljiv što ga je činilo pogodnim za zadatke rukovanja i montaže. Težak je bio samo 16 kg, energetski učinkovit i prenosiv, te je mogao obavljati širok raspon različitih zadataka.

Japan je 2010. godine prvi lansirao koncept *"Learning Control Robot"* tj. robota koji sam uči upravljati sobom. Sustav LVC (*Learning Vibration Control*) omogućuio je robotu da nauči svoje karakteristične vibracija za veća ubrzanja i brzine.

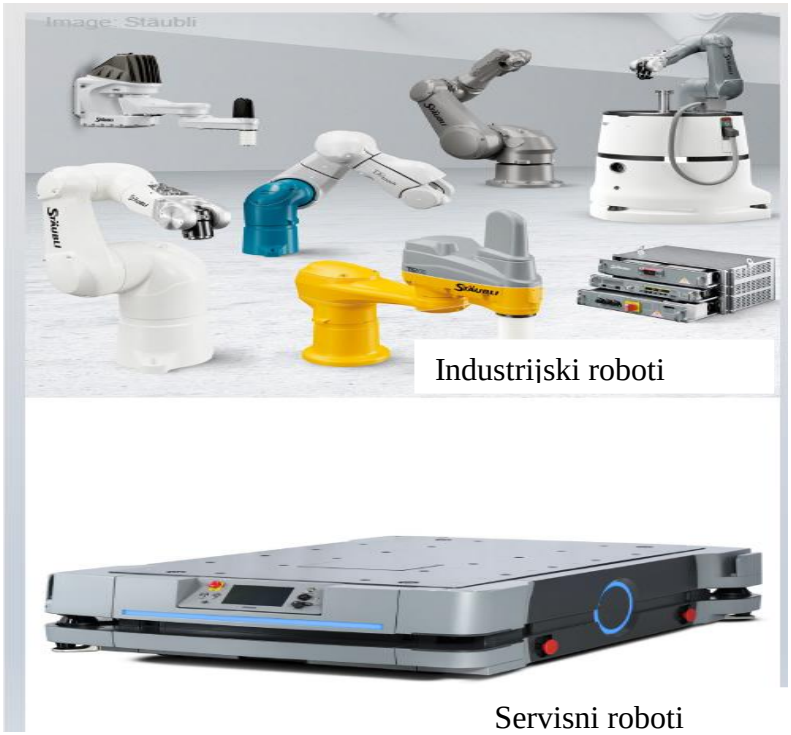
1.1 Suvremeni industrijski roboti

U godinama koje slijede pa se do danas na tržištu se pojavljuju industrijski roboti za razne aplikacije, serijski i paralelni roboti, kolaborativni industrijski roboti, servisni roboti itd. Stoga se za suvremeni industrijski robot može reći kako je to:

a) automatski upravljan, programabilan, višenamjenski manipulacijski stroj s više stupnjeva slobode gibanja koji izvodi operacije rukovanja (ugradbenim elementima, alatima itd.) i druge operacije posredstvom specijalnih uređaja ugrađenih na završnom dijelu robotske ruke, izvoditi najsloženije putanje s određenom točnošću, brzinom i orijentacijom i može doseći bilo koju točku u radnome prostoru,
b) upravljan je procesnim računalom, koje obrađuje složene kinematičke i dinamičke proračune gibanja pojedinih članaka, i sinkrono kretanje mora osigurati zadano gibanje vrha robotske ruke,

c) može se modelirati u obliku lanaca krutih *članaka* koji su povezani pokretljivim *zglobovima***.**

Suvremeni roboti danas se klasificiraju u dvije temeljne skupine: industrijski roboti i servisni roboti, kako prikazuje slika 1.1



Sl. 1.1 – Klasifikacija suvremenih robota (Izvor: IFR[2])

No jednako tako treba naglasiti kako postaje sve nejasnija razlika između industrijskih i uslužnih robota. Jer ovisno o svojoj primjeni:

- ✓ ista jedinica može biti uslužni robot ili industrijski robot,
- ✓ koncepti korištenja se mijenjaju i pojavljuju se nove aplikacije,
- ✓ sve je više poslovnih procese u kojim bi se optimalno moglo iskoristiti kolaborativne roboti, umjetnu inteligenciju i tehnologiju strojnog učenja
- ✓ novi senzori omogućuju robotima da osjete i reagiraju na svojem okruženje, a na taj način više podržavaju ljude kako na poslu, tako i u privatnom životu.

Zajedničko je svojstvo suvremenih robota da su automatski upravljani, programabilni, višenamjenski, sa 3 i više osi, za upotrebu u industrijskim automatskim primjenama i zasnovani na pet različitih kinematičkih tipova koji su opremljeni s različitim aplikacijama.

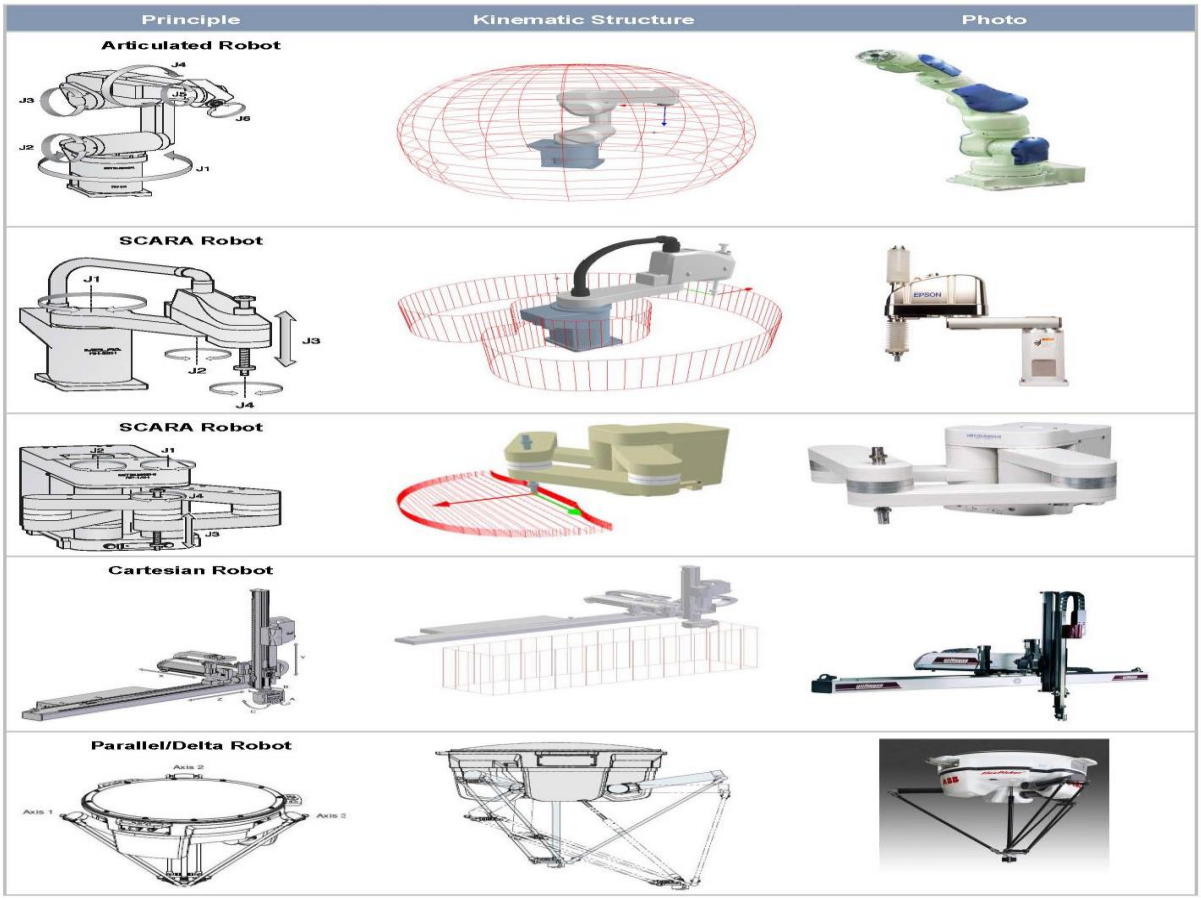
[2] IFR – International Federation of Robotics

1.2 Klasifikacija industrijskih robota

Kako je prethodno naglašeno, roboti se djele u pet kinematičkih tipova i to:

- Zglobni robot (engl. *articulated robot*) – to je robot koji ima najmanje tri rotacijska zgloba,
- Kartezijev (linearni / portalni) robot (engl. *cartesian linear/gantry robot*) – to je robot koji ima tri prizmatična zgloba, a čije su osi povezane s kartezijanskim koordinatnim sustavom,
- Cilindrični robot (engl. *cylindrical robot***)** – to je robot čije osi čine cilindrični koordinatni sustav,
- Pralelni/Delat robot (engl. *Parallel/Delta robot*) – to je robot koji istodobno ima prizmatične ili rotacijske zglobove
- SCARA robot – to je robot koji ima dva paralelna rotacijska zgloba za osiguravanje usklađenosti u ravnini

Na slici 1.2 prikazane su najčešće korišteni kinematički tipovi robota.



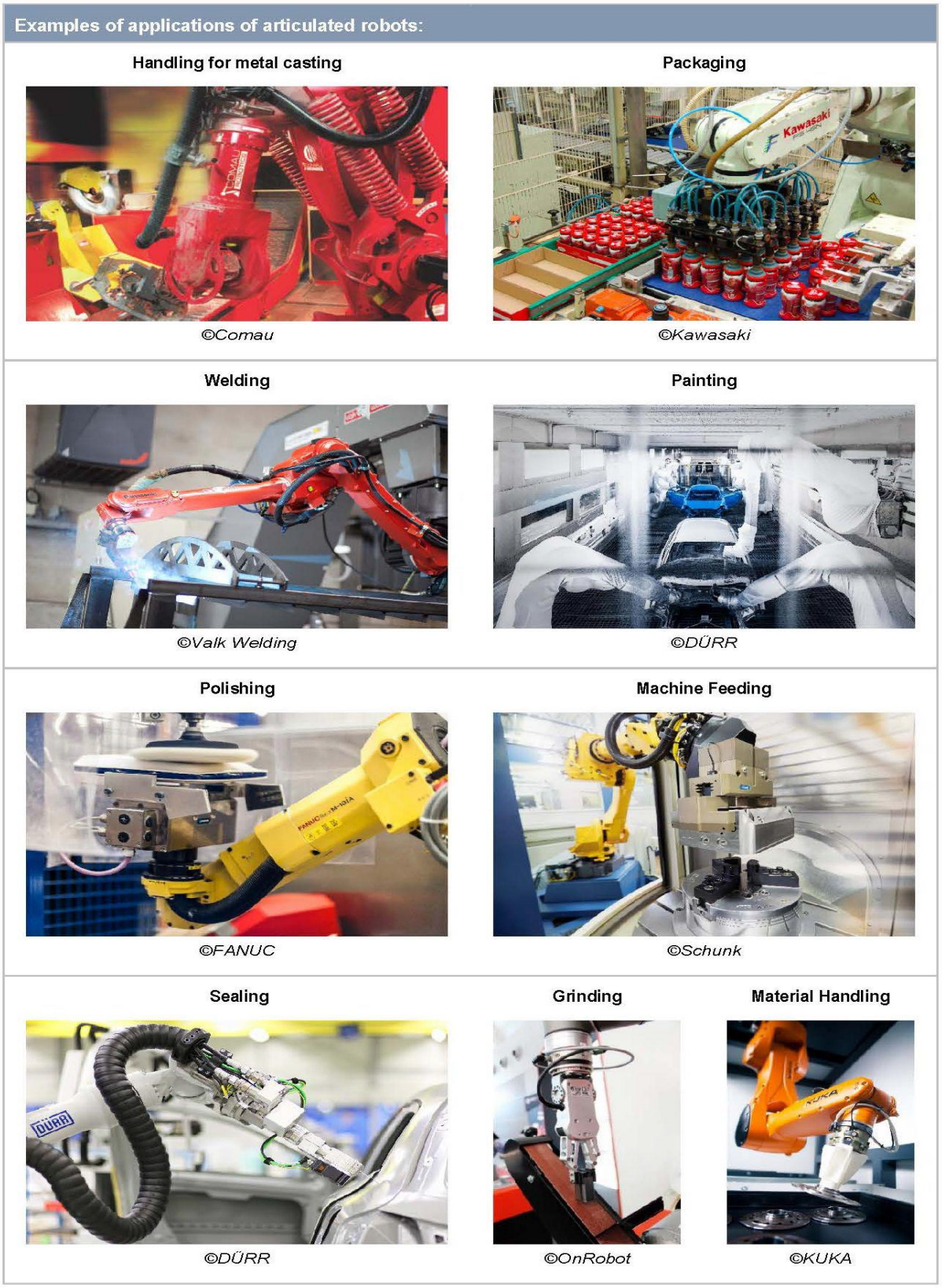
Sl. 1.2 Kinematički tipovi (strukture) industrijskih robota najčešće korištenih u praski (ibidem)

Na slici 1.3 prikazani su primjeri artikuliranih robota različitih proizvođača.



Sl. 1.3 – Artikulirani roboti različitih proizvođača (ibidem)

Na slici 1.4 prikazani su primjeri artikuliranih robota različitih proizvođača u neposrednoj primjeni.



Sl. 1.4 – Artikulirani roboti u neposrednoj primjeni (ibidem)

Na slici 1.5 prikazani su SCARA roboti različitih proizvođača.



Sl. 1.5 - SCARA roboti različitih proizvođača (ibidem)

Na slici 1.6 prikazani su kartezijevi (linearni / portalni) roboti različitih proizvođača.

Examples of linear/Cartesian/gantry robots:

Linear robot



©Wittmann

Gantry robot



©GÜDEL

Examples of applications of cartesian robots:

Material Handling



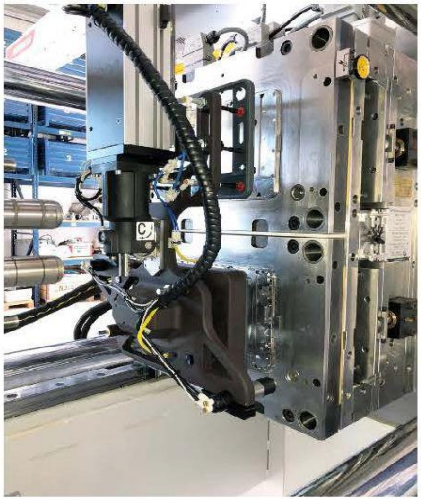
©GÜDEL

Material Handling



©GÜDEL

Machine feeding



©Wittmann

Handling for plastic moulding



©Wittmann

Sl. 1.6 - Kartezijevi (linearni / portalni) roboti različitih proizvođača (ibidem)

Na slici 1.7 prikazani su paralelni/delata roboti različitih proizvođača.



Sl. 1.7 - Paralelni/delata roboti različitih proizvođača (ibidem)

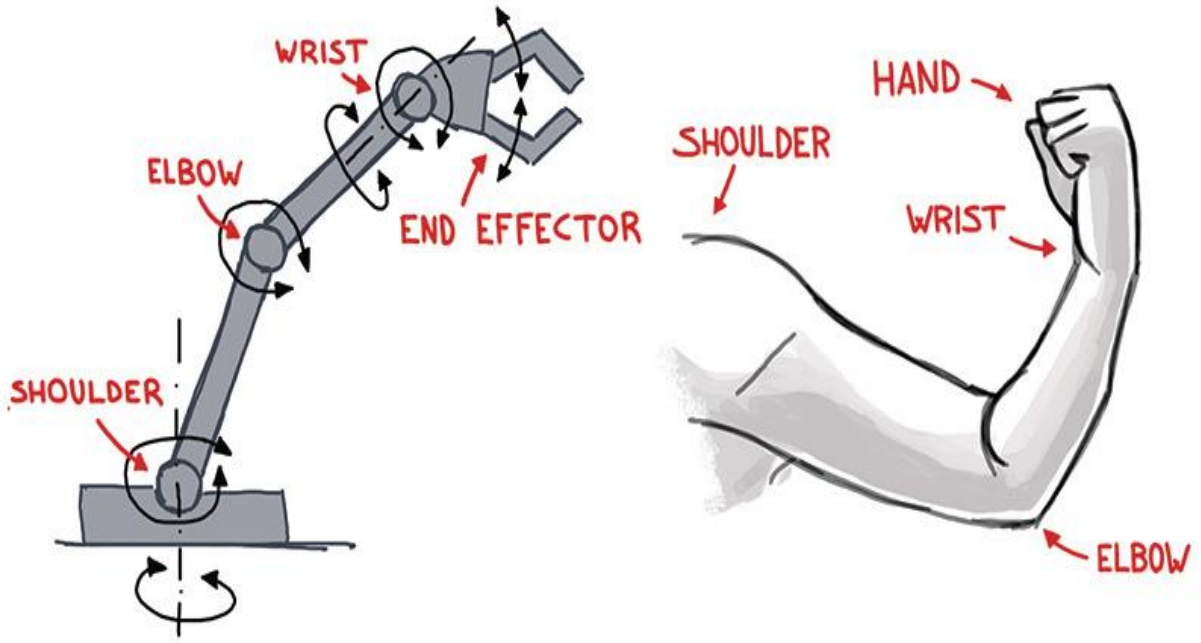
Na slici 1.8 prikazano je 10 najvećih proizvođača industrijskih robota koji čine brend (marku) proizvodnje.



Sl. 1.8 – Najprestižnije kompanije u proizvodnji industrijskih robota (ibidem)

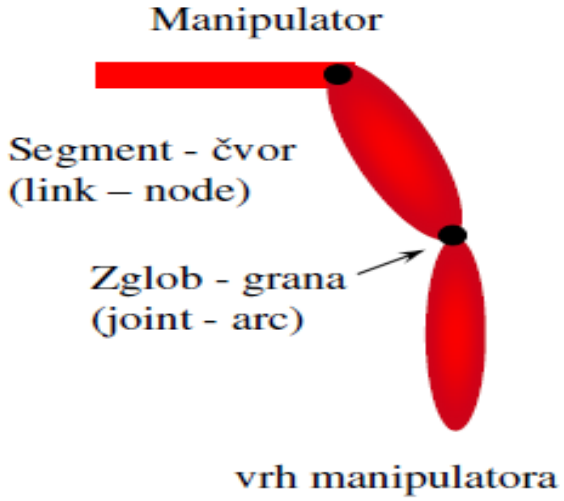
2. MODELIRANJE INDUSTRIJSKIH ROBOTA

Industrijski robot mogu se modelirati u obliku lanaca krutih *članaka* koji su povezani pokretljivim *zglobovima***.** Na slici 1.9 prikazana je načelna usporedna shema troosnog robota sa ljudskom rukom.



Sl. 1.9 - Načelna usporedna shema troosnog robota sa ljudskom rukom[3]

Dakle robotska ruka (manipulator) sastoji se od sljedećih osnovnih djelova kako je prikazano na slici 1.10.



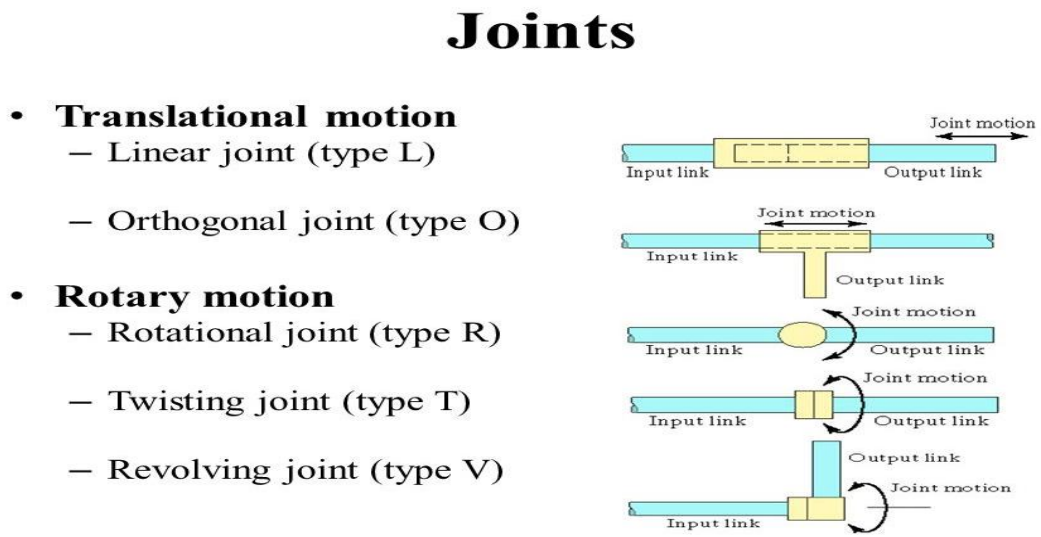
Manipulator

- **zglob** – ne uzimamo dimenziju u obzir
- **segment** – kruti element (članak)
- niz segmenata zglobovima povezanih u lanac
- ponekad se zglob i segment promatraju kao cjelina, odnosno jedan zglobni element

Sl. 1.10 – Osnovni sastavni elementi manipulatora (Kovačić Z,. FER)

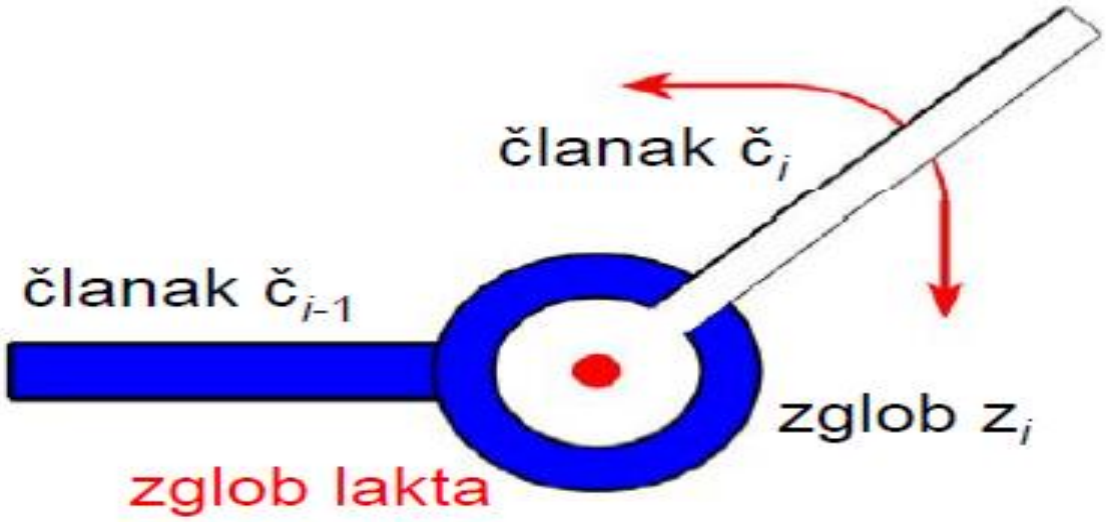
[3] https://www.evsint.com/industrial-robot-arms-in-factories/

Razlikujemo dva osnovna tipa gibanja zglobova robota, a to je translacijsko gibanje (engl. *Translation motion*) i rotacijsko gibanje (engl. *Rotary motion*). U skladu s prije spomenutim tipovima gibanja robotskih zglobova, definira se pet tipova robotskih zglobova (engl. *Joints*), kako je prikazano na slici 1.11.



Sl. 1.11 – Tipovi robotskih zglobova (Edwin Portugez)[4]

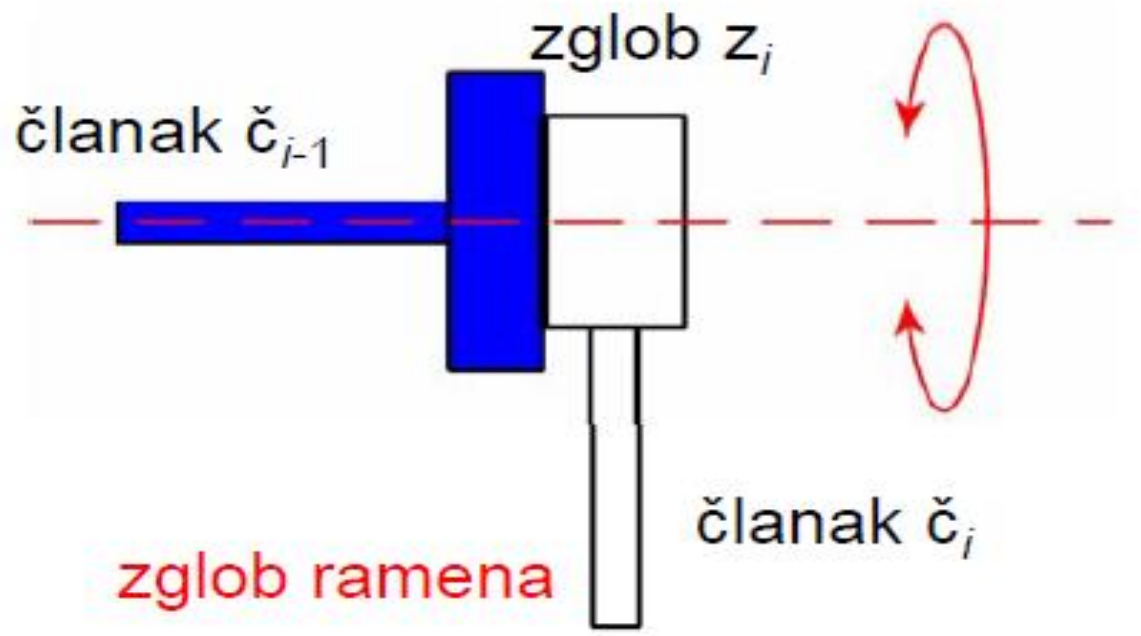
U smislu definiranja kinematike robota, najčešće se u obzir uzimaju sljedeći zglobovi prikazani na slikama 1.12 a),b),c) i d). Na slici 1.12 a) prikazan je rotacijski zglob lakta koji je okomit na članak.



Sl. 12 a) – Rotacijski zglob lakta (Kovačić Z,. FER)

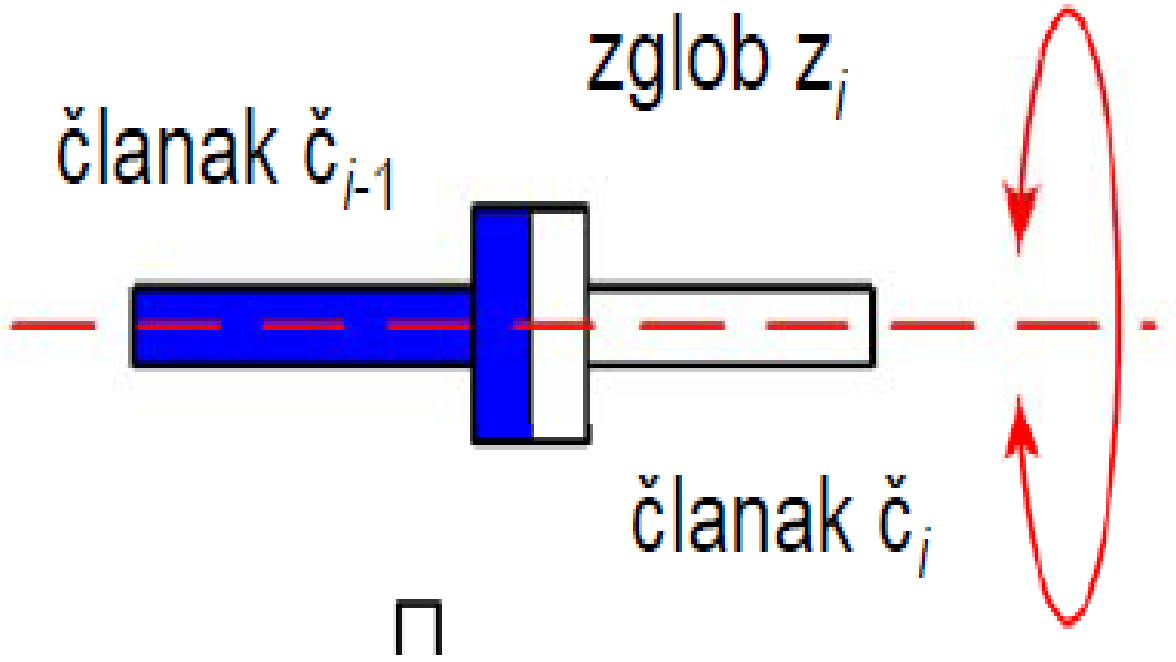
[4] https://slideplayer.es/user/15969510/

Na slici 1.12 b) prikazan je revolucijski zglob ramena u smjeru osi članka $č_{i-1}$, a koji je okomit na članak $č_i$.



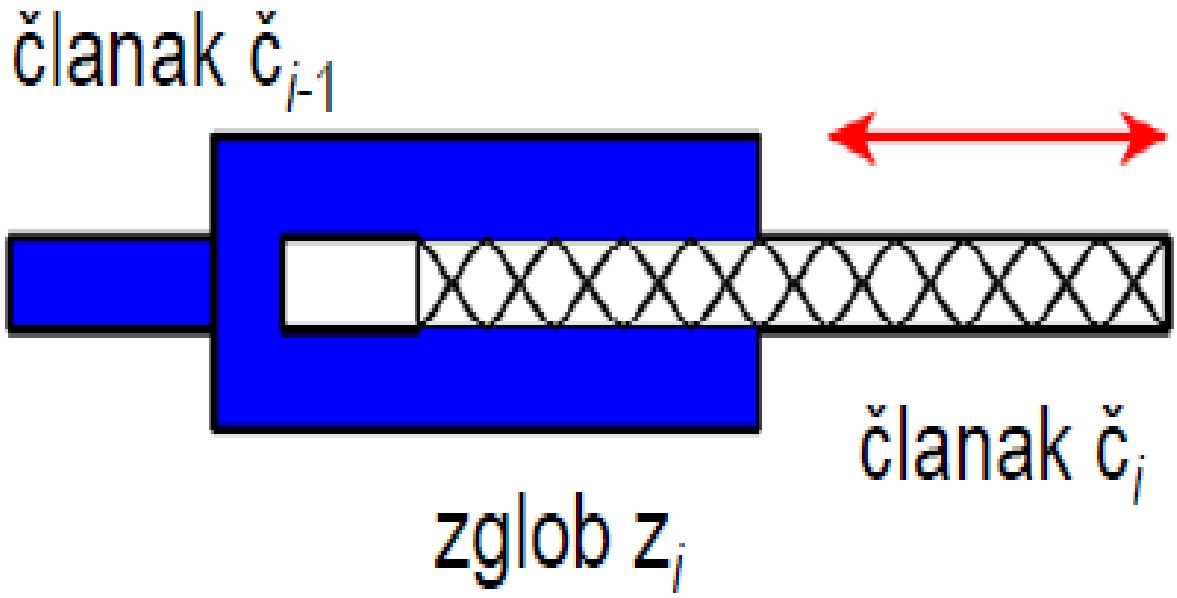
Sl. 1.12 b) - Revolucijski zglob ramena (ibidem)

Na slici 1.12 c) prikazan je torzijski zglob čija je os rotacije paralelna s osima članaka $č_{i-1}$ i $č_i$.



Sl. 1.12 c) - Torzijski zglob (ibidem)

Na slici 1.12 d) prikazan je translacijski zglob u smjeru osi članka $č_{i-1}$



Sl. 1.12 d) – Translacijski zglob (ibidem)

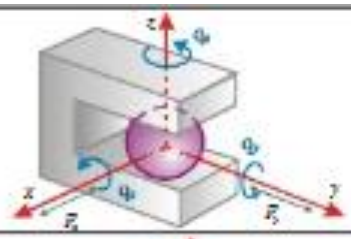
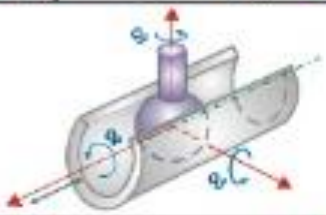
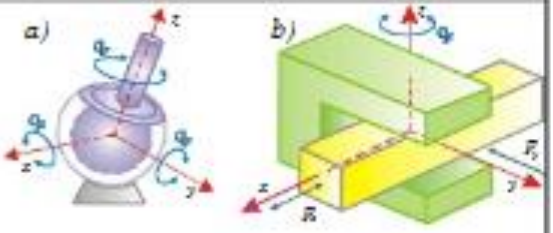
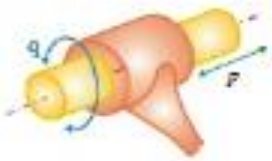
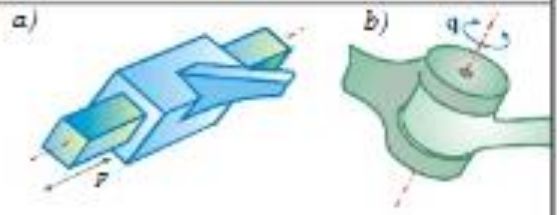
Na slici 1.13 prikazani su različiti primjeri zglobiva industrijskog robota



Sl. 1.13 – Tipovi zglobova industrijskog robota[5]

[5] https://ojs.library.queensu.ca/index.php/PCEEA/article/view/3866

Na slici 1.14 prikazane su klase kinematičkih parova s brojem stupnjeva slobode gibanja u rotaciji i translaciji.

I klasa	*f=5* *3 rotacije + 2 translacije*	
II klasa	*f=4* *3 rotacije + 1 translacije*	
III klasa	*f=3* *a)* *3 rotacije + 0 translacija* *b)* *1 rotacija + 2 translacije*	
IV klasa	*f=2* *1 rotacija + 1 translacija*	
V klasa	*f=1* *a)* *0 rotacija + 1 translacija* *b)* *1 rotacija + 0 translacija*	

Sl. 1.14 – Kinematički parovi zglobova robota[6]

Prema prije navedenome razvidno je kako se robotski manipulator (industrijski robot) može modelirati kao lanac krutih tijela – članaka koji su međusobno povezani zglobovima. Baza robota je nepomična i nalazi se na početku lanca, a završni mehanizam ili alat nalazi se na kraju lanca.

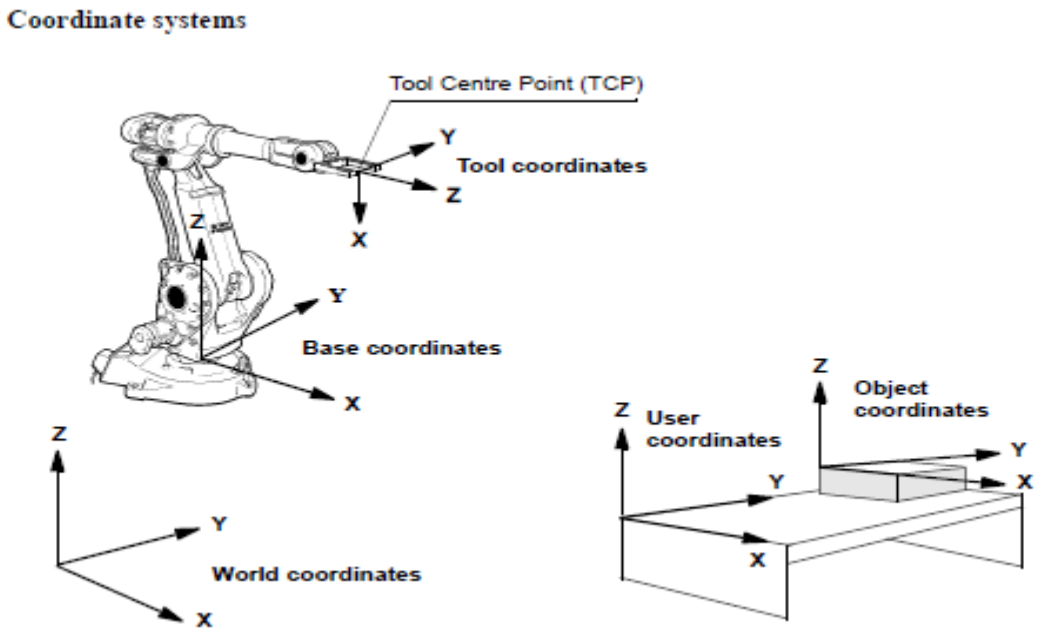
[6] https://slidetodoc.com/presentation_image_h/327067c9c21177d1f8628df130df989b/image-6.jpg

Robot se kreće u trodimenzionalnom prostoru na temelju rotacije i translacije koja se ostvaruje kroz zglobove robota. Stoga je u pogledu modeliranja gibanja robota u trodimenzionalnom prostoru, a kako bi se moglo upravljati položajem i orijentacijom alata robota kao izvršnog mehanizma, nužno matematički opisati *spiralno gibanje robota* koje se ostvaruje kao kombinacija linearnog pomaka po osi s kutnim pomakom oko iste osi. Takvo gibanje najčešći je način gibanja robotskog mehanizma.

Kako bi se moglo odrediti spiralno gibanje robota kao i transfromacija spiralnog gibanja u vektorskom koordinatnom sustavu, nužno je definirati osnovne rotacije i složene rotacije u Kartezijevom koordinatnom sustavu.

2.1 Rotacije

Na slici 1.15 prikazan je Kartezijev koordinatni sustav u kojem je definirana orijenatcija robota u prostoru.



Sl. 1.15 – Kartezijev koordinatni sustav orijentacije robota u prostoru

Sa slike 1.15 jasno se uočava kako je os z baznog koordinatnog sustava zadana u smjeru rotacije robota u bazi, dok se oz z alata proteže u smjeru alata. Koordinatni sustav stola i objekta identičan je koordinatnom sustavu baze. Rotacija se može ostvariti u načelu u tri ose $x, y\ i\ z$. Kada se rotacija ostvaruje putem osi x , tada se kut rotacije označava sa φ i vrijedi slijedeća *matrica prve osnovne rotacije* $\boldsymbol{R_1}(\varphi)$:

$$\boldsymbol{R_1}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C & -S \\ 0 & S & C \end{bmatrix}$$

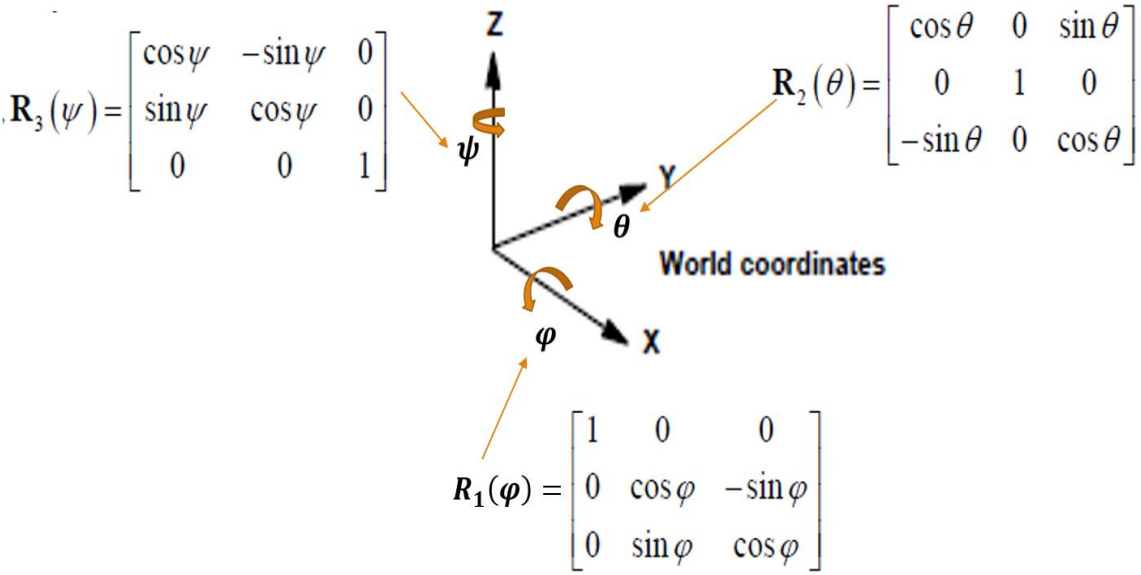
Kada se rotacija ostvaruje putem osi y , tada se kut rotacije označava sa θ i vrijedi slijedeća *matrica druge osnovne rotacije* $\boldsymbol{R_2}(\theta)$:

$$\boldsymbol{R_2}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 & S \\ 0 & 1 & 0 \\ -S & 0 & C \end{bmatrix}$$

Kada se rotacija ostvaruje putem osi z , tada se kut rotacije označava sa ψ i vrijedi slijedeća *matrica treće osnovne rotacije* $\boldsymbol{R_3}(\psi)$:

$$\boldsymbol{R_3}(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & -S & 0 \\ S & C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Na slici 1.16 prikazane su osnovne rotacije po osima koordinatnog sustava



Sl. 1.16 – Osnovne rotacije po osima koordinatnog sustava

Složena rotacije predstavljala bi umnožak prethodno opisanih osnovnih rotacija i vrijedi sljedeća jednadžba:

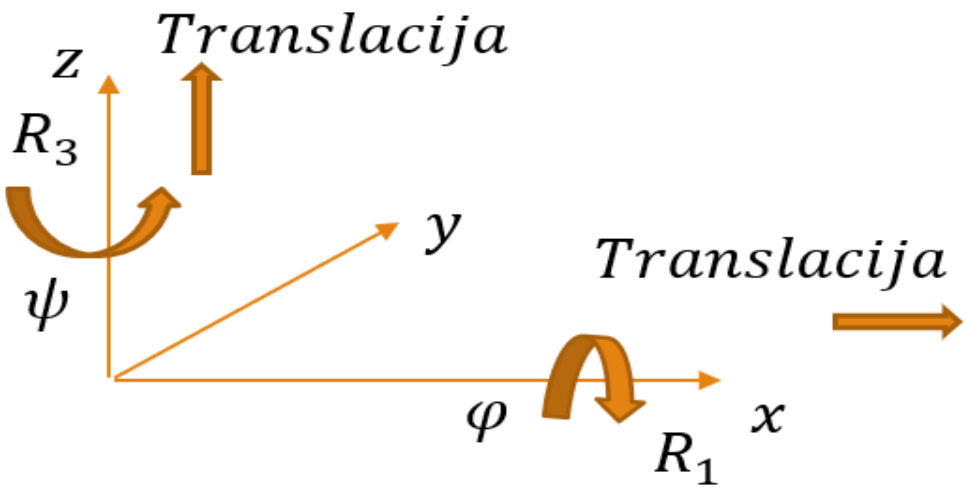
$$\boldsymbol{Rot}(\varphi, \theta, \psi) = \boldsymbol{R_1}(\varphi) \cdot \boldsymbol{R_2}(\theta) \cdot \boldsymbol{R_3}(\psi)$$

Ako slovom **F** definiramo fiksni (nepokretni) koordinatni sustav, a sa **M** mobilni (pokretni) koordinatni sustav, tada *matrica složene rotacije* $\boldsymbol{Rot}(\varphi, \theta, \psi)$ transformira koordinate točke $[p]^M$ pokretnog sustava u koordinate točke $[p]^F$ fiksnog koordinatnog sustava. Matrica koja

transformira koordinate pokrenog koordinatnog sustava u koordinate (npr. koordinate alata) u koordinate nepokretnog koordinatnog sustava (npr. koordinate baze) naziva se *matrica transfromacije koordinata.*

2.2 Spiralno gibanje

Spiralno gibanje robota ostvaruje kao kombinacija linearnog pomaka po osi s kutnim pomakom oko iste osi. Takvo gibanje satoji se od rotacije i translacije, kako pokazuje slika 1.17.



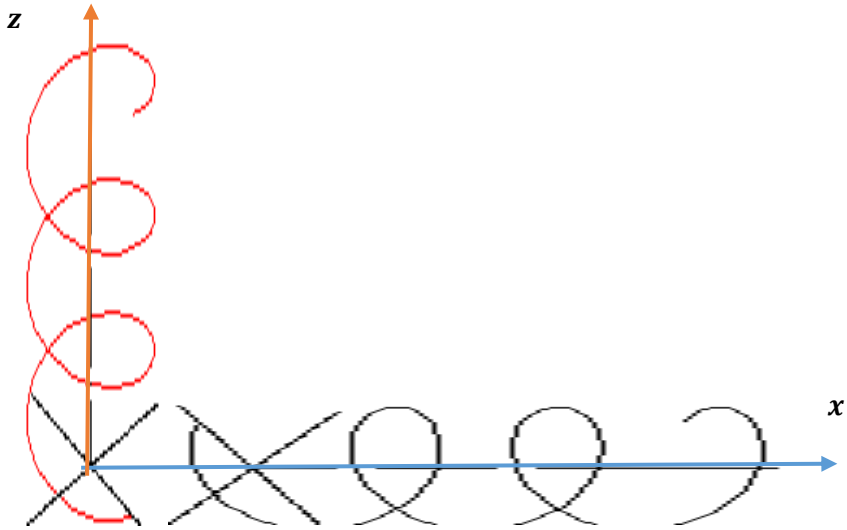
Sl. 1.17 – Spiralno gibanje robota

Matematički se takvo gibanje može zapisati na sljedeći način:

$$\boldsymbol{Spir}(\varphi, x) = \boldsymbol{Rot}(\varphi) \cdot \boldsymbol{Trans}(x)$$

$$\boldsymbol{Spir}(\psi, z) = \boldsymbol{Rot}(\psi) \cdot \boldsymbol{Trans}(z)$$

Na slici 1.18 shematski je prikazano spiralno gibanje po osima x i z.



1.18 – Spiralno gibanje po osima x i z.

Na temelju definicije spiralnog gibanja robota, pristupt će se određivanju *matrice složene homogene transfornacije* **T.**

2.3 Matrica složene homogene transformacije

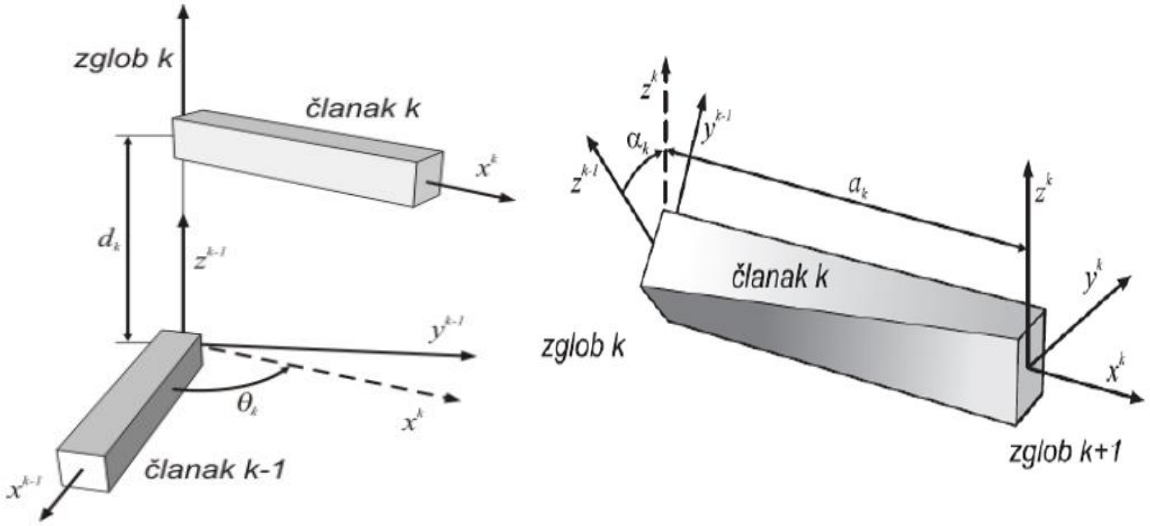
Matrica složene homogene transformacije $\boldsymbol{T}$ povezuje pokretne koordinatne sustave zglobova robota s bazom. Kako se u zadnjem zglobu robota nalazi alat, tada se matrica složene homogene transformacije može zapisati na sljedeći način:

$$\boldsymbol{T}_{baza}^{alat}(q) = \prod_{k=1}^{n} \boldsymbol{T}_{k-1}^{k}(q_k)$$

gdje je:

q_k - vektor konfiguracije zglobova robota

U pogledu definiranja vektora konfiguracije zglobova robota primjenit će se opće varijable kako je prikazano na slici 1.19.



Sl. 1.19 – Opće varijable vektora konfiguracije zglobova q (Kovačić Z,. FER)

Vektor konfiguracije k-tog zgloba robota definira se na sljedeći način:

$$q_k = q(\theta_k, d_k, \alpha_k, a_k)$$

gdje je:

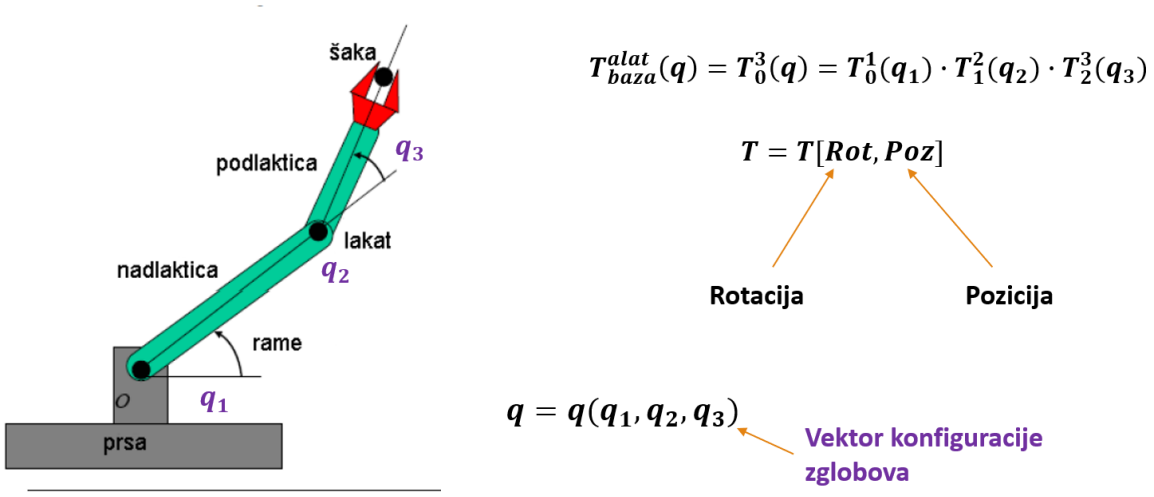
θ_k – kut rotacije k-tog zgloba oko osi z

d_k – širina (debljina) zgloba

α_k - kut rotacije k-tog zgloba oko osi x

a_k – dužina k-tog članka

Na temelju prije definirane matrice složene homogene transformacije $\boldsymbol{T}$ i vektora konfiguracije zglobova robota $\boldsymbol{q}$ u nastavku će se odrediti jednadžba manipulatora na temelju Denavit – Hartenbegove metode. Ista će se primjeniti na troosnom planarnom robotu kako je prikazano na slici 1.20.

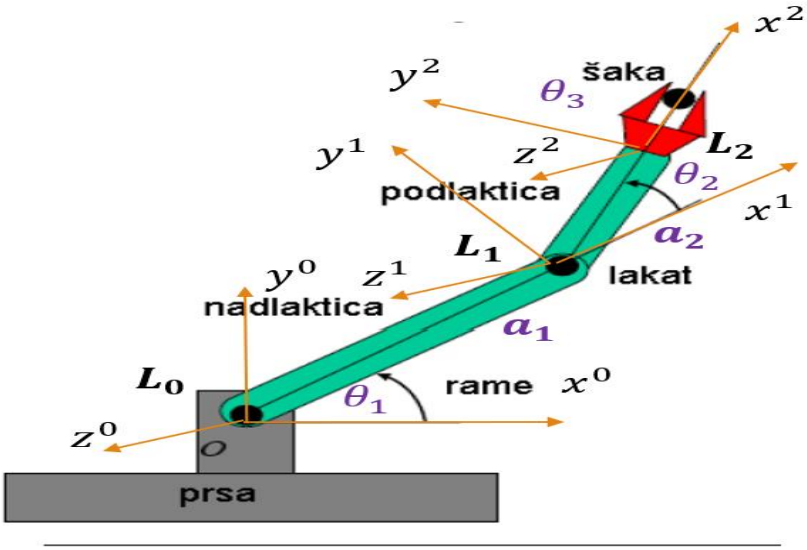


Sl. 1.20 - Troosni planarni robot (ibidem)

Iz slike 1.20 uočavaju se tri moguće konfiguracije zglobova robota koje su označene od q_1 do q_3 što znači kako će se matricu složene homogene transformacije $\boldsymbol{T}$ činiti umnožak pojedine matrice svakog zgloba:

$$\boldsymbol{T}^{alat}_{baza}(q) = \boldsymbol{T}^3_0(q) = \boldsymbol{T}^1_0(q_1) \cdot \boldsymbol{T}^2_1(q_2) \cdot \boldsymbol{T}^3_2(q_3)$$

Kako bi se odredilo rješenje matrice $\boldsymbol{T}$ potrebno je sukladno Denavit – Hartenbegovoj metodi pridružiti svakom zglobu pojedinačni koordinatni sustav kako je prikazano na slici 1.21.



Sl. 1.21 - Troosni planarni robot s pridruženim koordinatnim sustavima (ibidem)

Na temelju prije prikazanoga može se napisati da je:

$$\boldsymbol{T}_{baza}^{alat}(q) = \prod_{k=1}^{n} \boldsymbol{T}_{k-1}^{k}(q_k) = \prod_{k=1}^{n} [Spir(\theta_k, d_k, z) \cdot Spir(a_k, \alpha_k, x)]$$

gdje je:

n – broj zglobova robota

Prema tome, robotska ruka može se modelirati kao lanac članaka međusobno povezanih rotacijskim ili translacijskim zglobovima. Za opis robota potrebno je pridružiti koordinatni sustav svakom članku ruke i tada se može odrediti jednadžba robotske ruke koja opisuje kinematičko kretanje članaka manipulatora.

Članci i zglobovi robota, kao pokazuje slika 1.21, označavaju se tako što se bazi pridružuje broj 0, a završnom mehanizmu (alatu) broj n. To znači da kod robota s n osi imamo $n + 1$ povezanih članaka pomoću n zglobova pri čemu je k -ati zglob povezuje članak $k - 1$ s člankom k.

Kineamatički parovi određeni su vektorom konfiguracije zgloba q_k stoga se kinematička konfiguracije $n-$ osnog robota može opisati s namnaje $4xn$ kinematičkih parametara $\theta_k, d_k, \alpha_k \, i \, a_k$, s tim da su za svaku os rotacije zgloba robota tri kinematička paramera konstantna i ovise o konstrukciji robota, dok je četvrti parametar varijabla zgloba.

U slučaju kada se robot sastoji od rotacijskih zglobova, kakav je i primjer na slici 1.21, tada je varijabla zgloba robota θ_k, dok su ostali parametri $d_k, \alpha_k \, i \, a_k$ konstante. U slučaju translacijskog zgloba varijabla zgloba robota je d_k, dok su ostali parametri konstante.

Prema tome jednadžba robotskog manipulatora ili ruke može se odrediti na temelju složene homogene transformacije $\boldsymbol{T}_{baza}^{alat}(\boldsymbol{q})$ koja se satoji od matrice $\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{q})$ dimenzije 3x3 i vektora položaja alata $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{q})$ dimenzija 3x1, tako da vrijedi:

$$\boldsymbol{T}_{baza}^{alat}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{q}) & \boldsymbol{p}(\boldsymbol{q}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gdje je:

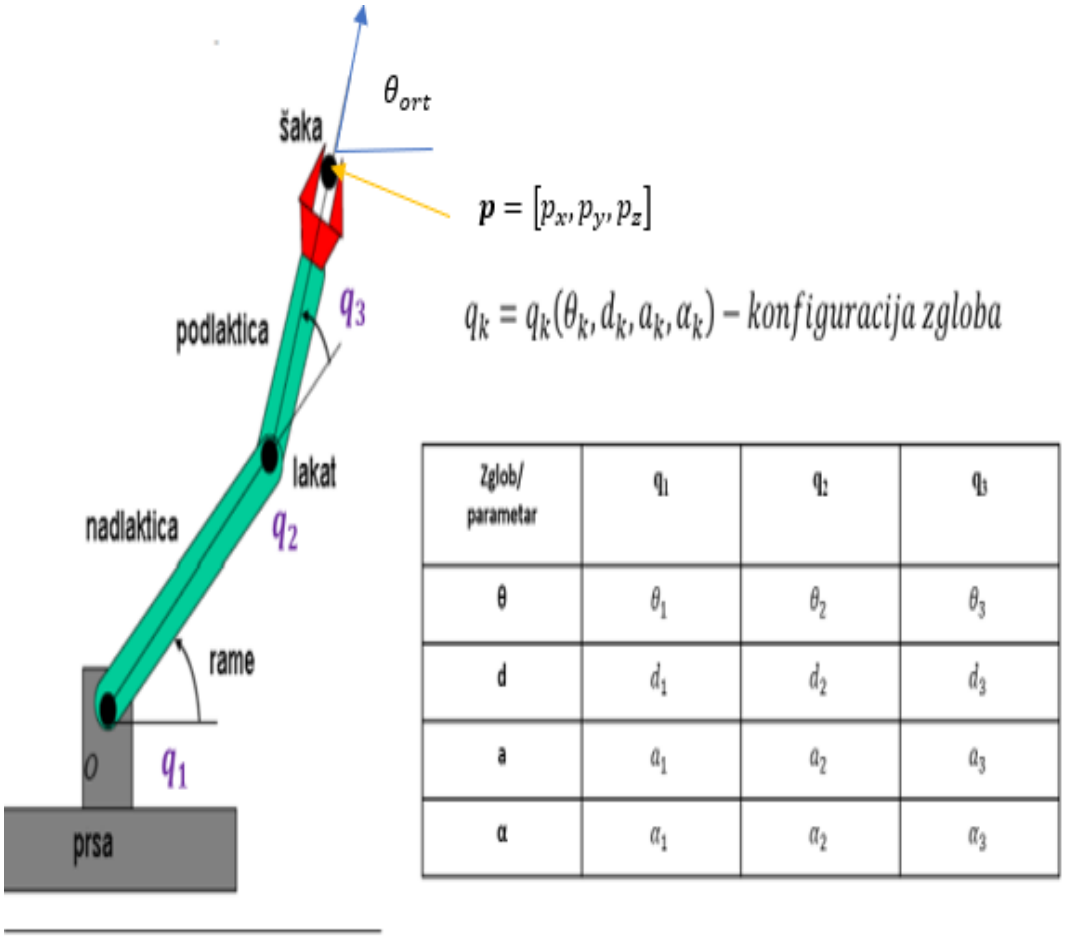
$$\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{R_3}(\boldsymbol{q}) \cdot \boldsymbol{R_1}(\boldsymbol{q})$$

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

Na ovaj način dolazimo do problema *direktne kinematike* koji će se obraditi u sljedećoj točki ovog udžbenika.

3. DIREKTNA KINEMATIKA ROBOTA

Definicija problema direktne kinematike glasi:"*Ako je zadan vektor konfiguracije zglobova robotskog manipulatora* $q_k = q(\theta_k, d_k, \alpha_k, a_k)$, *kako odrediti poziciju* ***Poz*** *i orijentaciju* θ_{ort} *vrha manipulatora (alata) u odnosu na koordinatni sustav pridružen bazi robota"*. Shematski je problem direktni kinematike prikazan na slici 1.22.



Zglob/ parametar	q_1	q_2	q_3
θ	θ_1	θ_2	θ_3
d	d_1	d_2	d_3
a	a_1	a_2	a_3
α	α_1	α_2	α_3

Sl. 1.22 Problem direktne kinematike (ibidem)

Neka su zadani sljedeći kinematički parametri prikazani u Tablici 1.1.

Tablica 1.1 – Zadani kinematički parametri

Zglob/ parametar	q_1	q_2	q_3
θ	45°	-15°	20°
d	0	0	-10
a	20	10	0
α	0	0	0

Potrebno je odrediti matricu složene homogene transfromacije

$$\boldsymbol{T}_{baza}^{alat}(q) = \boldsymbol{T}_0^3(q) = \boldsymbol{T}_0^1(q_1) \cdot \boldsymbol{T}_1^2(q_2) \cdot \boldsymbol{T}_2^3(q_3)$$

na temelju podataka iz Tabalice 1.1.

Slijedom navednog vrijedi za *prvi zglob*:

$$\boldsymbol{T}_0^1(q_1) = [\boldsymbol{R}(q_1), \boldsymbol{p}(q_1)]$$

Gdje je:

$$\boldsymbol{R}(q_1) = Spir(\theta_1, d_1, z) = \begin{bmatrix} cos\theta_1 & -sin\theta_1 & 0 \\ sin\theta_1 & cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{p}(q_1) = \begin{bmatrix} p_{x_1} \\ p_{y_1} \\ p_{z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cdot cos\theta_1 \\ a_1 \cdot sin\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cdot C_1 \\ a_1 \cdot S_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Prema tome vrijedi:

$$\boldsymbol{T}_0^1(q_1) = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & a_1 \cdot C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & a_1 \cdot S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Za *drugi zglob* vrijedi:

$$\boldsymbol{T}_1^2(q_2) = [\boldsymbol{R}(q_2), \boldsymbol{p}(q_2)]$$

Gdje je:

$$\boldsymbol{R}(q_2) = Spir(\theta_2, d_2, z) = \begin{bmatrix} cos\theta_2 & -sin\theta_2 & 0 \\ sin\theta_2 & cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 \\ S_2 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{p}(q_2) = \begin{bmatrix} p_{x_2} \\ p_{y_2} \\ p_{z_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 \cdot cos(\theta_1 + \theta_2) \\ a_2 \cdot sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 \cdot C_{12} \\ a_2 \cdot S_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Prema tome vrijedi:

$$\boldsymbol{T}_1^2(q_2) = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2 \cdot C_{12} \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2 \cdot S_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Za *treći zglob* vrijedi:

$$\boldsymbol{T}_2^3(q_3) = [\boldsymbol{R}(q_3), \boldsymbol{p}(q_3)]$$

$$\boldsymbol{R}(q_3) = Spir(\theta_3, d_3, z) = \begin{bmatrix} cos\theta_3 & -sin\theta_3 & 0 \\ sin\theta_3 & cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 \\ S_3 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{p}(q_3) = \begin{bmatrix} p_{x_3} \\ p_{y_3} \\ p_{z_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Prema tome vrijedi:

$$\boldsymbol{T}_2^3(q_2) = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & 0 \\ S_3 & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \end{bmatrix}$$

Ukupno sada vrijedi:

$$\boldsymbol{T}_{baza}^{alat}(q) = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & a_1 \cdot C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & a_1 \cdot S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2 \cdot C_{12} \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2 \cdot S_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & 0 \\ S_3 & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \end{bmatrix}$$

Odnosno:

$$T_{baza}^{alat}(q) = \begin{bmatrix} C_{123} & -S_{123} & 0 & a_1 \cdot C_1 + a_2 \cdot C_{12} \\ S_{123} & C_{123} & 0 & a_1 \cdot S_1 + a_2 \cdot S_{12} \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \end{bmatrix}$$

Gdje je:

$$C_{123} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$S_{123} = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$C_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$S_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

Pozicija alata bila bi:

$$\boldsymbol{Poz} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cdot cos\theta_1 + a_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ a_1 \cdot sin\theta_1 + a_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cdot C_1 + a_2 \cdot C_{12} \\ a_1 \cdot S_1 + a_2 \cdot S_{12} \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Orijentacija alata bila bi:

$$\theta_{ort} = \theta_{123} = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$

Uvršatavanjem zadanih vrijednosti iz Tablice 1.1 dobija se:

$$\theta_{123} = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 45^\circ - 15^\circ + 20^\circ = 50^\circ$$

$$C_{123} = \cos\theta_{123} = \cos 50^\circ = 0{,}766$$

$$S_{123} = \sin\theta_{123} = \sin 50^\circ = 0{,}642$$

$$p_x = a_1 \cdot \cos\theta_1 + a_2 \cdot \cos\theta_{12} = 20 \cdot \cos 45^\circ + 10 \cdot \cos(45^\circ - 15^\circ) = 22{,}8$$

$$p_y = a_1 \cdot \sin\theta_1 + a_2 \cdot \sin\theta_{12} = 20 \cdot \sin 45^\circ + 10 \cdot \sin(45^\circ - 15^\circ) = 19{,}14$$

$$p_z = d_3 = -10$$

Matrica složene homogene transfromacije iznosi:

$$T_{baza}^{alat} = \begin{bmatrix} 0{,}642 & -0{,}766 & 0 & 22{,}8 \\ 0{,}766 & 0{,}6428 & 0 & 19{,}14 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \end{bmatrix}$$

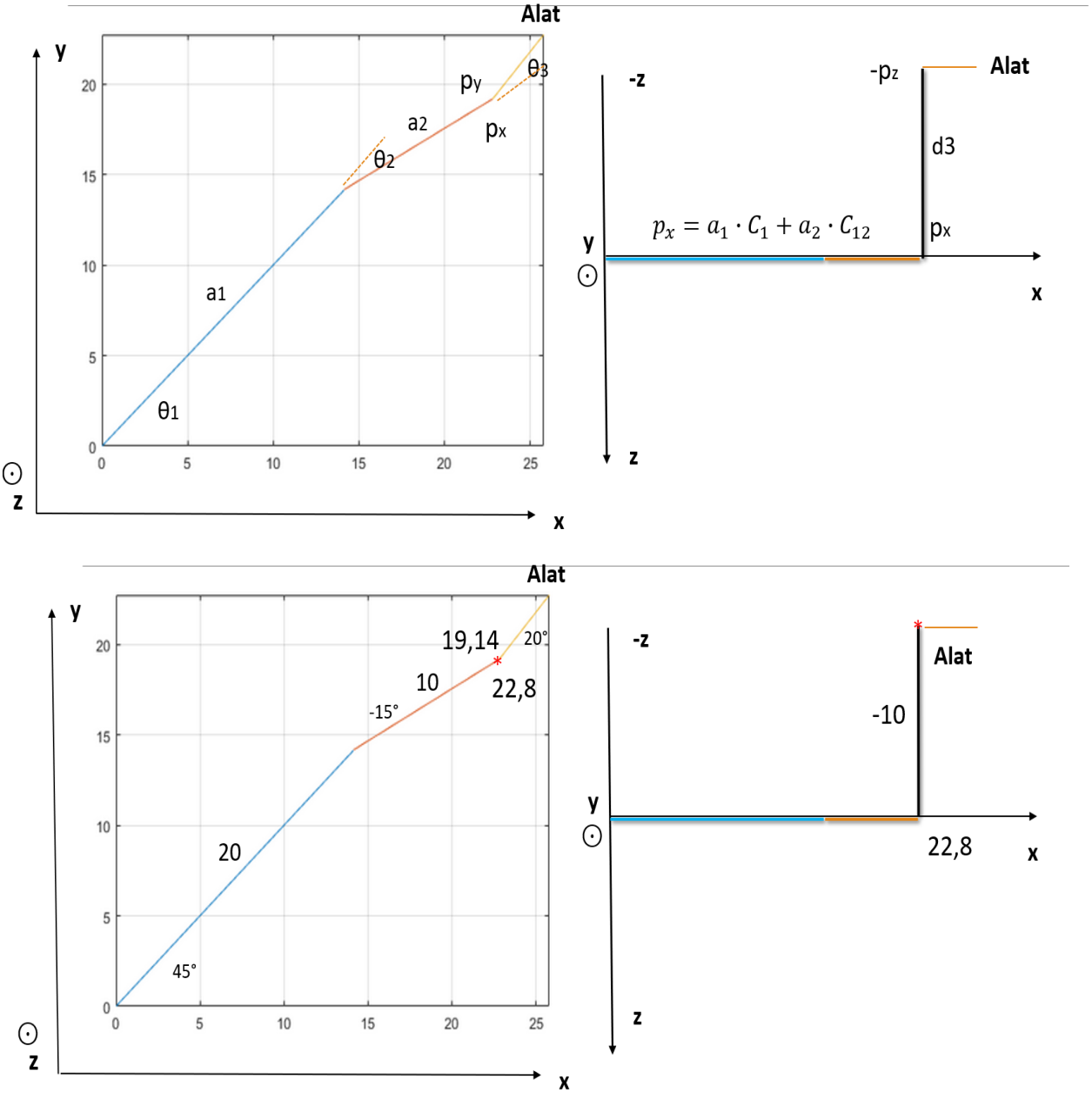
Pozicija alata iznosi:

$$\boldsymbol{Poz} = \begin{bmatrix} 22{,}8 \\ 19{,}14 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Vektor konfiguracije zglobova robota iznosi:

$$\theta = \theta(45^{\circ}, -15^{\circ}, 20^{\circ})$$

Na slici 1.23 prikazan je položaj robota u odnosu na vektor konfiguracije zglobova robota θ i pozicija alata ***Poz.***

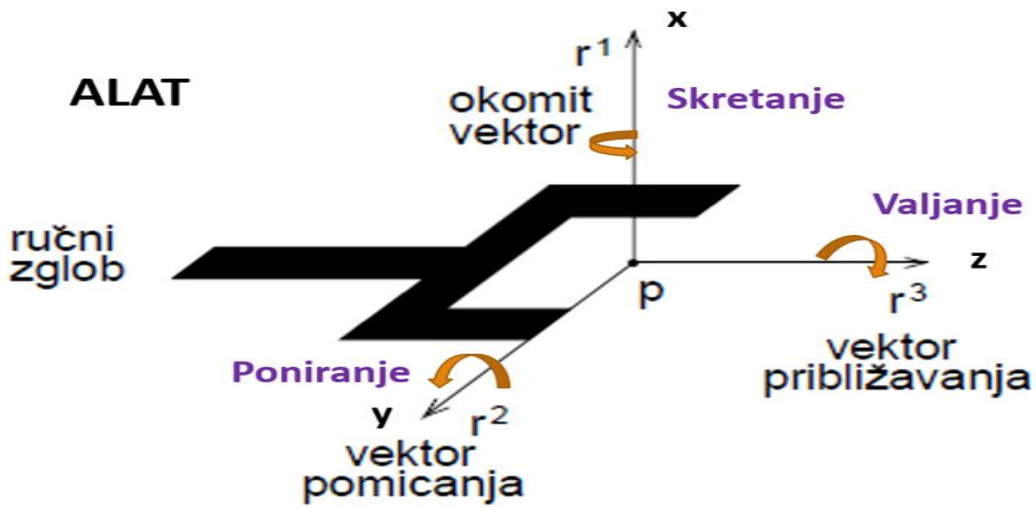


Sl. 1.23 – Položaj robota u odnosu na zadani vektor konfiguracije

Riješen je problem direktne kinematike tj. određena je pozicija i orijentacija alata robota na temelju vektora konfiguracije zglobova robotskog manipulatora.

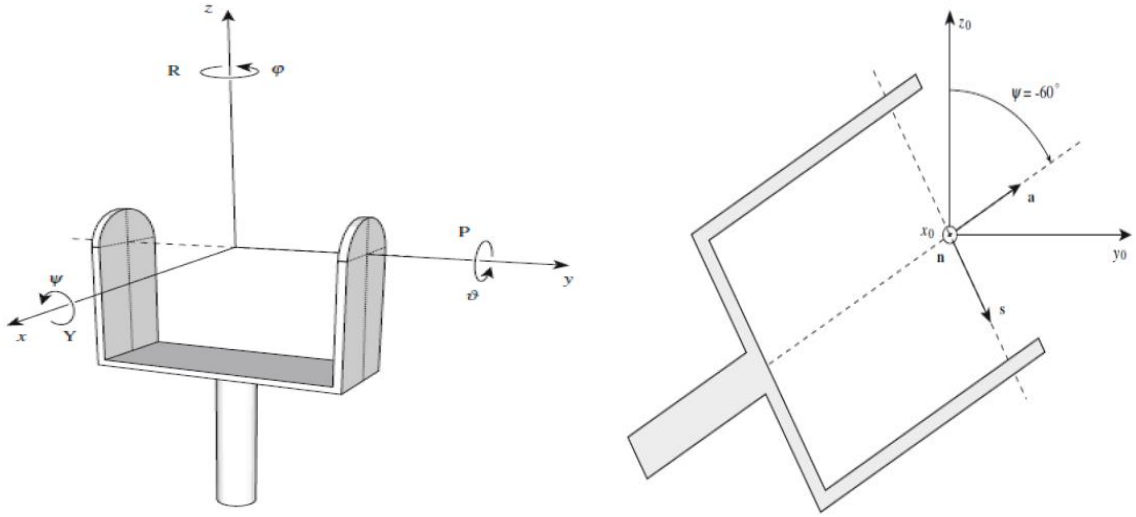
3.1 **Orijentacija alata i primjena kvarterniona (quaternion)**

Kako je na slici 1.15 pokazano, alat je uvijek usmjeren u prvacu osi *z* , što se uočava i na slici 1.24.



Sl. 1.24 – Alat u kartezijevom koordinatnom sustavu (ibidem)

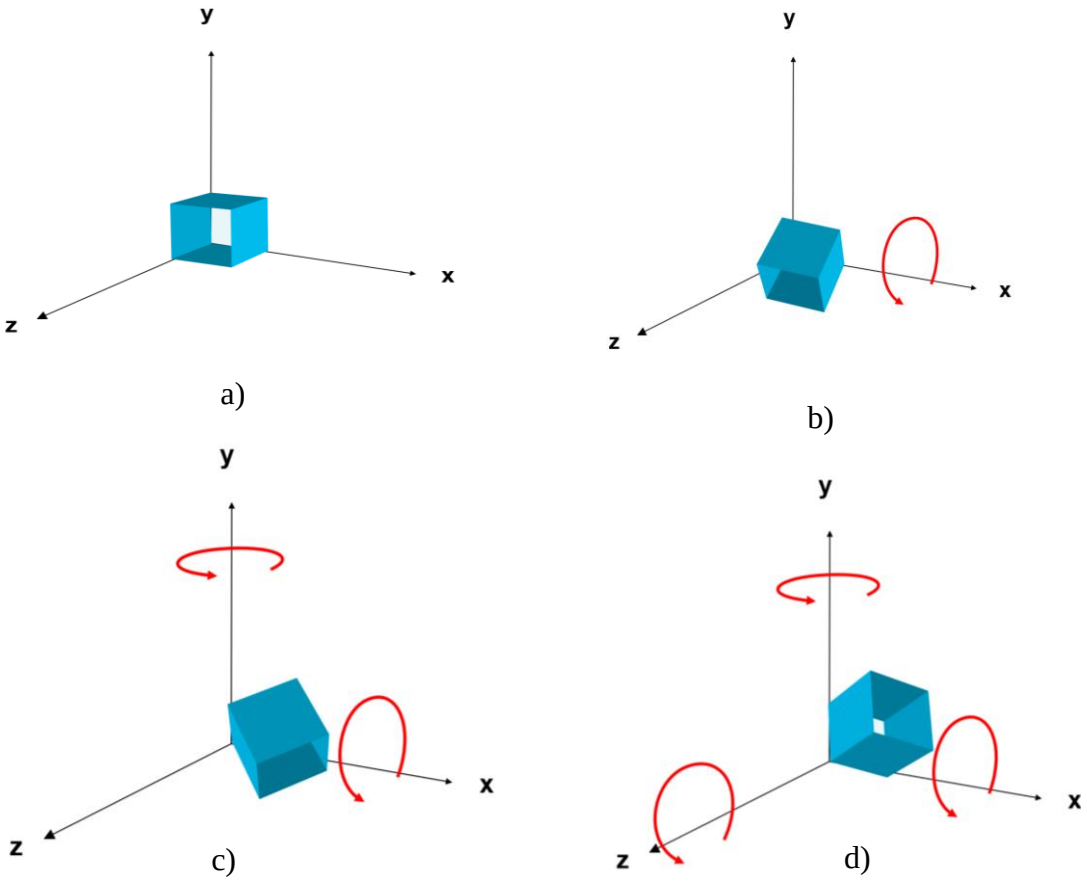
Postoje različite kombinacije rotacije alata, a slijedom slike 1.24 definira se različite kombinacije kao npr. x-y-z rotacija (valjanje – poniranje – skretanje) i npr. z-y-z (zavrtanje – nagibanje – zakretanje). Zapis takvog rotacijskog gibanja u pogledu orijentacije alata nije najpogodnije ako je izražen u Eulerovim koordinatama tj. pomoću odgovarajućih kuteva rotacije, kako je to prikazano na slici 1.25



Sl. 1.25 – Rotacija alata u Eulerovim koordinatama[7]

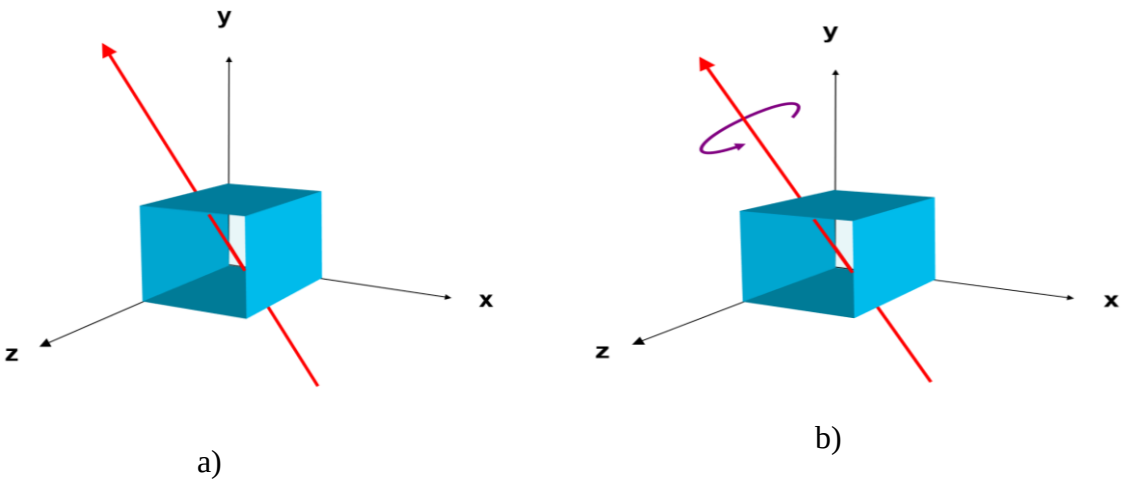
[7] https://link.springer.com/book/10.1007/978-94-007-6101-8

Sa slike 1.25 uočava se rotacija alata oko osi x po kutem od $\psi = -60^{\circ}$. Takva se rotacija u alata u odnosu na bazu robota prostoru može prikazati na dva načina (Eulerov i pomoću kvarterniona). Eulerov način rotacije prikazan je na sljedećim slikama 1.26 a),b),c) i d)

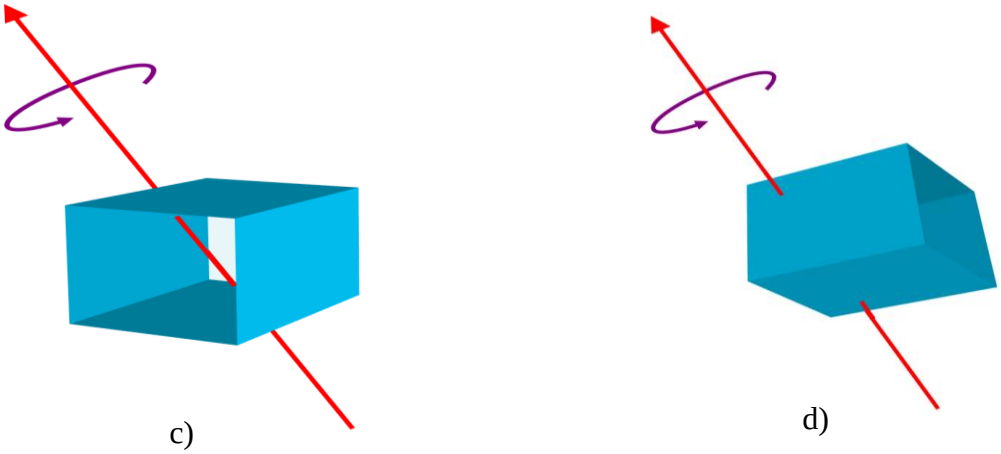


Sl. 1.26 a),b),c) i d) – Rotacija u skladu s Eulerovim koordinatama[8]

Drugi način je prikaz pomoću kvarterniona kako je prikazano na slici 1.27



[8] https://www.slideserve.com/selma/3d-kinematics-powerpoint-ppt-presentation



c) d)

Sl. 1.27 - Rotacija u skladu s kvarternionom a),b),c) i d) (ibidem)

Zapis orijentacije alata pomoću kvarterniona u skladu sa slikom 1.25 bio bi:

$$Q = [q_0; i \cdot q_1;\ j \cdot q_2; k \cdot q_3]$$

Gdje je:

$$q_0 = cos\frac{\varphi}{2}cos\frac{\vartheta}{2}cos\frac{\psi}{2} + sin\frac{\varphi}{2}sin\frac{\vartheta}{2}sin\frac{\psi}{2}$$

$$q_1 = cos\frac{\varphi}{2}cos\frac{\vartheta}{2}sin\frac{\psi}{2} - sin\frac{\varphi}{2}sin\frac{\vartheta}{2}cos\frac{\psi}{2}$$

$$q_2 = \cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}cos\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\psi}{2}$$

$$q_3 = \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\psi}{2} - \cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\psi}{2}$$

Odnosno može se zapisati i na sljedeći način:

$$Q = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i \cdot x \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + j \cdot y \cdot sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + k \cdot z \cdot sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Gdje je npr:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ – rotacija oko osi } y$$

Na analogan način može se odrediti za ose x i z.

U prethodnom primjeru rotacija je ostvarena oko osi x za -60^0, stoga se može odrediti kvarternion rotacije na sljedeći način:

$$Q = \cos\left(\frac{-60^0}{2}\right) + i \cdot 1 \cdot \sin\left(\frac{-60^0}{2}\right) + j \cdot 0 \cdot sin\left(\frac{-60^0}{2}\right) + k \cdot 0 \cdot sin\left(\frac{-60^0}{2}\right)$$

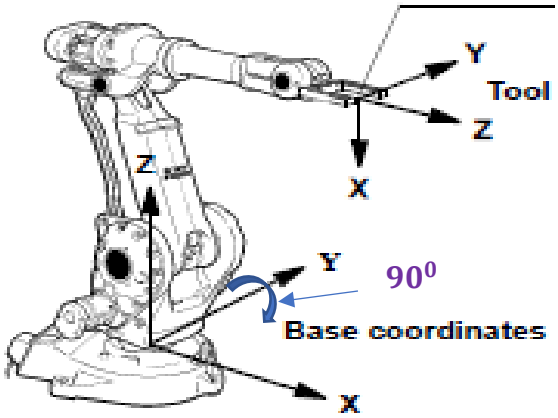
Slijedi daje:

$$Q = \cos\left(\frac{-60^0}{2}\right) + i \cdot 1 \cdot \sin\left(\frac{-60^0}{2}\right) = 0{,}866 - i \cdot 0{,}5$$

Odnosno:

$$Q = [0{,}866; -0{,}5 \cdot i;\ 0; 0]$$

Promotri li se ponovno položaj alata sa slike 1.15 u odnosu na bazu, a što je vidljivo na slici 1.28, uočava se kako je alat zarotiran oko osi y baznog koordinatnog sustava za 90^0 tako da je os z alata paralelna s osom x baze robota. Vrijednost kvarterniona iznosi:



$$Q = \cos\left(\frac{90^0}{2}\right) + j \cdot 1 \cdot sin\left(\frac{90^0}{2}\right)$$

$$Q = 0{,}707 + j \cdot 0{,}707$$

$$Q = [0{,}707; 0; 0; j \cdot 0{,}707;\ 0]$$

Sl. 1.28 – Određivanje kvarternion

Ukoliko je rotacija ostvarena u sve tri osi npr. $\varphi = 35^\circ, \vartheta = 20^\circ\ i\ \psi = 15^\circ$ tada kvarternion Q iznosi:

$$q_0 = cos\frac{35^\circ}{2} cos\frac{20^\circ}{2} cos\frac{15^\circ}{2} + sin\frac{35^\circ}{2} sin\frac{20^\circ}{2} sin\frac{15^\circ}{2} = 0.938$$

$$q_1 = cos\frac{35^\circ}{2} cos\frac{20^\circ}{2} sin\frac{15^\circ}{2} - sin\frac{35^\circ}{2} sin\frac{20^\circ}{2} cos\frac{15^\circ}{2} = 0{,}078$$

$$q_2 = \cos\frac{35^\circ}{2} \sin\frac{20^\circ}{2} cos\frac{15^\circ}{2} + \sin\frac{35^\circ}{2} \cos\frac{20^\circ}{2} \sin\frac{15^\circ}{2} = 0{,}2028$$

$$q_3 = \sin\frac{35^\circ}{2} \cos\frac{20^\circ}{2} \cos\frac{15^\circ}{2} - \cos\frac{35^\circ}{2} \sin\frac{20^\circ}{2} \sin\frac{15^\circ}{2} = 0{,}272$$

$$Q = [0.938; i \cdot 0{,}078;\ j \cdot 0{,}2028; k \cdot 0{,}272]$$

Promotri li se ponovno slika 1.23 onda se uočava orijentaciju alata koja u odnosu na koordinatni sustav baze robota zapravo predatavlja rotoaciju alata za kut $\theta_{ort} = 50^{\circ}$ oko osi z. Stoga kvarternion Q iznosi:

$$Q = \cos\left(\frac{50^0}{2}\right) + i \cdot 0 \cdot \sin\left(\frac{50^0}{2}\right) + j \cdot 0 \cdot sin\left(\frac{50^0}{2}\right) + k \cdot 1 \cdot sin\left(\frac{50^0}{2}\right)$$

Jer je:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \; - \text{rotacija oko osi z}$$

Vrijedi:

$$Q = [0.9063; 0;\ 0; k \cdot 0{,}4226]$$

Zadatak za samostalni rad

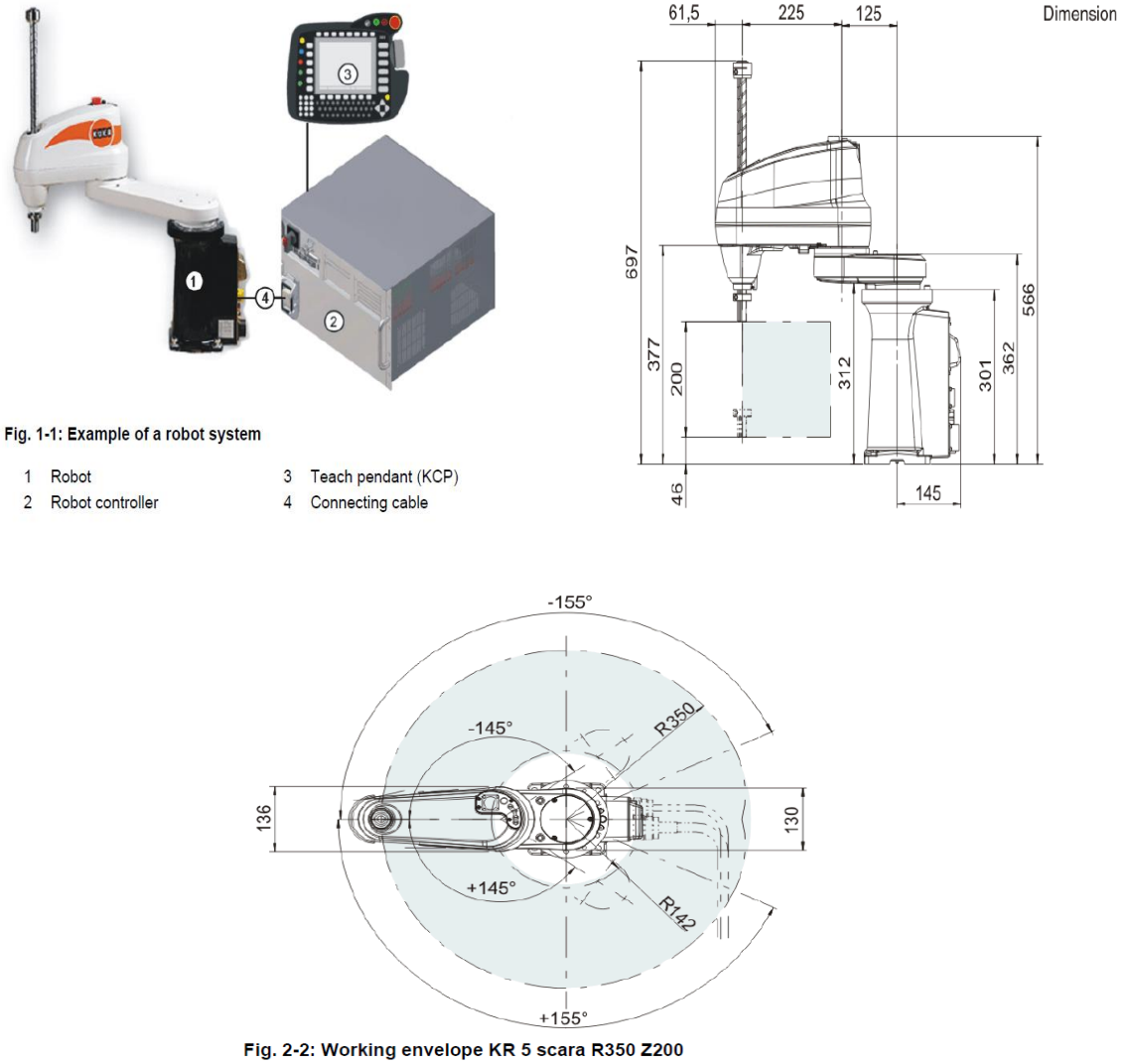
U Tablici 1.2 zadani su kinematički paramteri troosnog robota. Potrebno je nacrtati dijagram položaja zaglobova robota, te odrediti položaj i orijentaciju alata.

Tablica 1.2 – Kinematički parametri

Zglob/ parametar	q_1	q_2	q_3
θ	50°	-35°	35°
d	0	0	20
a	45	30	0
α	0	0	0

3.2 Kinematički parametri SCARA robota

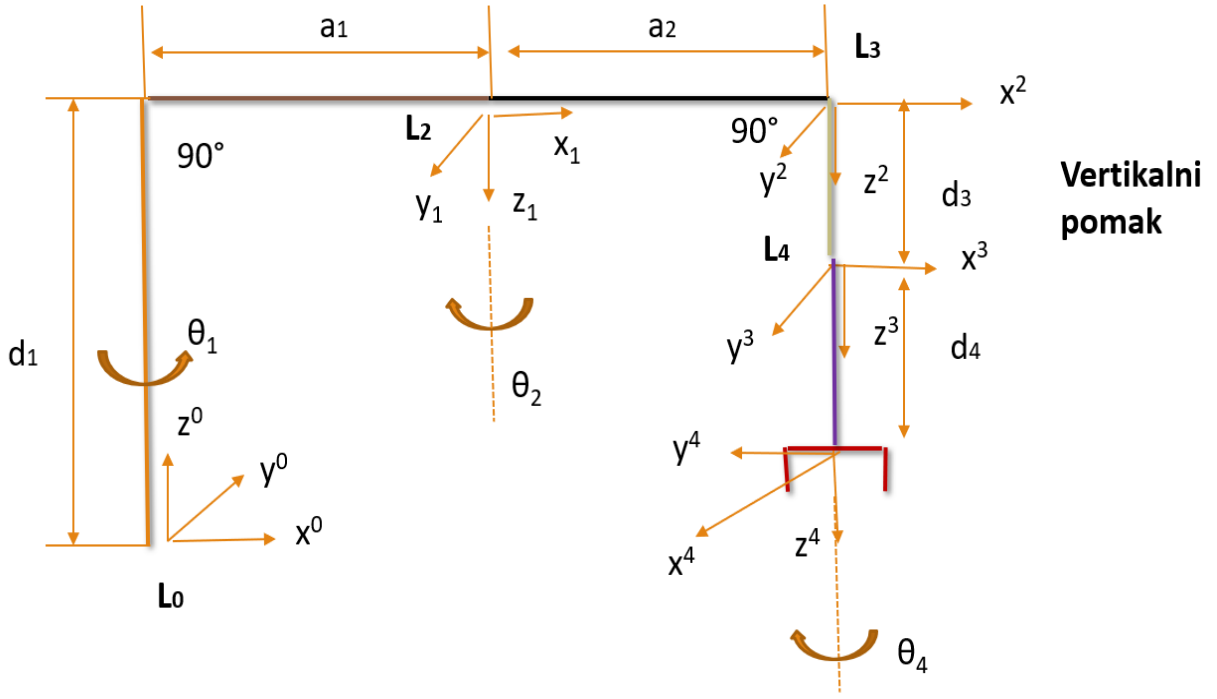
Na slici 1.29 prikazan je SCARA robot s pripadajućim dimenzijama (**Primjer br. 1)**



Sl. 1.29 - SCARA robot s pripadajućim dimenzijama[9]

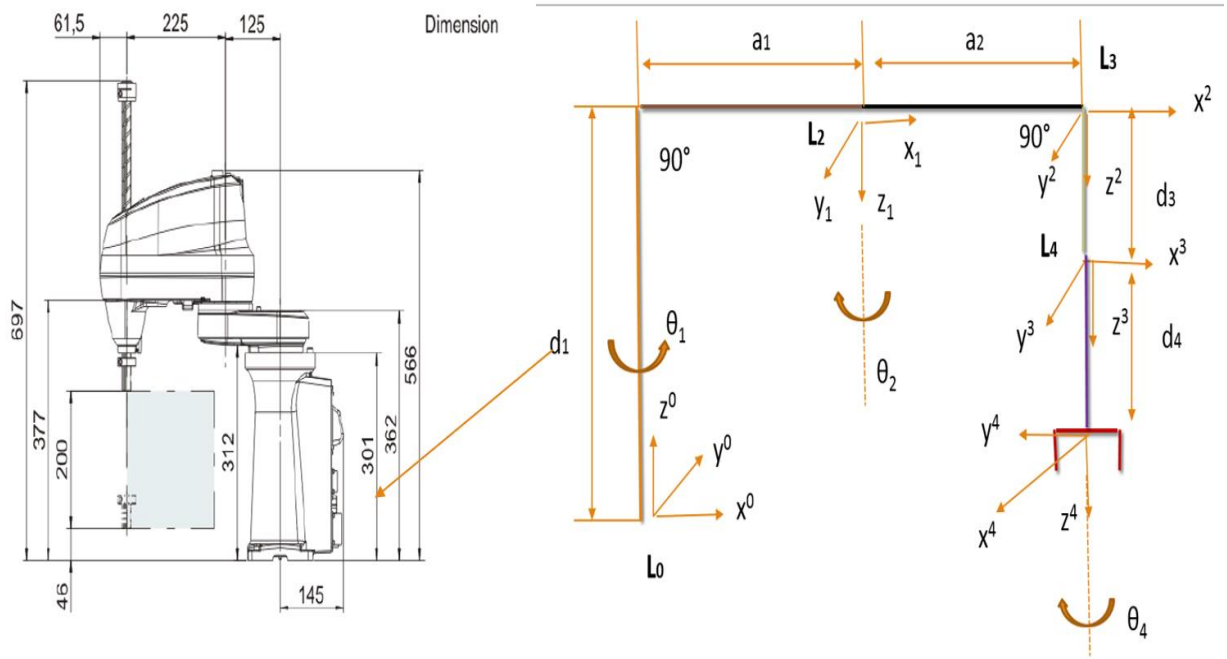
Potrebno je odrediti matricu složene homogene transfromacije $\boldsymbol{T}$ i orijentaciju alata robota $\boldsymbol{Q}$. Kako se radi o robotu RRTR (rotacija – rotacija – translacija - rotacija), na slici 1.30 dan je shematski prikaz. Sukladno Denavit – Hartenbegovoj metodi pridruženi su svakom zglobu koordinatni sustavi, te su određeni kinematički parametri $q_k = q(\theta_k, d_k, \alpha_k, a_k)$. Sa slike 1.30 može uočiti kako su kutni pomaci θ_1 i θ_2 suprotne orijentacije i da su varijable robota θ_1, θ_2, d_3 i θ_4, dok su zadani parametri robota d_1, d_4, a_1i a_2. Oni se određuju na temelju podataka danih na slici 1.29 kako bi se definirala kinematička matrica robota, na način kako je prethodno prikazano u Tablici 1.1.

[9] www.kuka-robotics.com



Sl. 1.30 – SCARA robot s RRTR konfiguracijom

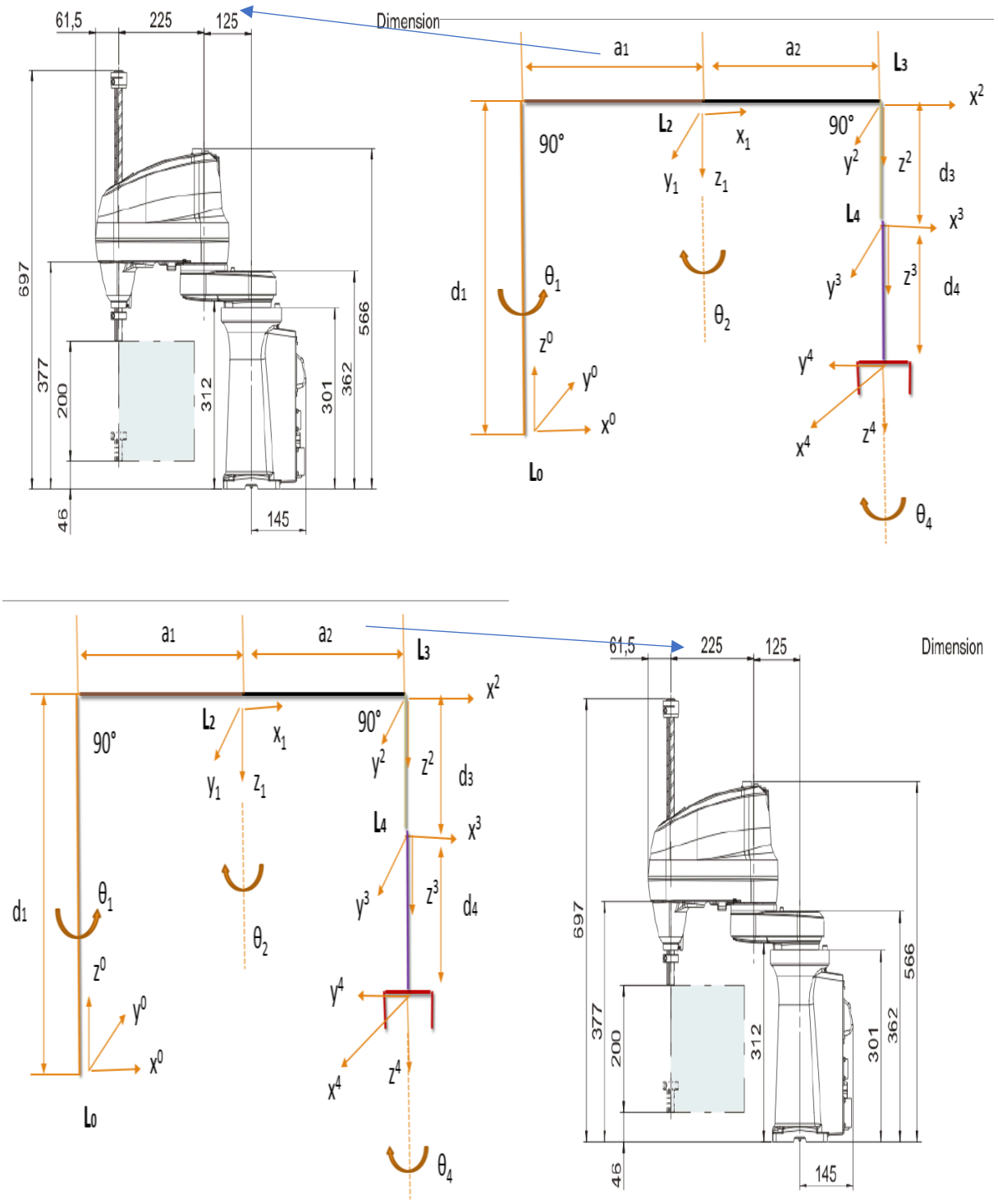
Na slici 1.31 a) prikazano je određivanje parametra d_1.



Sl. 1.31a) Određivanje parametra d_1

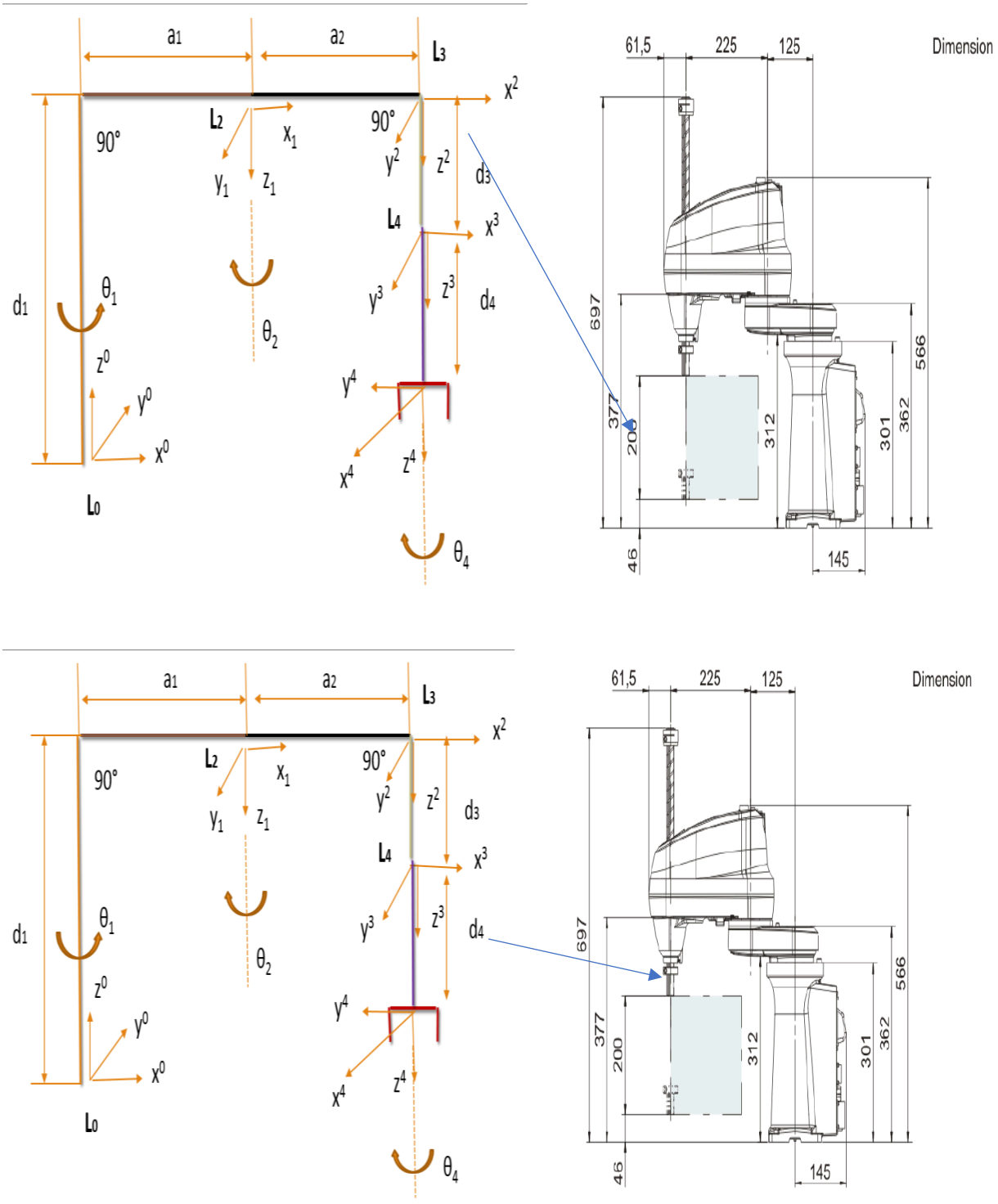
Pramaetra d_1 iznosi: $d_1 = 301mm$

Na slici 1.31 b) prikazano je određivanje parametra a_1 i a_2.



Sl. 1.31 b) - Određivanje parametra a_1 i a_2

Prametri iznose $a_1 = 125mm$ i $a_2 = 225mm$. Sada je još potrebno odrediti varijablu d_3 i parametar d_4, kako je prikazano na slici 1.31 c).

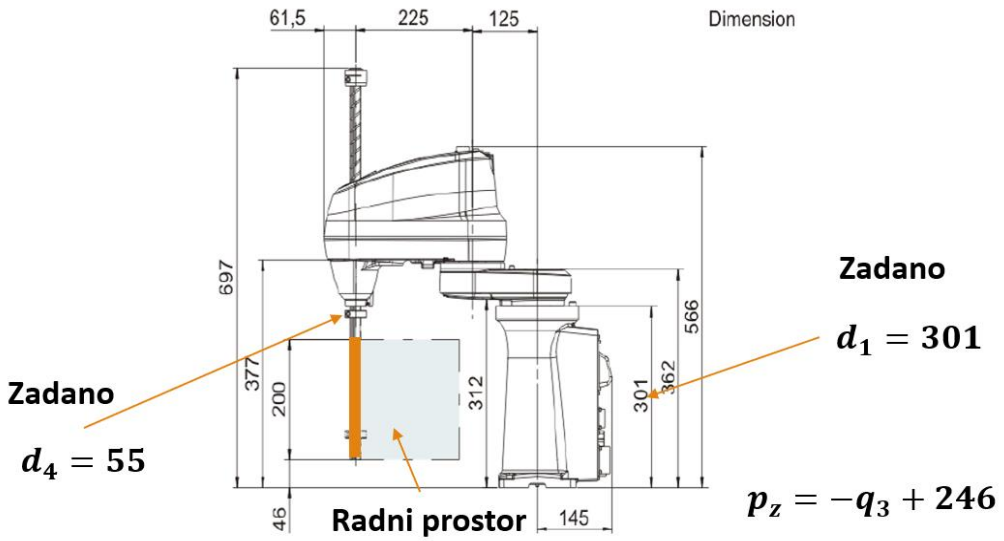


Sl. 1.31c) – Određivanje varijable d_3i parametra d_4

Ako se varijabla d_3 uzme u punoj vrijednosti tj. $d_3 = 200mm$, tada je moguće izračunati prametar $d_3$prema sljedećoj relaciji:

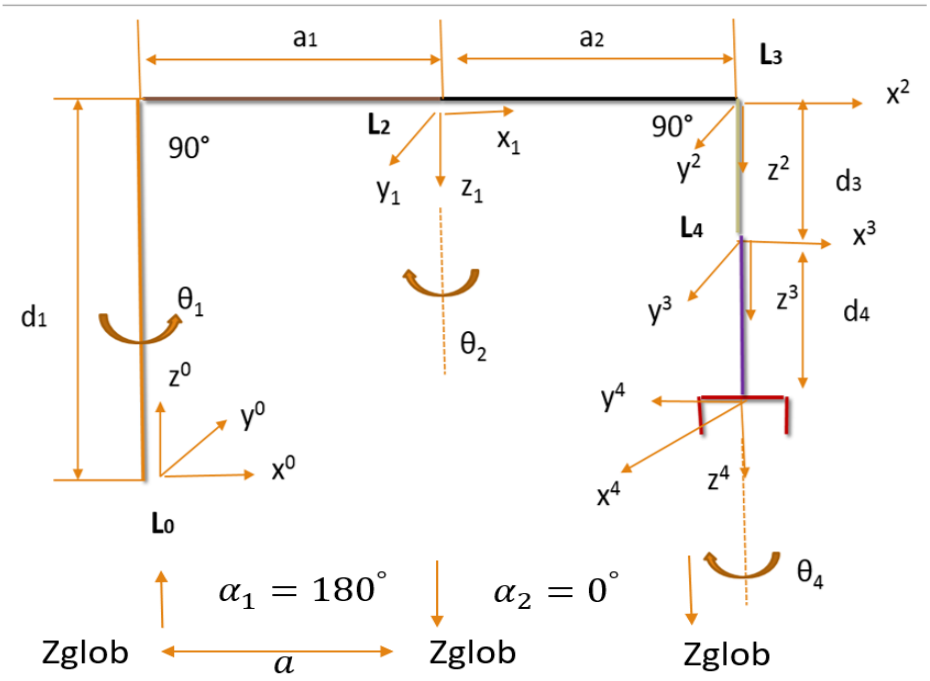
$$d_4 = d_1 - (d_3 + 46) = 301 - (200 + 46) = 55mm$$

Isto je prikazano na slici 1.31 d).



Sl. 1.31 d) – Varijabla d_3 i parametar d_4

Potrebno je još odrediti kuteve α_1 do α_4 kako je prikazano na slici 1.31 d).



Sl. 1.31e) – Određivanje parametara α_1 do α_4

Na temelju prethodno određenih parametara u Tablici 1.3 prikazana su ukupni kinematički parametri robota SCARA.

Tablica 1.3 – Kinematički parametri SCARA robota

Zglob/ parametar	q_1	q_2	q_3	q_4
θ	-45°	-60°	0°	-35°
d	301	0	200	55
a	125	225	0	0
α	180°	0	0	0

Potrebno je odrediti matricu složene homogene transfromacije

$$\boldsymbol{T_{baza}^{alat}(q) = T_0^3(q) = T_0^1(q_1) \cdot T_1^2(q_2) \cdot T_2^3(q_3) \cdot T_3^4(q_4)}$$

na temelju podataka iz Tabalice 1.3.

Slijedom navednog vrijedi za *prvi zglob*:

$$\boldsymbol{T_0^1}(q_1) = \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 & a_1 \cdot C_1 \\ S_1 & -C_1 & 0 & a_1 \cdot S_1 \\ 0 & 0 & -1 & d_1 \end{bmatrix}$$

Za *drugi zglob*:

$$\boldsymbol{T_1^2}(q_1) = \begin{bmatrix} C_2 & S_2 & 0 & a_2 \cdot C_2 \\ S_2 & -C_2 & 0 & a_2 \cdot S_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Za *treći zglob*:

$$\boldsymbol{T_2^3}(q_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \end{bmatrix}$$

Za *četvrti zglob*:

$$\boldsymbol{T_3^4}(q_1) = \begin{bmatrix} C_4 & S_4 & 0 & 0 \\ S_4 & -C_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d_4 \end{bmatrix}$$

Matrica homogene složene transformacije za SCARA robot konfiguracije RRTR glasi:

$$\boldsymbol{T_{baza}^{alat}}(q) = \begin{bmatrix} C_{1-2-4} & S_{1-2-4} & 0 & a_1 \cdot C_1 + a_2 \cdot C_{1-2} \\ S_{1-2-4} & -C_{1-2-4} & 0 & a_1 \cdot S_1 + a_2 \cdot S_{1-2} \\ 0 & 0 & 1 & d_1 - d_3 - d_4 \end{bmatrix}$$

Gdje je:

$$S_{1-2} = \sin(\theta_1 - \theta_2)$$
$$C_{1-2} = \cos(\theta_1 - \theta_2)$$
$$S_{1-2-4} = \sin(\theta_1 - \theta_2 - \theta_4)$$
$$C_{1-2-4} = \cos(\theta_1 - \theta_2 - \theta_4)$$

Pozcija robota bila bi:

$$\boldsymbol{Poz} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cdot C_1 + a_2 \cdot C_{1-2} \\ a_1 \cdot S_1 + a_2 \cdot S_{1-2} \\ d_1 - d_3 - d_4 \end{bmatrix}$$

Orijentacija robota bila bi:

$$\theta_{ort} = \theta_{1-2-4} = \theta_1 - \theta_2 - \theta_4$$

Uvršatavanjem zadanih vrijednosti iz Tablice 1.3 dobija se:

$$\theta_{1-2-4} = \theta_1 - \theta_2 - \theta_4 = -45^\circ - (-60^\circ) - (-35^\circ) = 50^\circ$$
$$C_{1-2-4} = \cos\theta_{1-2-4} = \cos 50^\circ = 0{,}6428$$
$$S_{1-2-4} = \sin\theta_{1-2-4} = \sin 50^\circ = 0{,}766$$
$$p_x = a_1 \cdot \cos\theta_1 + a_2 \cdot \cos\theta_{1-2} = 125 \cdot \cos(-45^\circ) + 225 \cdot \cos[(-45^\circ - (-60^\circ)] = 305{,}72$$
$$p_y = a_1 \cdot \sin\theta_1 + a_2 \cdot \sin\theta_{1-2} = 125 \cdot \sin(-45^\circ) + 225 \cdot \sin[(-45^\circ - (-60^\circ)] = -30{,}15$$
$$p_z = d_1 - d_3 - d_4 = 301 - 200 - 55 = 46$$

Matrica složene homogene transfromacije iznosi:

$$\boldsymbol{T_{baza}^{alat}(q)} = \begin{bmatrix} 0{,}6428 & 0{,}766 & 0 & 305{,}72 \\ 0{,}766 & -0{,}6428 & 0 & -30{,}15 \\ 0 & 0 & -1 & 46 \end{bmatrix}$$

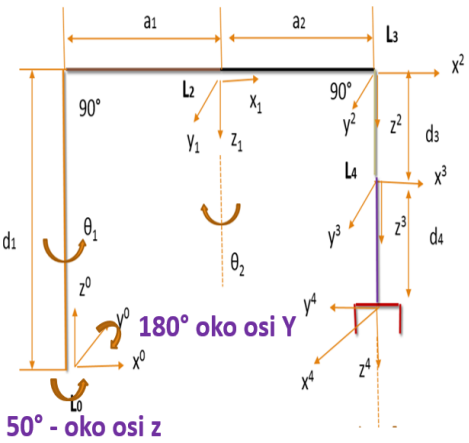
Pozicija alata iznosi:

$$\boldsymbol{Poz} = \begin{bmatrix} 305{,}72 \\ -30{,}15 \\ 46 \end{bmatrix}$$

Vektor konfiguracije zglobova robota iznosi:

$$\theta = \theta(-45^\circ, -60^\circ, -35^\circ)$$

Potrebno je odrediti kvarternion orijentacije, na način kako je prikazano na slici 1.31 e). Naime, u odnosu na koordinatni sustav baze prisutna je rotacija alata oko osi y za 180° odnosno oko osi z za 50°



$$q_0 = cos\frac{0^\circ}{2}cos\frac{180^\circ}{2}cos\frac{50^\circ}{2} + sin\frac{0^\circ}{2}sin\frac{180^\circ}{2}sin\frac{50^\circ}{2} = 0$$

$$q_1 = cos\frac{0^\circ}{2}cos\frac{180^\circ}{2}sin\frac{50^\circ}{2} - sin\frac{0^\circ}{2}sin\frac{180^\circ}{2}cos\frac{50^\circ}{2} = -0{,}4226$$

$$q_2 = \cos\frac{0^\circ}{2}\sin\frac{180^\circ}{2}cos\frac{50^\circ}{2} + \sin\frac{0^\circ}{2}\cos\frac{180^\circ}{2}\sin\frac{50^\circ}{2} = 0{,}9063$$

$$q_3 = \sin\frac{0^\circ}{2}\cos\frac{180^\circ}{2}\cos\frac{50^\circ}{2} - \cos\frac{0^\circ}{2}\sin\frac{180^\circ}{2}\sin\frac{50^\circ}{2} = 0$$

$$Q = [0; -i \cdot 0{,}4226;\ j \cdot 0{,}9063; 0]$$

Sl. 1.31 e) - Kvarternion orijentacije alata

Na temelju prethodno prikazanog odredređena je matrica složene homogene transfromacije $\boldsymbol{T}$ i orijentaciju alata robota $\boldsymbol{Q}$ za zadane kinematičke parametre te vrijedi:.

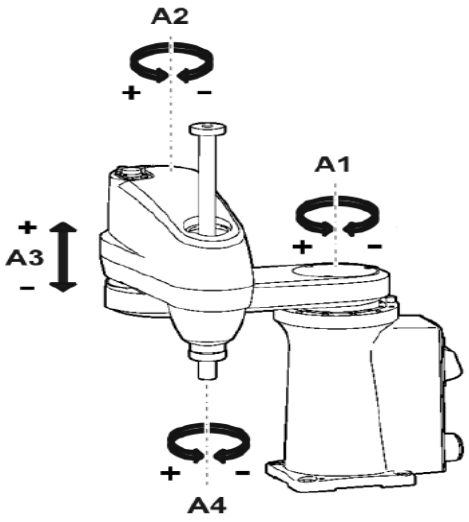
$$\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{baza}}^{\boldsymbol{alat}}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} 0{,}6428 & 0{,}766 & 0 & 305{,}72 \\ 0{,}766 & -0{,}6428 & 0 & -30{,}15 \\ 0 & 0 & -1 & 46 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q} = [0; -i \cdot 0{,}4226;\ j \cdot 0{,}9063; 0]$$

Primjer br. 2

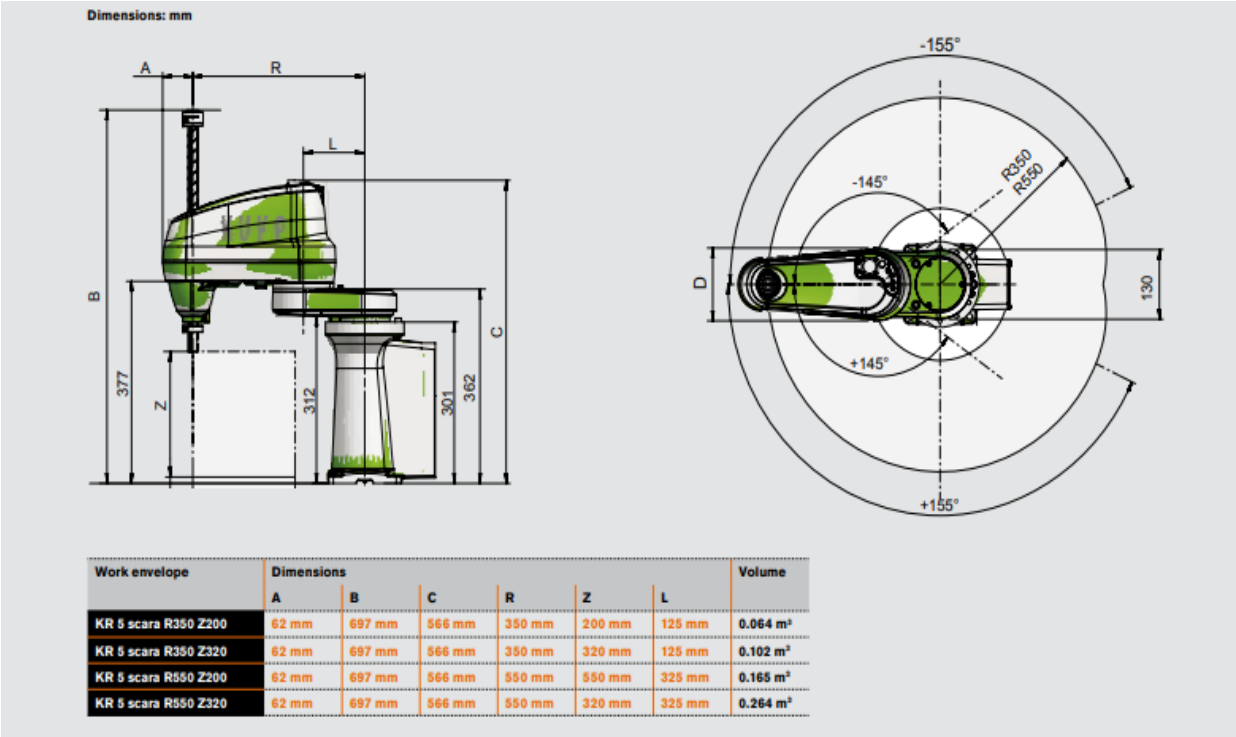
Zadan je SCARA robot prikazana na slici 1.32 a) sa tehničkom specifikacijom prikazanoj na slici 1.32 b)





Sl. 1.32 b) – Robot SCARA KR5 (ibidem)

Tehnička sepcifikacija prikazuje temeljne dimenzije različitih klasa robota SCARA KR5 od R350 Z200 do R550 Z320.



Work envelope	Dimensions						Volume
	A	B	C	R	Z	L	
KR 5 scara R350 Z200	62 mm	697 mm	566 mm	350 mm	200 mm	125 mm	0.064 m³
KR 5 scara R350 Z320	62 mm	697 mm	566 mm	350 mm	320 mm	125 mm	0.102 m³
KR 5 scara R550 Z200	62 mm	697 mm	566 mm	550 mm	550 mm	325 mm	0.165 m³
KR 5 scara R550 Z320	62 mm	697 mm	566 mm	550 mm	320 mm	325 mm	0.264 m³

Sl. 1.32 b) - Temeljne dimenzije različitih klasa robota SCARA (ibidem)

Potrebno je simulirati rad robota SCARA KR5 R350 Z200 ako su zadani sljedeći kinematički parametri prikazani u Tablici 1.4.

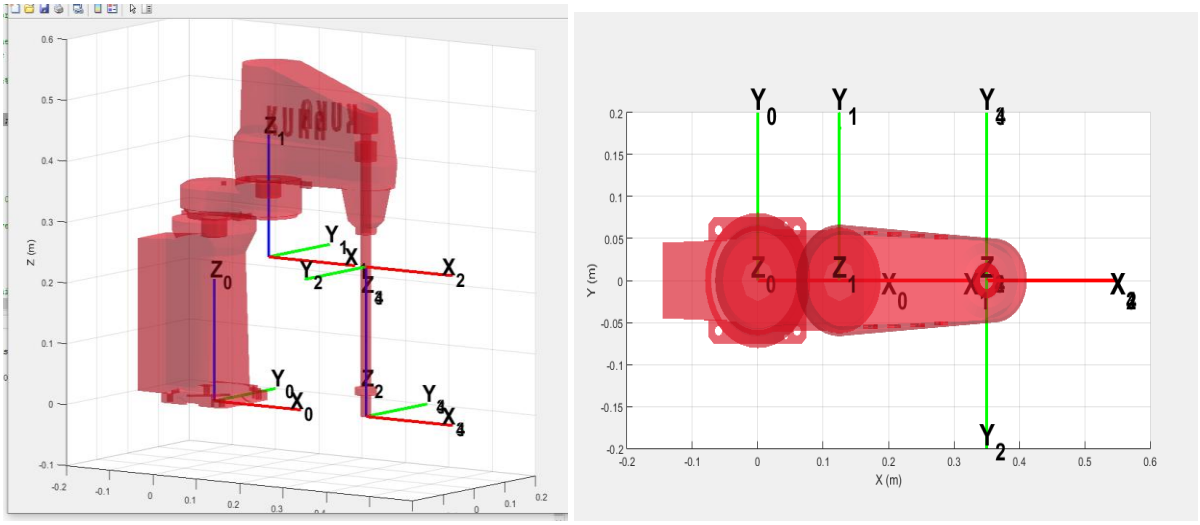
Tablica 1.4 - Kinematički parametri SCARA robota KR5 R350 Z200

Zglob/ parametar	q_1	q_2	q_3	q_4
θ	45°	30°	0°	15°
d [m]	0,246	0	0,2	0
a [m]	0,125	0,225	0	0
α	0	180°	180°	0

Orijentacije kutnih pomaka θ su iste u svakom zglobu za razliku od prethodnog slučaja u primjeru br. 1

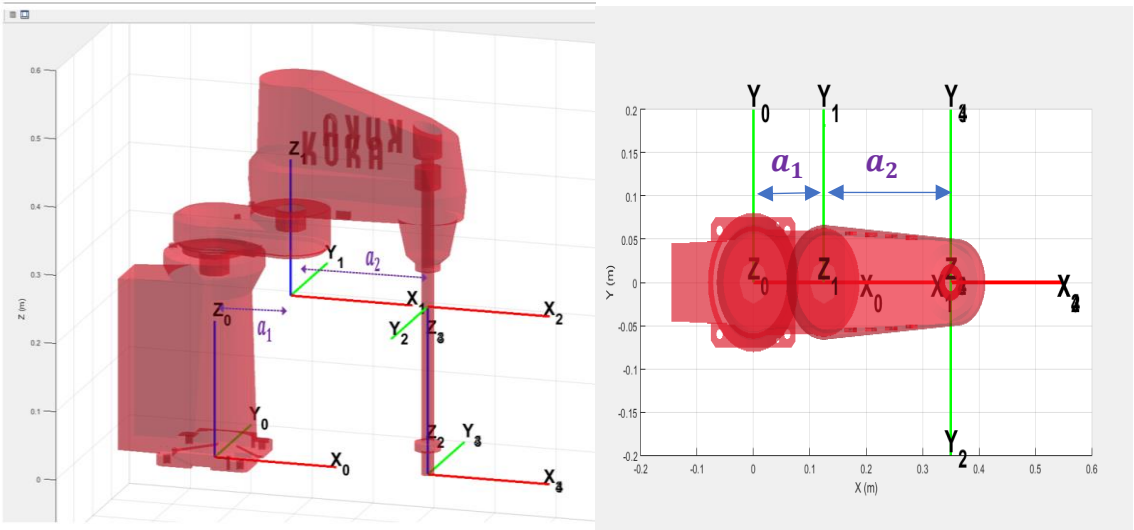
Za simulaciju rada robota SCARA robota KR5 R350 Z200 korišten je paket arte (https://arvc.umh.es/arte/index_en.html) koji je podržan u MatLab-u. Isti je potrebno instalirati u skladu s uputama koje se nalaze na prethodno definiranoj web stranici (više u poglavlju 8.).

Nakon što je provedeno instaliranje, a na slici 1.32 c) prikazan je simulacijski model robota sa unesenim koordintnim osima za svaki zglob robota.



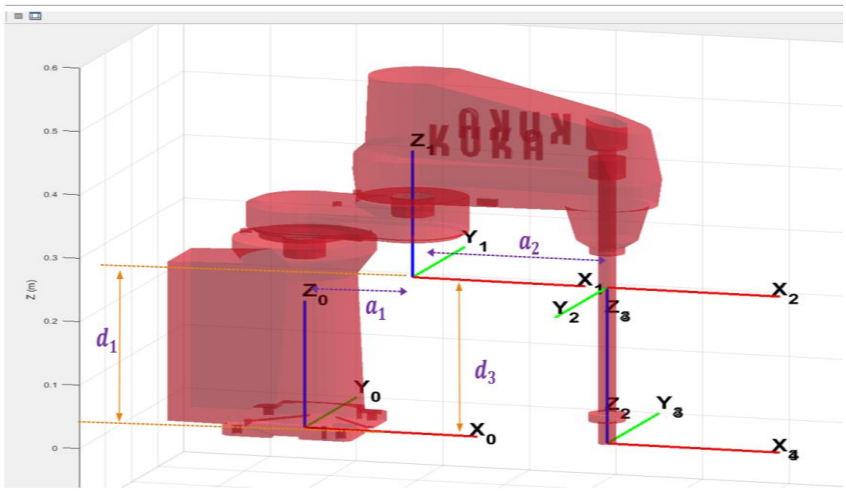
Sl. 1.32 c) - Simulacijski model robota sa unesenim koordintnim osima

Na slici 1.32 d) označene su dužine članaka a_1 i a_2.



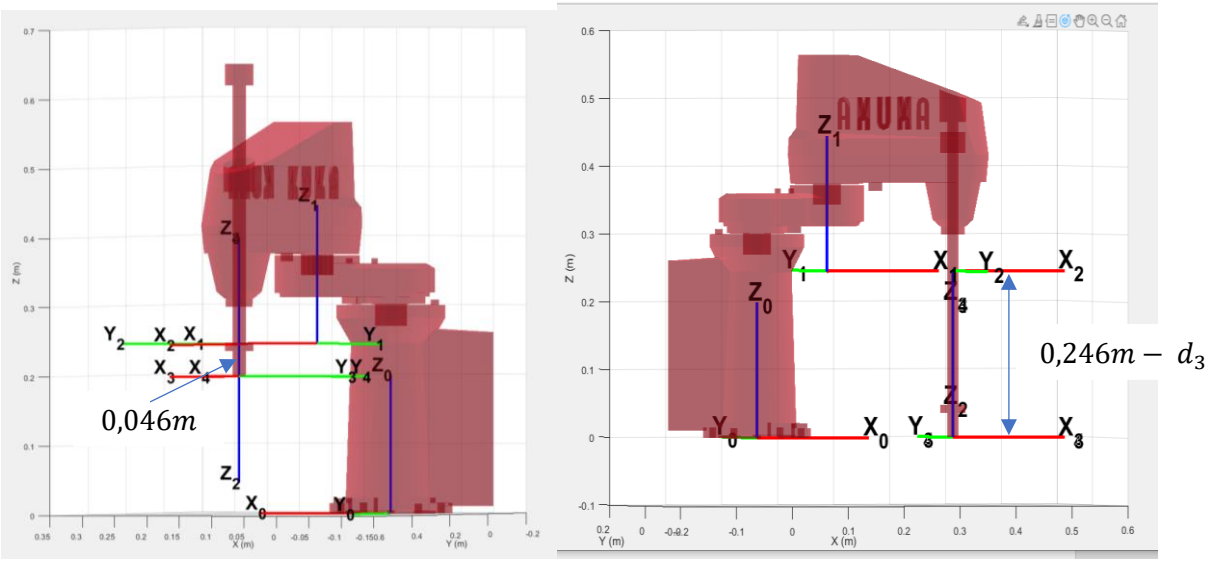
Sl. 1.32 d) – Dužine članaka robota a_1 i a_2

Vrijednosti dužine članak su parametri određeni u Tablici 1.4 na temelju slike 1.32 b) i iznose $a_1 = 0{,}125m$ i $a_2 = 0{,}225m$. Na sljedećoj slici 1.32 e) prikazani su parametar širna zgloba robota d_1 i varijabala d_3.



Sl. 1.32 e) – Širina zgloba d_1 i varijabla d_3

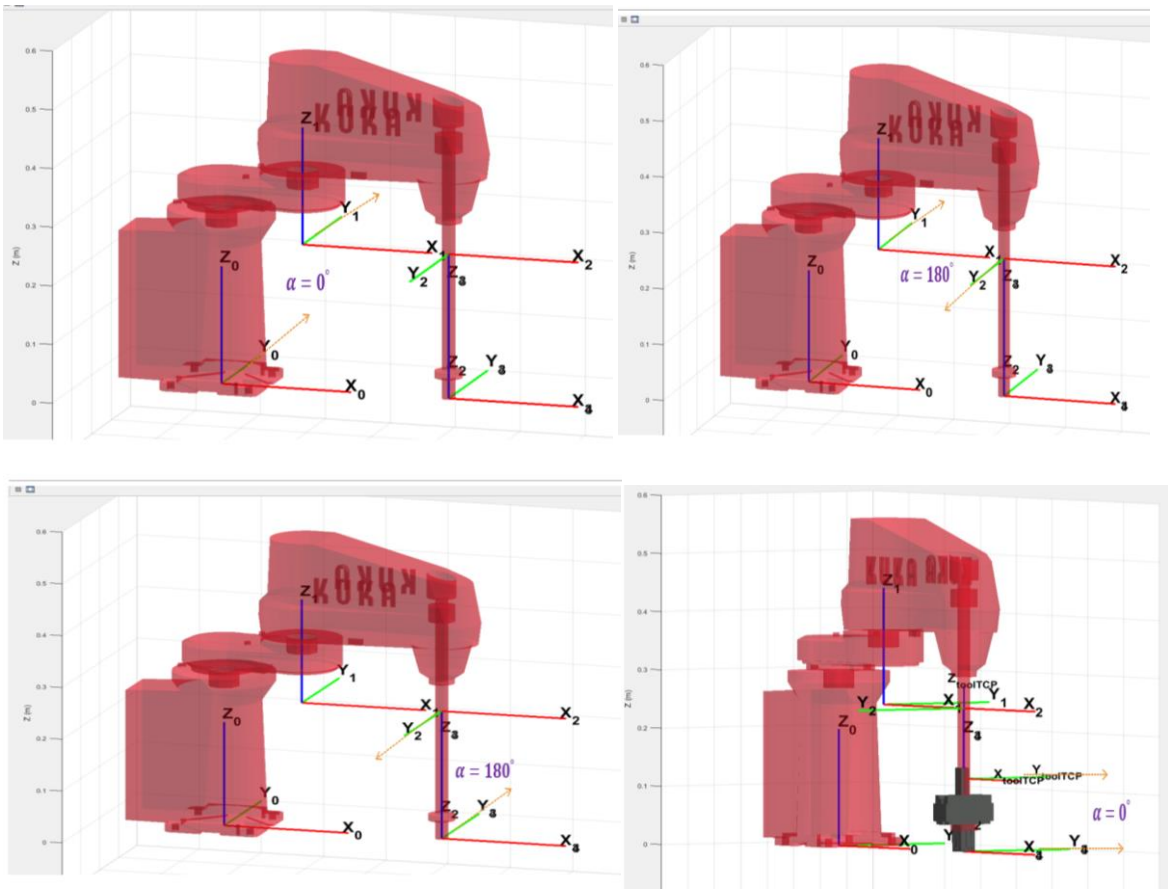
U slučaju varijable d_3 važno je uočiti element za priključka alata, pa je ukupni raspon 246mm, kako je prikazano na slici 1.32 f).



sl. 1.32 f) – Ukupni raspon varijeble d_3

Prema tome, dijapazon varijable je $0 \leq d_3 \leq 0{,}2m$. Stoga kada je $d_3 = 0{,}2m$ tada je alat podignut i nalazi se na 0,046m, a kada je $d_3 = 0$, alat je potpuno spušten i nalazi se na $0{,}246m$. Na takav način kompenziran je utjecaj priključka alata na određivanje pozicije alata ***Poz.***

Nadalje, slici 1.32g) prikazano je određivanje parametra α. Kako bi se mogao odrediti parametra α_4, u simulacijskom modelu na zadanjem prikazu dodan je alat i potvrđeni su kinematički parametri dati u Tablici 1.4 kako je $\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 180^\circ$, $\alpha_3 = 180^\circ$ i $\alpha_4 = 0^\circ$.



Sl. 1.32 g) - Određivanje parametra α_1 do α_4

Prema tome varijable za simulaciju rada SCARA robota jesu:

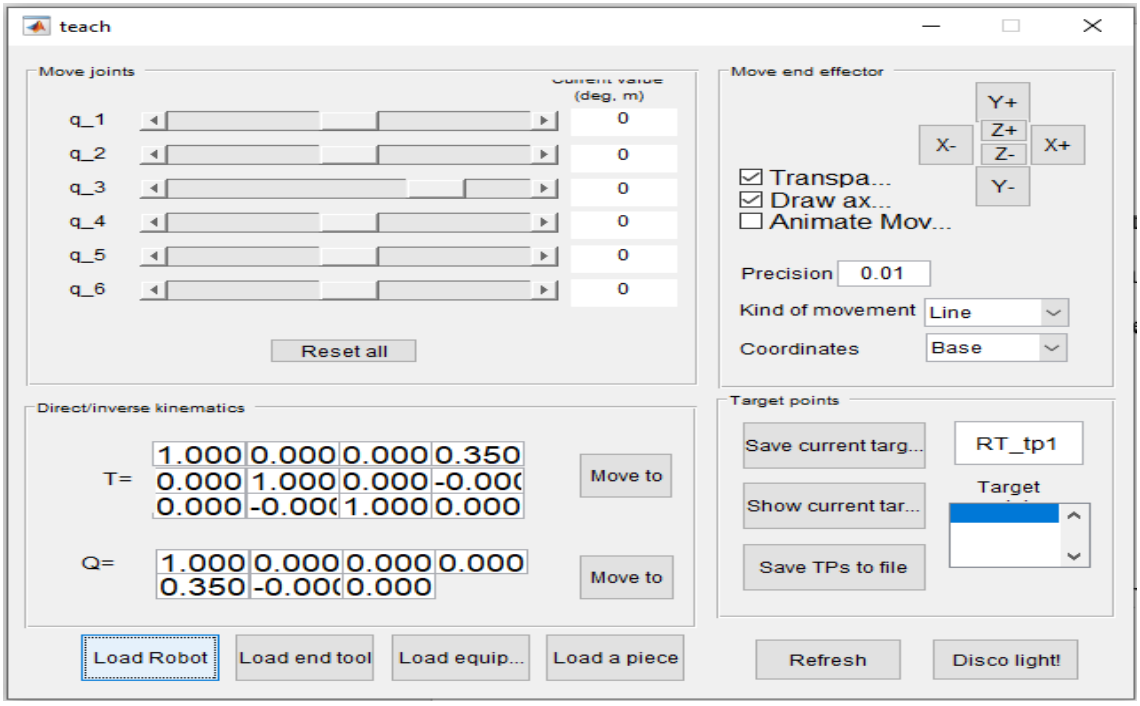
$$q_1 = q(\theta_1);\ q_2 = q(\theta_2);\ q_3 = -q(d_3) + 0{,}246\ ;\ q_4 = q(\theta_4)$$

Slijedom napisanoga, funkcija robot *parametars* bila bi:

```
function robot = parameters()

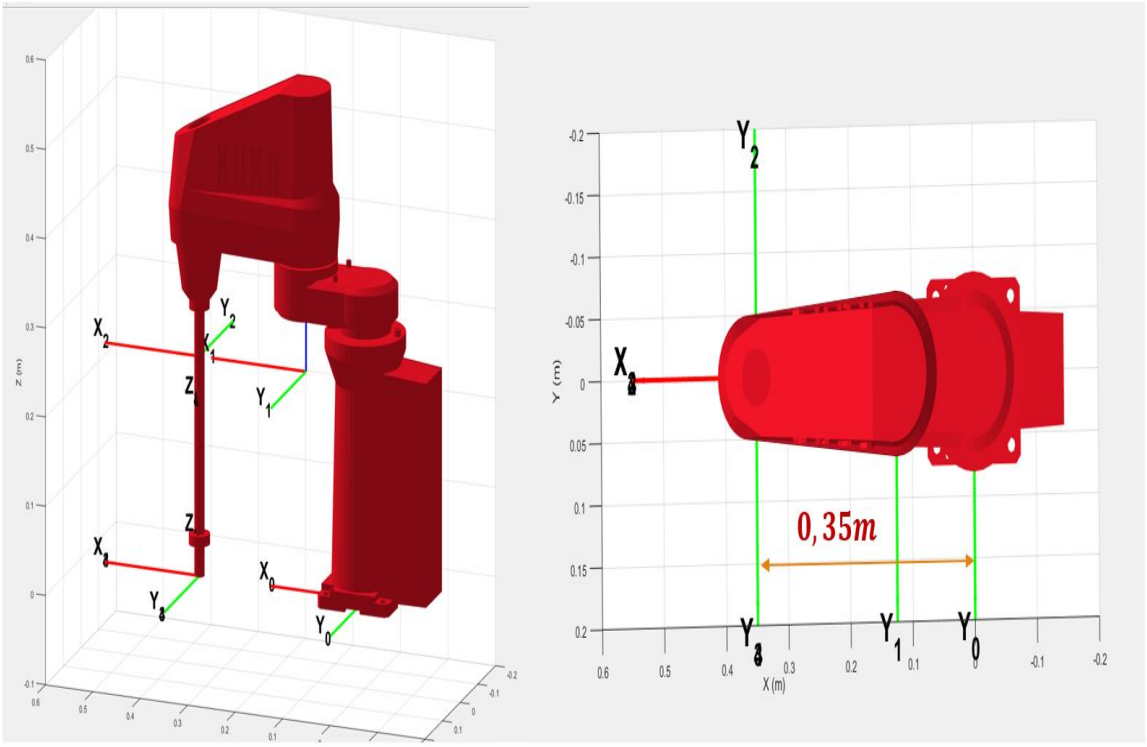
robot.DH.theta= '[ q(1) q(2)    0      q(4)]';
robot.DH.d='[     0.246  0      -q(3)+0.246 0]';
robot.DH.a='[     0.125  0.225   0      0]';
robot.DH.alpha= '[0      pi       pi     0]';
robot.J=[];
robot.name= 'KUKA_KR5_scara_R350_Z200';
```

Prethodno zapisana konfiguracija parametara određuje matricu složene homogene transfromacije $\boldsymbol{T}$ i orijentaciju alata robota $\boldsymbol{Q}$ za zadane kinematičke parametre, kako je prikazano na „teach“ panelu slika 1.33.



Sl. 1.33 - „Teach“ panel

Podaci prikazani na slici 1.32 odgovaraju sljedećem stanju pozicije i orijentacije alat robota kako je vidljivo na slici 1.34.



Sl. 1.34 – Stanje položaja i orijentacije alata robota

Matrica složene homogene transfromacije iznosila bi:

$$\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{baza}}^{\boldsymbol{alat}}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0{,}35 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pozicija alata iznosi:

$$\boldsymbol{Poz} = \begin{bmatrix} 0{,}35 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vektor konfiguracije zglobova robota iznosi:

$$\theta = \theta(0^{\circ}, 0^{\circ}, 0^{\circ})$$

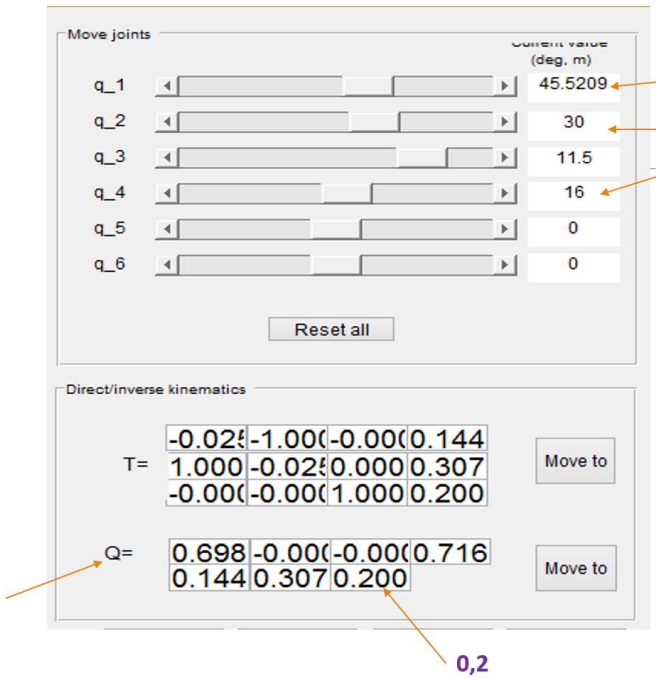
I varijabla $d_3 = 0$.

U slučaju promjene konfiguracije, kako je zadano u Tablici 1.4, tj. da vrijedi:

$$\theta = \theta(45^{\circ}, 30^{\circ}, 15^{\circ})$$

$$d_3 = 0{,}2$$

Slijedi upis novih varijabli u simulacijski model, kako prikazuje slika 1.35



Zglob/ parametar	q_1	q_2	q_3	q_4
θ	45°	30°	0°	15°
d [m]	0,246	0	0,2	0
a [m]	0,125	0,225	0	0
α	0	180°	180°	0

Sl. 1.35 – Unos novih varijabli konfiguracije robota

Promjenila se matrica složene homogene transfromacije koja sada iznosi:

$$\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{baza}}^{\boldsymbol{alat}}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} -0{,}025 & -1 & 0 & 0{,}144 \\ 1 & -0{,}025 & 0 & 0{,}307 \\ 0 & 0 & -1 & 0{,}2 \end{bmatrix}$$

Promjenila se i pozicija alata koja sada iznosi:

$$\boldsymbol{Poz} = \begin{bmatrix} 0{,}144 \\ 0{,}307 \\ 0{,}2 \end{bmatrix}$$

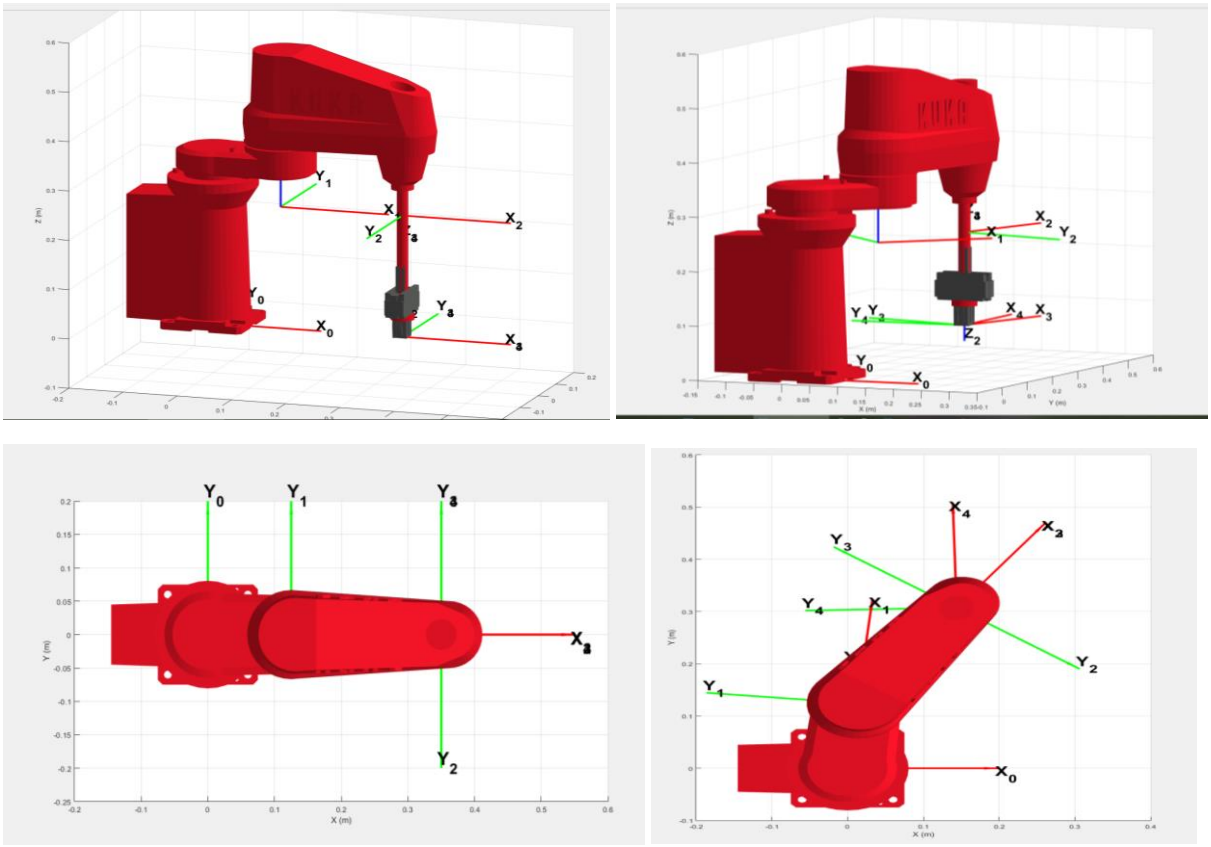
Promjenio se i kvarternion sa:

$$Q = [1; 0; 0; 0]$$

Na:

$$Q = [0{,}698; 0; 0; 0{,}716 \cdot k]$$

Na slici 1.36 prikazana je početna pozicija i završna pozicija konfiguracije robota sukladno zadanim varijablama u Tablici 1.4



Sl. 1.36 - Početna pozicija i završna pozicija konfiguracije robota

Zaključno je važno naglasiti kako se direktnom kinematikom izražava pozicija i orijentacija vrha robota (alata) kao funkcija varijabli i parametara zaglobova i mehaničke strukture članaka robota u odnosu na referentni koordinatni sustav baze robota. U izražavanju pozicije i orijentacije koristi se metoda složene transformacije homogenih koordinata koja kao rezultat daje jednadžbu robotske ruke odnosno robotskog mehanizma. Homogene transformacije određuju položaj i orijentaciju pojedinog koordinatnog sustava zgloba robota, stoga odrediti vezu između varijabli zglobova robotske ruke (manipulatota) te pozicije i orijentacije vrha robota (alata) znači riješiti problem direktne kinematike (engl. *Direct Kinematics Problem*, DKP).

4. DIFERENCIJALNA KINEMATIKA ROBOTA

U većini slučajeva potrebno je poznavati ne samo položaj i orijentaciju alata robota, već i njegovu brzinu kretanja To se posebno odnosi na vrh manipulatora i alat koji se koristi. Brzina kretanja robota određuje se indirektno, naime poznavajući geometriju robota, njegov položaj i brzinu kretanja svake upravljane koordinate moguće je izračunati brzinu vrha manipulatora pomoću *diferencijalne kinematike*.

Prema tome problem diferencijalne kinematike glasio bi: *kako na temelju položaja i orijentacije alata robota izračunati brzinu vrha manipulatora (alata)*? Zadaća je diferencijalne kinematike naći vezu između brzine zglobova te linearne i kutne brzine vrha manipulatora (alata). Matematički alat koji tome služi naziva se *Jacobian odnosno Jacobijeva matrica*.

4.1 Jacobieva matrica

Problem diferencijalne kinematike koji se želi riješiti pomoću Jacobijeve matrice zapravo je odrediti linearnu brzinu koordinata pozicije alata:

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \end{bmatrix}$$

Kao i kutnu brzinu $\boldsymbol{\omega}$ kao funkciju brzine zglobova robota:

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 & \cdots & \dot{\theta}_n \end{bmatrix}$$

Na sljedeći način:

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{J_P}(\boldsymbol{q}) \cdot \dot{\boldsymbol{q}}$$
$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{J_o}(\boldsymbol{q}) \cdot \dot{\boldsymbol{q}}$$

Gdje je:

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J_P}(\boldsymbol{q}) \\ \boldsymbol{J_o}(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix}$$

odnosno

$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})$ – Jacobijeva matrica

$\boldsymbol{J_P}(\boldsymbol{q})$ – Jacobijeva matrica pozicije

$\boldsymbol{J_o}(\boldsymbol{q})$ – Jacobijeva matrica orijentacije

Ako su položaj i orijentacija alata robota zadani pomoću kinematičkih parametra odnosno vektora konfiguracije zglobova robota, može li se Jacobian izračunati deriviranjem funkcije direktne kinematike u odnosu na varijable zglobova robota. Naime, je li u tom slučaju vrijedi:

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{J_P(q)} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} \rightarrow \dot{\boldsymbol{p}} = \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot \dot{\boldsymbol{q}}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{J_o(q)} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} \rightarrow \dot{\boldsymbol{\phi}} = \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot \dot{\boldsymbol{q}}$$

gdje je:

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} \varphi \\ \vartheta \\ \psi \end{bmatrix}$$

U ovom slučaju može pisati kako je:

$$\boldsymbol{J_A(q)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J_P(q)} \\ \boldsymbol{J_\phi(q)} \end{bmatrix}$$

Gdje je:

$\boldsymbol{J_A(q)}$ – Jacobijeva analitička matrica

Jednadžba diferencijalne kinematike glasi u matričnom zapisu:

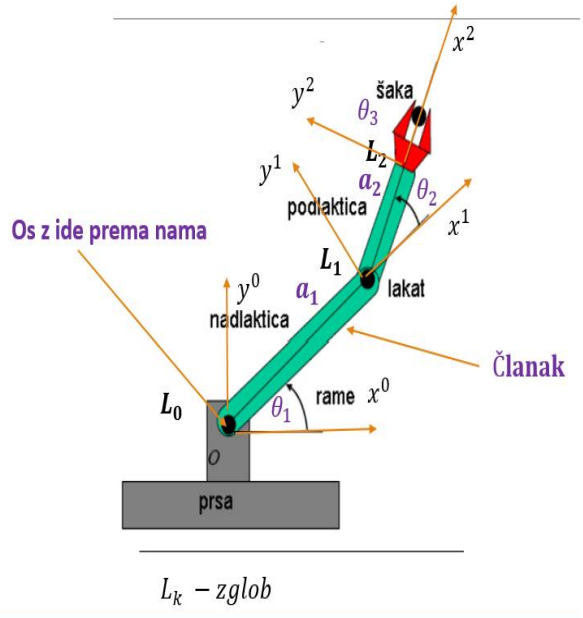
$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{p}} \\ \dot{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J_P(q)} \\ \boldsymbol{J_\phi(q)} \end{bmatrix} \cdot \dot{\boldsymbol{q}}$$

Gdje je:

$$\boldsymbol{J_P(q)} = \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{q}}$$

$$\boldsymbol{J_\phi(q)} = \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \boldsymbol{q}}$$

Za slučaj troosnog robota prikazanog na slici 1.37 vrijedit će:



$$\boldsymbol{J_A(q)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J_P} \\ \boldsymbol{J_\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial p_x}{\partial \theta_2} & \frac{\partial p_x}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial p_y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial p_y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial p_y}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial \theta_{123}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \theta_{123}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \theta_{123}}{\partial \theta_3} \end{bmatrix}$$

Sl. 1.37 – Troosni robot i matrica diferencijalne kinematike (Jacobian) (ibidem)

Kako je troosni robot zadan sljedećom matricom složene homogene transfromacije:

$$T_{baza}^{alat}(q) = \begin{bmatrix} C_{123} & -S_{123} & 0 & a_1 \cdot C_1 + a_2 \cdot C_{12} \\ S_{123} & C_{123} & 0 & a_1 \cdot S_1 + a_2 \cdot S_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Gdje je:

$$C_{123} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$S_{123} = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$C_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$S_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

Kako je pozicija alata jednaka:

$$\boldsymbol{Poz} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cdot cos\theta_1 + a_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ a_1 \cdot sin\theta_1 + a_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cdot C_1 + a_2 \cdot C_{12} \\ a_1 \cdot S_1 + a_2 \cdot S_{12} \\ d_3 \end{bmatrix}$$

I orijentacija alata jednaka:

$$\theta_{ort} = \theta_{123} = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$

To će vrijediti:

$$\frac{\partial p_x}{\partial \theta_1} = \frac{\partial}{\partial \theta_1}(a_1 \cdot C_1 + a_2 \cdot C_{12}) = -(a_1 \cdot S_1 + a_2 \cdot S_{12})$$

$$\frac{\partial p_x}{\partial \theta_2} = \frac{\partial}{\partial \theta_2}(a_1 \cdot C_1 + a_2 \cdot C_{12}) = -a_2 \cdot S_{12}$$

$$\frac{\partial p_x}{\partial \theta_3} = 0$$

$$\frac{\partial p_y}{\partial \theta_1} = \frac{\partial}{\partial \theta_1}(a_1 \cdot S_1 + a_2 \cdot S_{12}) = a_1 \cdot C_1 + a_2 \cdot C_{12}$$

$$\frac{\partial p_y}{\partial \theta_2} = \frac{\partial}{\partial \theta_2}(a_1 \cdot S_1 + a_2 \cdot S_{12}) = a_2 \cdot C_{12}$$

$$\frac{\partial p_y}{\partial \theta_3} = 0$$

$$\frac{\partial \theta_{123}}{\partial \theta_1} = \frac{\partial}{\partial \theta_1}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = 1$$

$$\frac{\partial \theta_{123}}{\partial \theta_2} = \frac{\partial}{\partial \theta_2}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = 1$$

$$\frac{\partial \theta_{123}}{\partial \theta_3} = \frac{\partial}{\partial \theta_3}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = 1$$

Slijedom prije napisanog sada vrijedi:

$$\boldsymbol{J_A(q)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J_P} \\ \boldsymbol{J_\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(a_1 \cdot S_1 + a_2 \cdot S_{12}) & -a_2 \cdot S_{12} & 0 \\ a_1 \cdot C_1 + a_2 \cdot C_{12} & a_2 \cdot C_{12} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_y & -a_2 \cdot S_{12} & 0 \\ p_x & a_2 \cdot C_{12} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Odnosno:

$$\boldsymbol{J_P(q)} = \begin{bmatrix} -p_y & -a_2 \cdot S_{12} & 0 \\ p_x & a_2 \cdot C_{12} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J_\phi(q)} = [1 \quad 1 \quad 1]$$

Linearne brzine bile bi jednake:

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \end{bmatrix} = \boldsymbol{J_P(q)} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} -p_y & -a_2 \cdot S_{12} & 0 \\ p_x & a_2 \cdot C_{12} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

Po pojedinoj osi one iznose:

$$v_x = \dot{p}_x = -(p_y \cdot \dot{\theta}_1 + a_2 \cdot S_{12} \cdot \dot{\theta}_2)$$

$$v_y = \dot{p}_y = p_x \cdot \dot{\theta}_1 + a_2 \cdot C_{12} \cdot \dot{\theta}_2$$

$$v_z = 0$$

Translacijska brzina v sada iznosi:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(\dot{p}_x)^2 + \left(\dot{p}_y\right)^2}$$

Kutna brzina ω iznosi:

$$\omega = \boldsymbol{J_\phi(q)} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} = [1 \quad 1 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$$

Rješen je problem diferencijalne kinematike jer je na temelju položaja i orijentacije alata robota izračunata brzina vrha manipulatora (alata) odnosno linearne i kutna brzina vrha manipulatora (alata), kao i translacijska brzina kretanja vrha manipulatora. Neka su kinematički parametri robota zadani Tablicom 1.1 i neka je vrijeme rada zglobova robota $T_r = 5\ sek$. Kako bi svi zglobovi robota u isto vrijeme završili svoj rad, pri čemu se zglobovi okreću konstantnom kutnom brzinom, potrebno je izračunate kutne brzine za zadani vektor konfuguracije zglobova $\theta = \theta(45^\circ, -15^\circ, 20^\circ)$. Slijedom toga vrijedi:

$$\omega_1 = \frac{\theta_1}{T_r} = \frac{45^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}}{5} = 0{,}1571 ra\ d/s\ ek$$

$$\omega_2 = \frac{\theta_2}{T_r} = \frac{-15^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}}{5} = -0{,}0524 ra\, d/s\, ek$$

$$\omega_3 = \frac{\theta_3}{T_r} = \frac{20^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}}{5} = 0{,}0698 ra\, d/s\, ek$$

Na temelju izračunatih kutnih brzina vrijedi:

$$\begin{bmatrix}\dot{p}_x \\ \dot{p}_y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-p_y & -a_2 \cdot S_{12} \\ p_x & a_2 \cdot C_{12}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\omega_1 \\ \omega_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-19{,}14 & -10 \cdot \sin(45^\circ - 15^\circ) \\ 22{,}8 & 10 \cdot \cos(45^\circ - 15^\circ)\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0{,}1571 \\ -0{,}0524\end{bmatrix}$$

Odnosno:

$$\dot{p}_x = -19{,}14 \cdot 0{,}157 - 10 \cdot 0{,}5 \cdot (-0{,}0524) = -2{,}744\, c\, m/s\, ek$$

$$\dot{p}_y = 22{,}8 \cdot 0{,}157 + 10 \cdot 0{,}866 \cdot (-0{,}0524) = 3{,}128\, c\, m/s\, ek$$

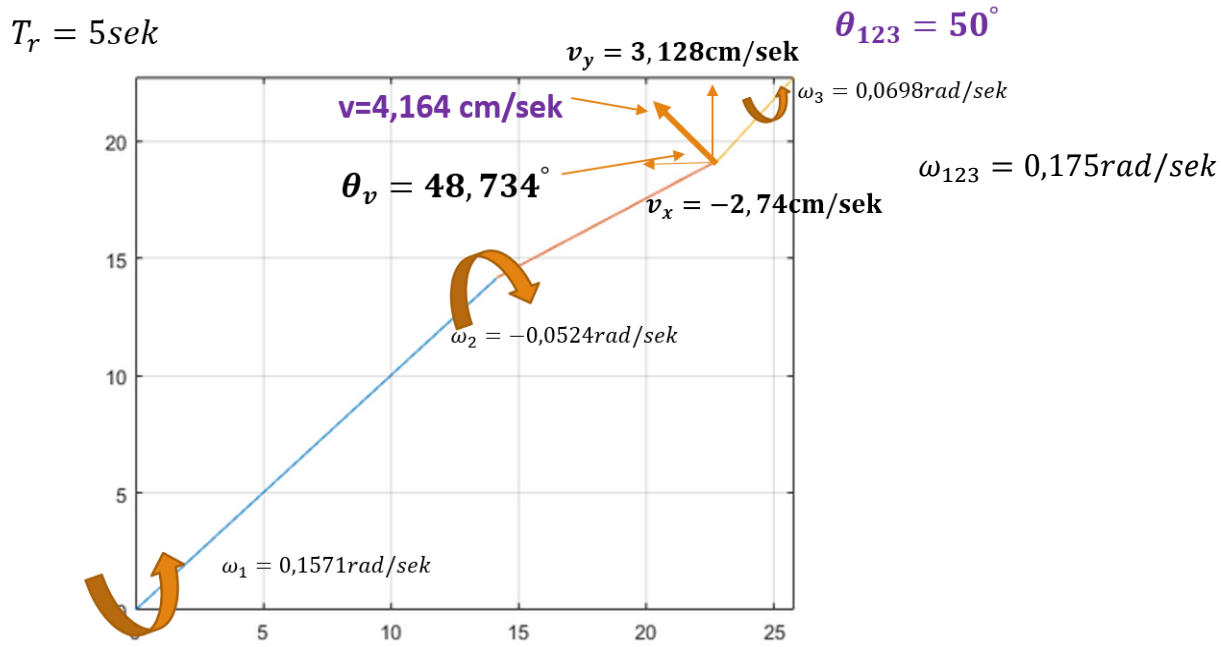
$$v = \sqrt{(\dot{p}_x)^2 + (\dot{p}_y)^2} = \sqrt{(-2{,}744)^2 + (3{,}128)^2} = 4{,}164\, c\, m/s\, ek$$

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0{,}1571 - 0{,}0524 + 0{,}0698 = 0{,}1745\, ra\, d/s\, ek$$

Kut translacijske brzine u odnosu na koordinatni sustav baze iznosi:

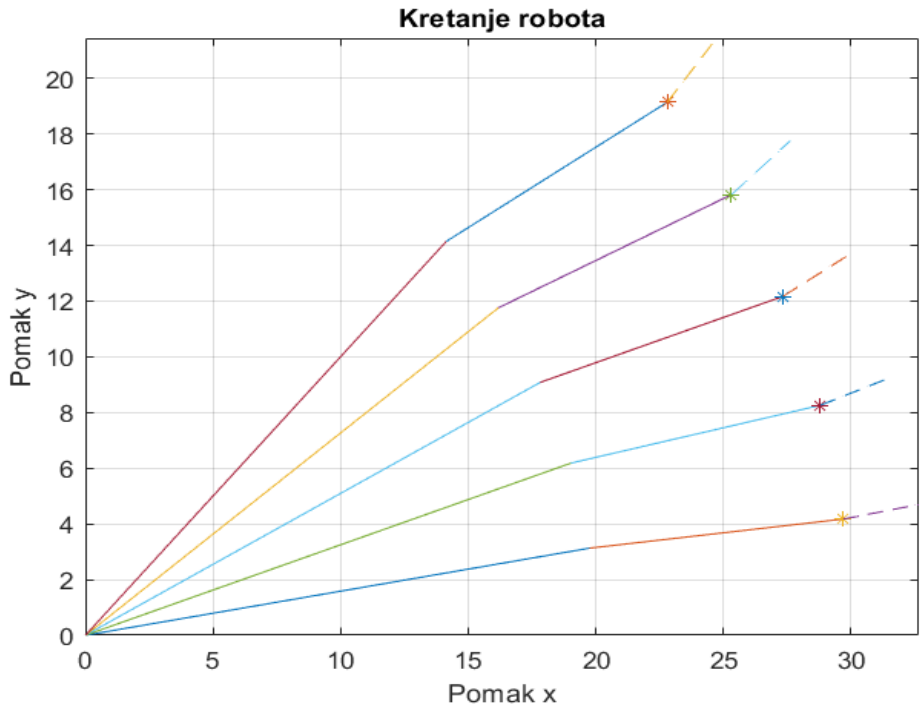
$$\theta_v = \arctan\left(\left|\frac{v_y}{v_x}\right|\right) = \arctan\left(\left|\frac{3{,}128}{-2{,}744}\right|\right) = 48{,}734^\circ$$

Na slici 1.38 prikazani su rezultati diferencijalne kinematike kretanja robota.



Sl. 1. 38 - Diferencijalna kinematika kretanja robota

Kretanje robota određeno je vremenskim intervalom $0 \leq T_r \leq 5\ sek$ pri čemu je kutna brzina rotacije konstantna $\omega_{123} = 0{,}175 rad/sek$, dok se translacijska brzina mijenja u intervalu $0{,}4719 \leq v \leq 4{,}164\ c\,m/s\ ek$. Na slici 1.39 prikazano je kretanje robota o početne pozicije do zadane konfiguracije $\theta = \theta(45^{\circ}, -15^{\circ}, 20^{\circ})$ u intervalu od 5 sekundi.



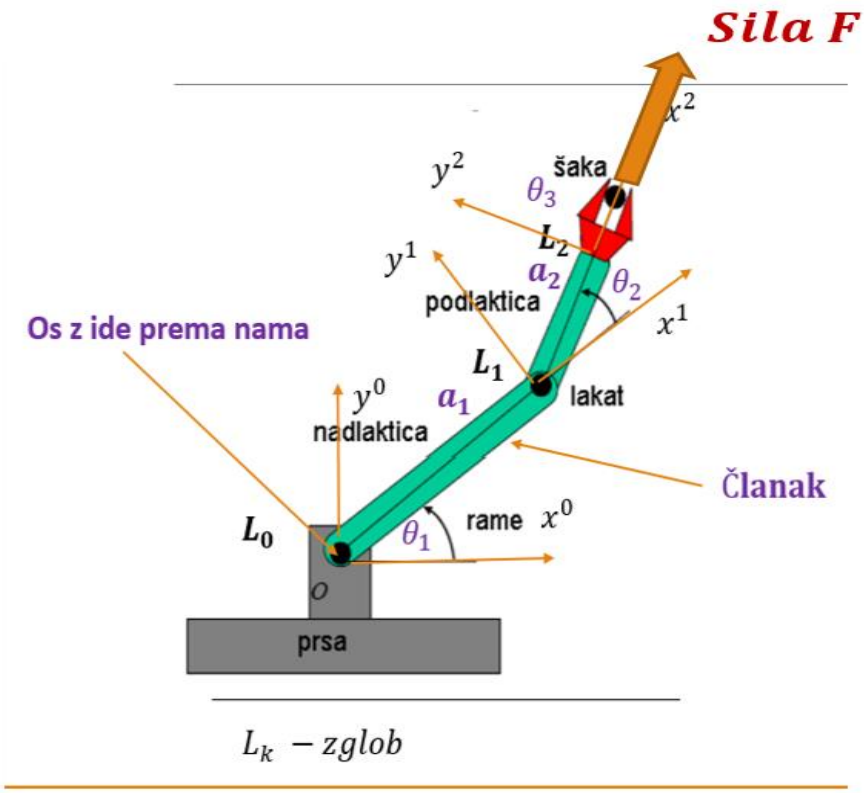
Sl. 1.39 – Kretanje robota o početne pozicije do zadane konfiguracije $\theta = \theta(45^{\circ}, -15^{\circ}, 20^{\circ})$ u intervalu od 5 sekundi

Diferencijalna kinematika odnosno Jacobijanova matrica predstavlja važan instrument u izvođenju dinamičkih jednadžbi kretanja robota kao i projektiranja upravljanja robota u operacijskom prostoru.

4.2 Jacobieva transponirana matrica

Nakon obavljenog kretanja, kako je prikazano na slici 1.39, robot zauzima zadanu konfiguraciju te je ostvaren položaj i orijentacija alata. Dakle, robot se nalazi u stanju ravnoteže. Ako se robotom želi ostvariti određena sila F na vrhu manipulatora kada se robot nalazi u stanju ravnoteže, onda se radi problemu *statike* robota. Prema tome problem statike glasio bi: *kako odrediti zakretne momente u zglobovima robota kada se robot nalazi u stanju ravnoteže da bi se ostvarila zadana sila na vrhu manipulatora (alata)?*

Na slici 1.40 prikazana je smjer sile F koju mora ostavriti robot za zadni vektor konfiguracije zglobova robota $\boldsymbol{q}$. Potrebno je odrediti vrijednosti zakretnoh momeneta M_1 i M_2 u zglobovima robota.



Sl. 1.40 – Problem statike robota i ostvarenje sile u ravnotežnom položaju (ibidem)

Vezu između sila na vrhu manipulatora F i zakretnih monenta u zglobova M_1 i M_2 kada se robotski manipulator nalazi u stanju ravnoteže određuje se pomoću Jacobijeve transonirane matrice kako slijedi:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{J^T(q)} \cdot \boldsymbol{F}$$

Odnosno za robot na slici 1.40 vrijedi:

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{J^T(q)} \cdot \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix}$$

Gdje je:

$$F_x = F \cdot \cos\phi$$
$$F_y = F \cdot \sin\phi$$

Kako je Jakobijava matrica zadana i glasi:

$$\boldsymbol{J_P(q)} = \begin{bmatrix} -p_y & -a_2 \cdot S_{12} & 0 \\ p_x & a_2 \cdot C_{12} & 0 \end{bmatrix}$$

Jacobijeva transponirana matrica iznosi:

$$\boldsymbol{J^T(q)} = \begin{bmatrix} -p_y & p_x \\ -a_2 \cdot S_{12} & a_2 \cdot C_{12} \end{bmatrix}$$

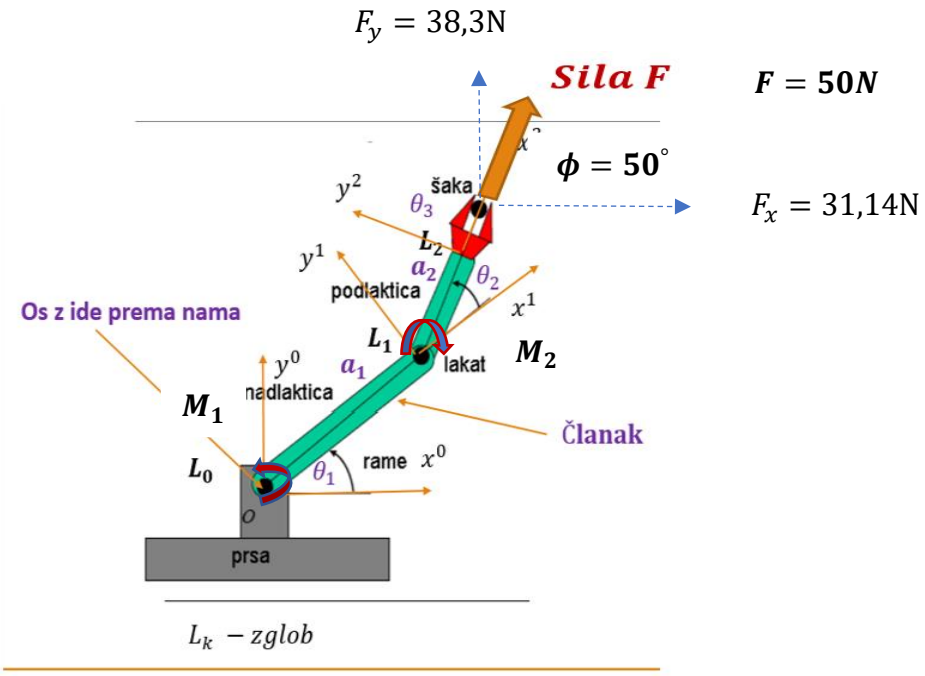
Prema tome vrijedi:

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_y & p_x \\ -a_2 \cdot S_{12} & a_2 \cdot C_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix}$$

Neka je npr. sila koja se mora ostvariti na vrhu alata $F = 50N$ i neka je zadana prethodno definirana konfiguracija zglobova robota $\theta = \theta(45^\circ, -15^\circ, 20^\circ)$ pri čemu je $d_3 = 0$. Slijedom definirane konfiguracije zglobova vrijedi da je $\phi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$ odnosno slijedi:

$$F_x = F \cdot \cos\phi = 50 \cdot \cos 50^\circ = 31{,}14\text{N}$$
$$F_y = F \cdot \sin\phi = 50 \cdot \sin 50^\circ = 38{,}3\text{N}$$

kako je prikazano na slici 1.41 a).



Sl. 1.41a) – Sila na vrhu alata manipulatora (ibidem)

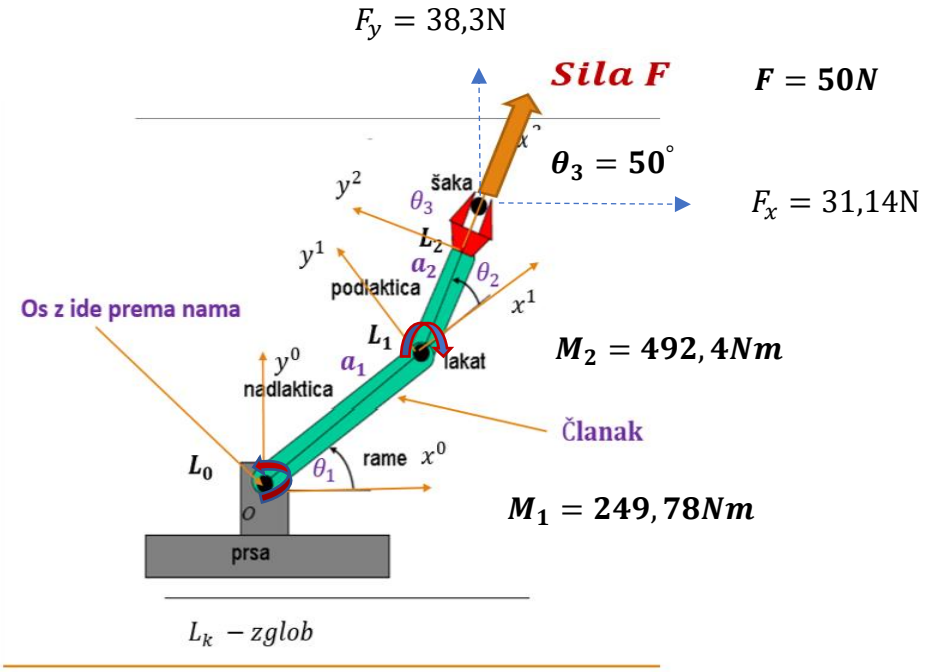
Slijedom prije napisanoga vrijedi:

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_y & p_x \\ -a_2 \cdot S_{12} & a_2 \cdot C_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19{,}4 & 22{,}8 \\ 10 \cdot \sin(30^\circ) & 10 \cdot \cos(30^\circ) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 31{,}14 \\ 38{,}3 \end{bmatrix}$$

Rezultat iznosi:

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 249{,}78Nm \\ 492{,}4Nm \end{bmatrix}$$

Na slici 1.41 b) prikazan je rezultat izračuna potrebnih zakretnih momenata.



Sl. 1.41b) – Momenti za ostvarenje sile na vrhu alata manipulatora (ibidem)

Određeni su momenti u zglobovima robota na temelju kojih je moguće ostvariti zadanu silu na vrhu alata manipulatora.

U ovom poglavlju obrađena su dva problema i to: kako na temelju položaja i orijentacije alata robota izračunati brzinu vrha manipulatora (alata) odnosno kako odrediti zakretne momente u zglobovima robota kada se robot nalazi u stanju ravnoteže da bi se ostvarila zadana sila na vrhu manipulatora (alata). Rješavanje ovi probelma pripada području direktne kinematike koja se rješava pomoću Jakobijeve matrice i Jacobijeve transponirane matrice.

U sljedećem poglavlju pozornost će biti posvećena indirektnoj kinematici koja predstavlja obrnuti postupak određivanja vektora konfiguracije zglobova robota ako je poznat položaj i orijentacija vrha manipulatora (alata).

5. INDIREKTNA KINEMATIKA

Indirektna kinematika sastoji se od određivanja varijabli zglobova koje odgovaraju zadanom položaju kao i orijentaciji vrha manipulatora (alata). Prema tome, problem indirektne kinematike bio bi sljedeći: *kako na temelju zadane pozicija i orijentacija vrha manipulatora (alata) u odnosu na koordinatni sustav pridružen bazi robota odrediti vektor varijabli zglobova robotskog manipulatora?*

Slijedom prije definiranog problema poznata je pozicija $\boldsymbol{Poz}$ i orijentacija $\boldsymbol{\phi}$ u operacijskom prostoru tj.

$$\boldsymbol{Poz} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \\ \vartheta \end{bmatrix}$$

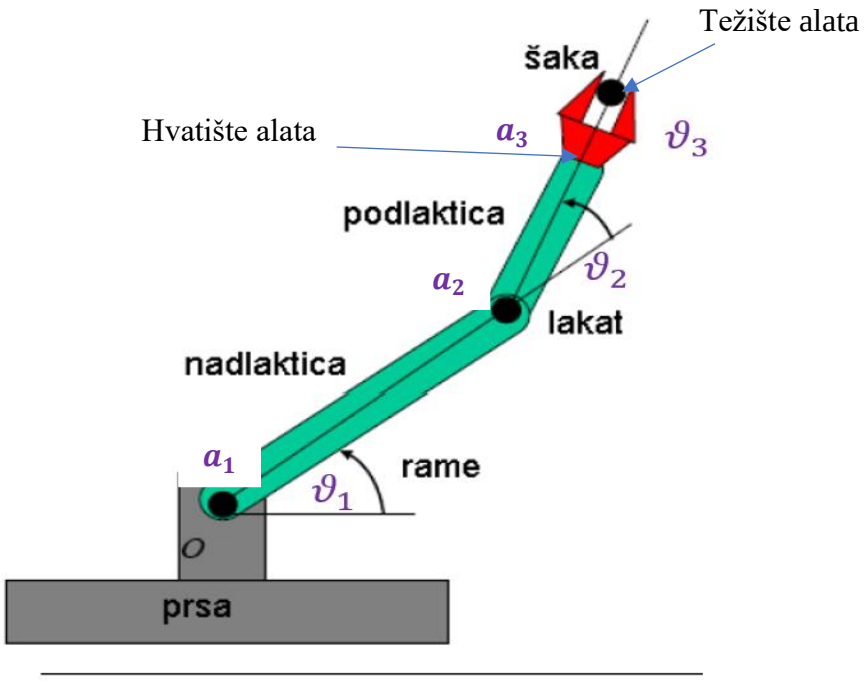
Traži se vektor konfiguracije zglobova alata $\boldsymbol{q}$ tj.

$$\boldsymbol{q} = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_k]^T$$

Gdje:

$$q_k = q(\theta_k, d_k, \alpha_k, a_k)$$

Naka je zadan troosni robot prikazana na slici 1.42.

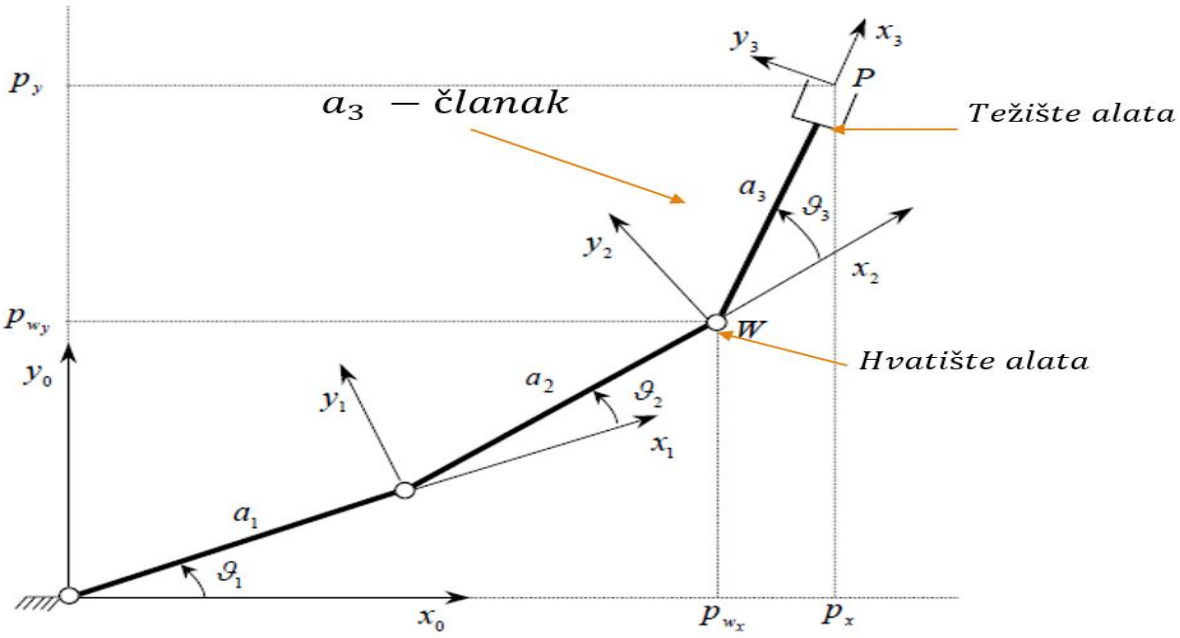


Sl. 1.42 – Toosni robot s težištem i hvatištem alata (ibidem)

Traži se vektor konfiguracije zglobova robota:

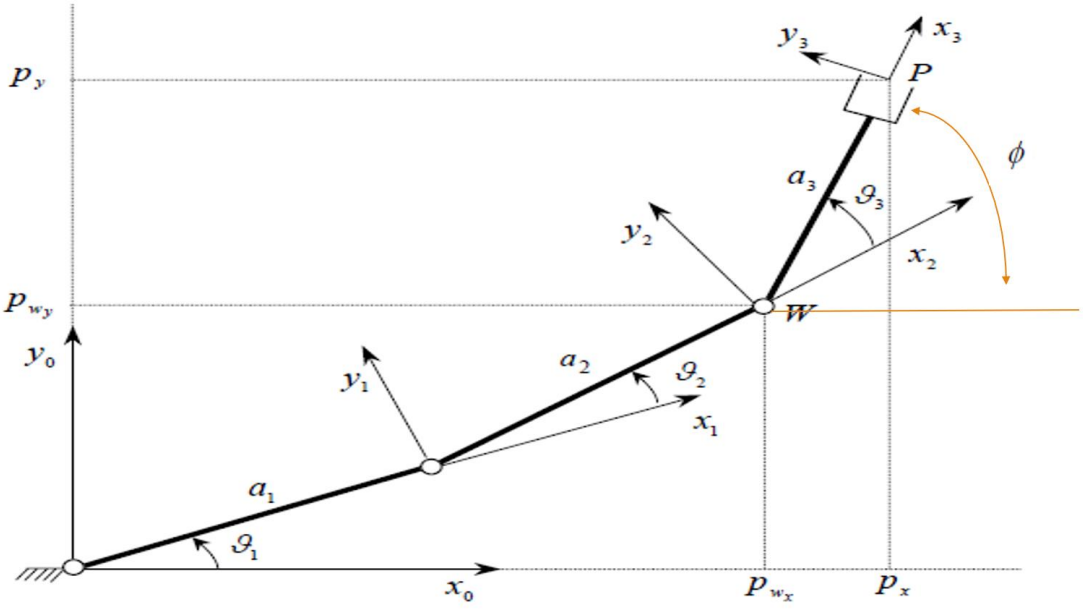
$$\vartheta = [\vartheta_1 \quad \vartheta_2 \quad \vartheta_3]^T$$

Polazeći od slike 1.42 izrađen shematski prikaz robota na slici 1.43, gdje članak a_3 dužina između hvatišta (W) i težišta alata (P).



Sl. 1.43 – Shematski prikaz toosnog robota (Velagić J,)

Na temelju slike 1.43 može se odrediti orijentacija alata kako prikazuje slika 1.44 a):



Sl. 1.44 a) – Orijentacija alata (ibidem)

Prema slici 1.44 a) vrijedi:

$$\phi = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3$$

Kako je dužina a_3 poznata jer se radi o trećem članku, može se na temelju orijentacije alata ϕ i pozicije težišta $p = [p_x \quad p_y]^T$ odrediti pozicija hvatišta $p_W = [p_{W_x} \quad p_{W_y}]^T$ kako slijedi:

$$p_{W_x} = p_x - a_3 \cdot \cos\phi$$

$$p_{W_y} = p_y - a_3 \cdot \sin\phi$$

Jednako tako može se odrediti kut ϑ_3 kako slijedi:

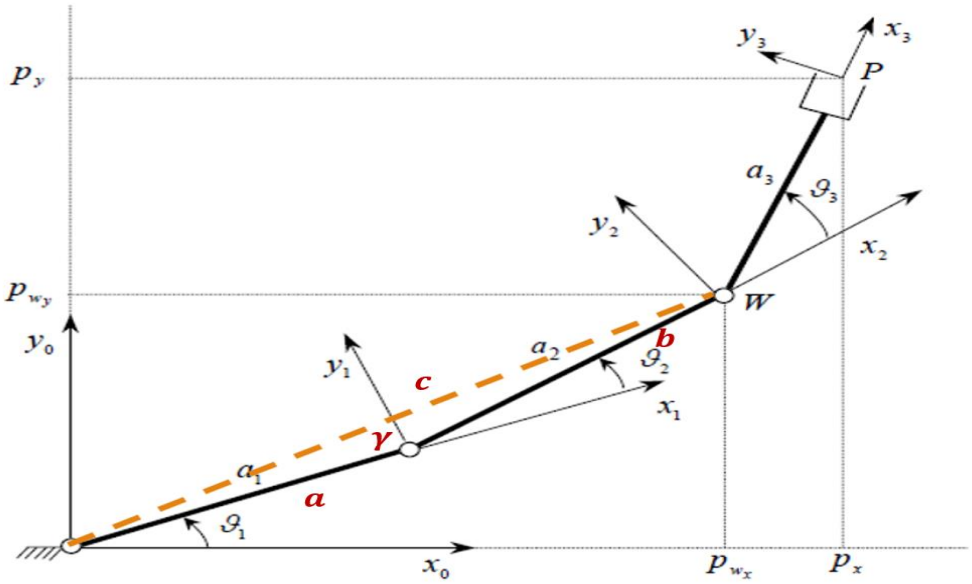
$$\vartheta_3 = \vartheta_1 + \vartheta_2 - \phi$$

Kuta ϑ_2 moguće je odrediti na temelju kosinusovog poučka koji glasi:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\gamma}$$



Analogno navedenom slijedi prikazano na slici 1.44 b).



Sl. 1.44 b) – Primjena kosinusovog poučka u određivanju kuta ϑ_2 (ibidem)

Sa slike 1.44 b) može se uočiti sljedeće:

$$\gamma = 180^\circ - \vartheta_2$$

$$a = a_1 \; i \; b = a_2$$

$$c^2 = p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2$$

Prema tome vrijedi:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot cos\gamma$$

Odnosno:

$$p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \cos\,(180^\circ - \vartheta_2)$$

Može se pisati:

$$\cos\vartheta_2 = \frac{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2 - a_1^2 - a_2^2}{2 \cdot a_1 \cdot a_2}$$

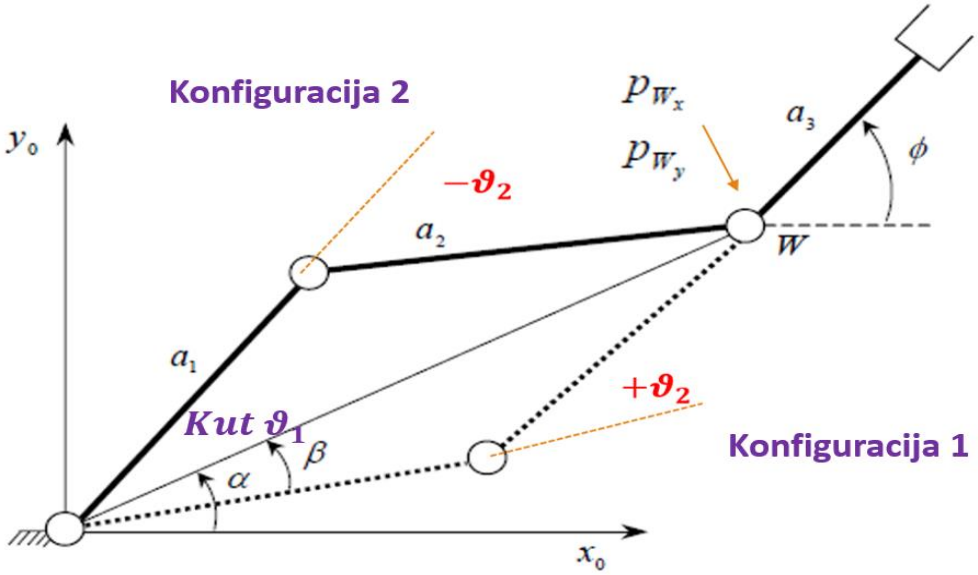
Kuta ϑ_2 iznosi:

$$\vartheta_2 = \pm\arccos\left(\frac{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2 - a_1^2 - a_2^2}{2 \cdot a_1 \cdot a_2}\right)$$

Geometrija rješenja moguća je jedino ako vrijedi:

$$\sqrt{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2} \leq a_1 + a_2$$

Moguće su dvije konfiguracije u određivanju kuta ϑ_1 kako prikazuje slika 1.44 c).



Sl. 1.44 c) – Konfiguracije u određivanju kuta ϑ_1 (ibidem)

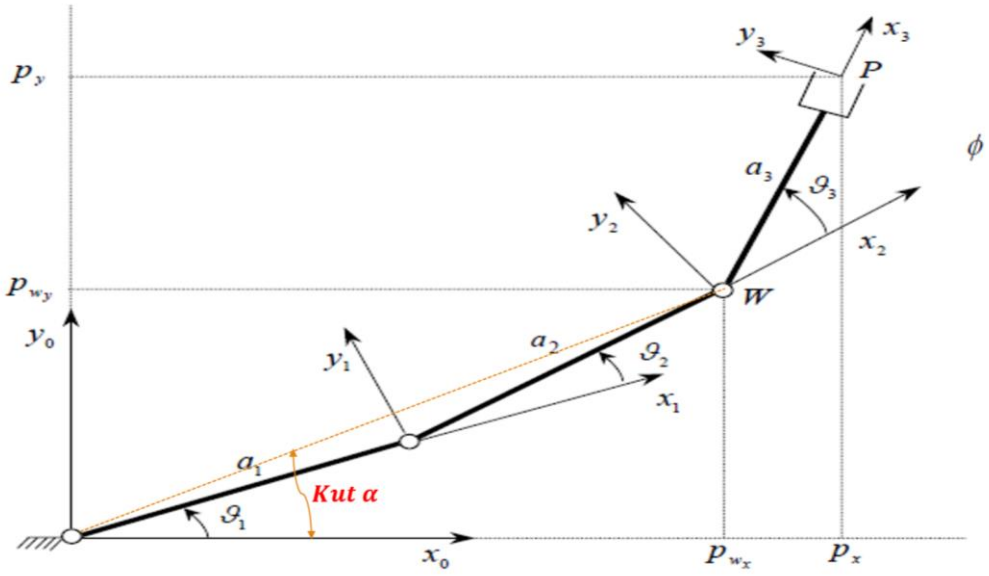
Konfiguracija 1 prisutna je ako vrijedi:

$$\vartheta_1 = \alpha + \beta$$

Konfiguracija 2 prisutna je ako vrijedi:

$$\vartheta_1 = \alpha - \beta$$

Kut α moguće je odrediti na način kako je prikazano na slici 1.44 d).

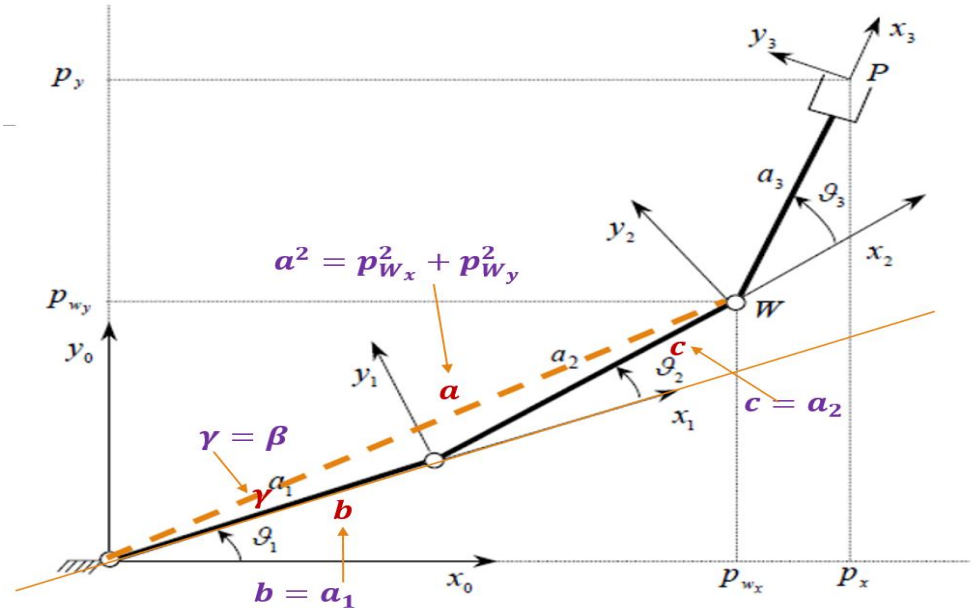


Sl. 1.44 d) – Određivanje kuta α (ibidem)

Prema slici 1.44 d) vrijedi:

$$\alpha = arctan\frac{p_{W_y}}{p_{W_x}}$$

Kut β moguće je prema slici 1.44 b) izračunati jednako tako pomoću kosinusovog poučka, kako je prikazano na slici 1.44 e).



Sl. 1.44 e) – Određivanje kuta β (ibidem)

Prema slici 1.44 e) vrijedi:

$$\gamma = \beta$$

$$a = a_1 \; i \; c = a_2$$

$$a^2 = p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2$$

Slijedi:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

Odnosno:

$$a_2^2 = a_1^2 + p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2 - 2 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \cos\beta$$

Kut β iznosi:

$$\beta = arccos(\frac{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2 + a_1^2 - a_2^2}{2 \cdot a_1 \cdot \sqrt{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2}})$$

Prema tome kut ϑ_1 iznosi:

$$\vartheta_1 = \alpha \pm \beta = arctan\frac{p_{W_y}}{p_{W_x}} \pm arccos(\frac{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2 + a_1^2 - a_2^2}{2 \cdot a_1 \cdot \sqrt{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2}})$$

Na ovaj način određena je konfiguracija zglobova robota $\vartheta = [\vartheta_1 \quad \vartheta_2 \quad \vartheta_3]^T$ za zadani položaj i orijentaciju vrha manipulatora (alata).

Primjer br. 3

Zadani su sljedeći parametri troosnog robota kako slijedi:

$$a_1 = 100cm; \; a_2 = 50cm; \; a_3 = 15cm$$

$$p_x = 140cm; \; p_y = 80cm$$

$$\phi = 20^\circ$$

Potrebno je odrediti konfiguraciju 1 i 2 zglobova robota $\vartheta = [\vartheta_1 \quad \vartheta_2 \quad \vartheta_3]^T$. Na početku je nužno provjeriti je li rješenje moguće tj. vrijedi li:

$$\sqrt{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2} \leq a_1 + a_2$$

Vrijednosti iznose:

$$p_{W_x} = p_x - a_3 \cdot \cos\phi = 140 - 15 \cdot \cos 20^\circ = 125{,}9$$

$$p_{W_y} = p_{W_y} = p_y - a_3 \cdot \sin\phi = 80 - 15 \cdot \sin 20^\circ = 74{,}87$$

Slijed i da je:

$$\sqrt{125{,}9^2 + 74{,}87^2} \leq 100 + 50$$

Odnosno:

$$146{,}48 \leq 150$$

To znači kako je rješenje moguće.

Sada dalje slijedi izračun kuta α:

$$\alpha = arctan\left(\frac{p_{W_y}}{p_{W_x}}\right) = arctan\left(\frac{74{,}87}{125{,}9}\right) = 30{,}73^\circ$$

Nadalje kuta β:

$$\beta = arccos\left(\frac{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2 + a_1^2 - a_2^2}{2 \cdot a_1 \cdot \sqrt{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2}}\right) = arccos\left(\frac{125{,}9^2 + 74{,}87^2 + 100^2 - 50^2}{2 \cdot 100 \cdot \sqrt{125{,}9^2 + 74{,}87^2}}\right) = 8{,}72^\circ$$

Kut ϑ_1 sada iznosi:

$$\vartheta_1 = \alpha \pm \beta = 30{,}73^\circ \pm 8{,}72^\circ$$

U *konfiguraciji 1* za kut $\vartheta_1$vrijedi:

$$\vartheta_1 = \alpha - \beta = 44{,}6^\circ - 39{,}44^\circ = 22^\circ$$

U *konfiguraciji 2* za kut $\vartheta_1$vrijedi:

$$\vartheta_1 = \alpha + \beta = 30{,}6^\circ + 8{,}72^\circ = 39{,}46^\circ$$

Kut ϑ_2 sada iznosi:

$$\vartheta_2 = \pm arccos\frac{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2 - a_1^2 - a_2^2}{2 \cdot a_1 \cdot a_2}$$

$$= \pm arccos\left(\frac{125{,}9^2 + 74{,}87^2 - 100^2 - 50^2}{2 \cdot 100 \cdot 50}\right) = \pm 26{,}4^\circ$$

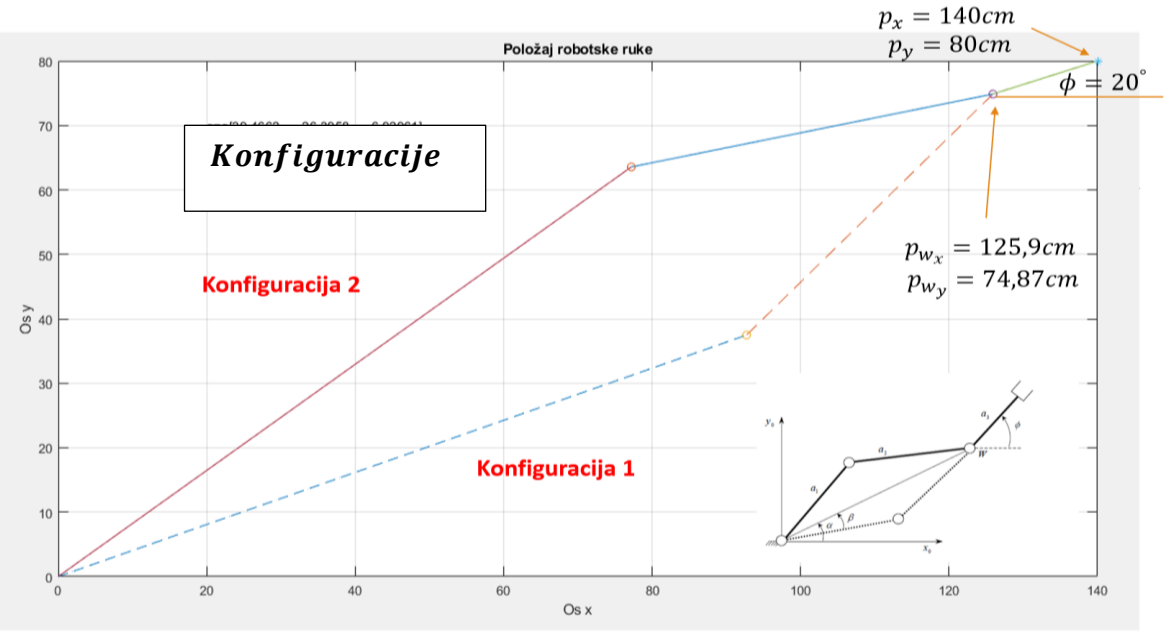
Kut ϑ_2 iznosi u *konfiguraciji 1*:

$$\vartheta_3 = \phi - \vartheta_1 - \vartheta_2 = 20^\circ - 22^\circ - 26{,}4^\circ = -28{,}4^\circ$$

Kut ϑ_2 iznosi u *konfiguraciji 2*:

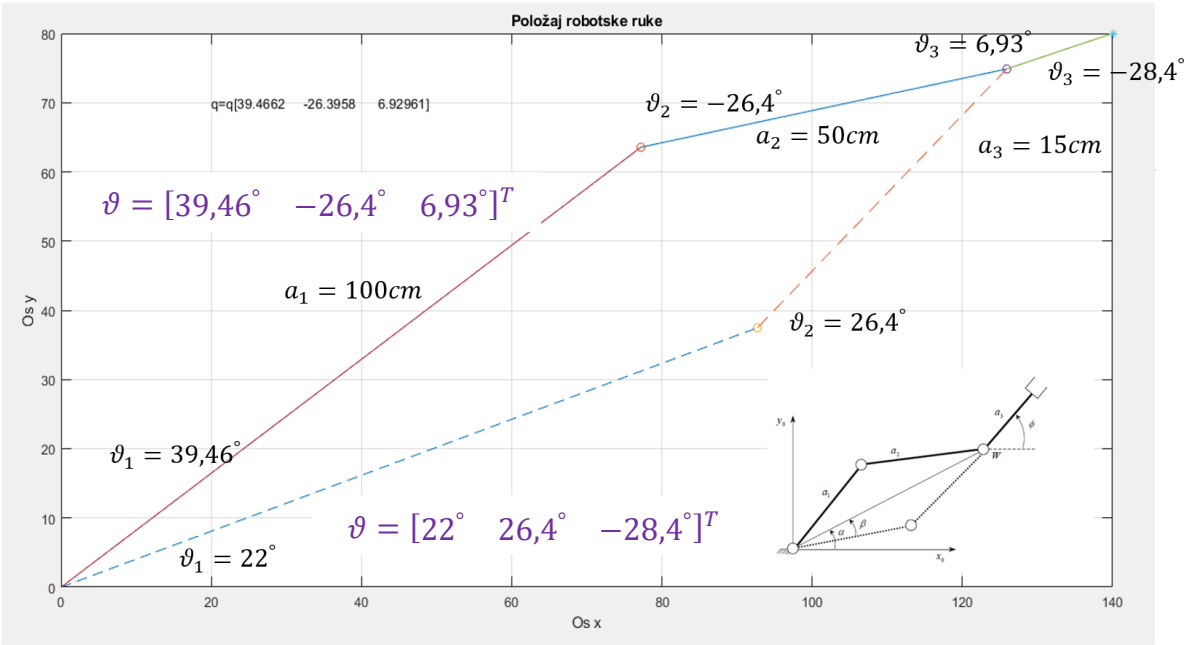
$$\vartheta_3 = \phi - \vartheta_1 - \vartheta_2 = 20^\circ - 39{,}6^\circ + 26{,}4^\circ = 6{,}93^\circ$$

Na slici 1.45 a) prikazane su konfiguracije zglobova robota za zadanu poziciju i orijentaciju vrha manipulatora (alata).



Sl. 1.45 a) – Konfiguracije zglobova robota za zadanu poziciju i orijentaciju vrha manipulatora (alata)

Na slici 1.45 b) prikazani su izračunati kutevi vektora konfiguracije zglobova robota pomoću inirektne kinematike $\vartheta = [\vartheta_1 \quad \vartheta_2 \quad \vartheta_3]^T$.



Sl. 1.45 b) – Izračunati kutevi vektora konfiguracije zglobova robota

Na temelju zadane pozicijei orijentacije vrha manipulatora (alata) u odnosu na koordinatni sustav pridružen bazi robota određen je vektor varijabli zglobova robotskog manipulatora za konfiguraciju 1 i 2.

6. PLANIRANJE TRAJEKTORIJE ROBOTA

U izvršenju svog zadatka alat robota mora proći kroz niz točaka u prostoru. Te točke moraju biti planirane i zajedniči čine putanju po kojoj se vrh manipulatora (alat) kreće. Cilj postupka planiranja trajektorije robota je generiranje takvog kretanja koje će slijediti zadanu putanju. Dva su postupka kako se generira trajektorija i to:

a) Od točke do točke (engl. *point-to-point*) – kada su zadane samo početna i krajnja točka kretanja alata robota,
b) Kretaanje po putanji (engl. *path motion*) – kada je zadan skup točaka duž putanje.

Planiranje trajektorije generira se u vremenskim intervalima na način da se pomoću polinoma interpolira zadana trajektorija. Naravno takvo planiranje trajektorije ima i svoja ograničenja kao što su:

- geometrija robota i ograničenja radnog prostora koja proizlaze iz konstrukcije robota i njegovog pogona,
- kinematička i dinamička ograničenja koja proizlaze iz maksimalno dopuštene brzine kretanja i ubrzanja.

Potrebno je jednako tako jednoznačno definirati pojmove putanja i trajektorija. Putanja je skup geometrijskih točaka u operacijskom prostoru koje robot mora slijediti pri izvršavanju određenog zadatka, a trajektorija je krivulja na kojoj se očituje kretanje i izračun pozicije zglobova svih osi robota u skladu s zadanom putanjom kretanja vrha manipulatora (alata). Dakle, trajektorija podrazumijeva podatke o poziciji, brzini i ubrzanjima zglobova robota. U općem slučaju planiranje trajektorije robota podrazumijeva:

a) opis putanje u operacijskom prostoru,
b) ograničenja na putanji,
c) ograničenja dinamike robota,
d) poziciju, brzinu i ubrzanje zglobova robota u zadanim vremenskim intervalima.

Najčešće se zadaje ukupno vrijeme realizacije trajektorije, ograničenja vezana uz maksimalnu brzinu i ubrzanje, i brzina i ubrzanje u nekim točkama putanje koje su posebno značajne za izvršenje zadaće.

U nastvaku će se prvo obraditi planiranje trajektorije u prostoru zglobova na primjeru troosnog robota, a zatim planiranje trajektorije u operacijskom prostoru.

6.1 Planiranje trajektorije u prostoru zglobova

Projektiranje trajektorije u prostoru zglobova provodi se generiranjem trajektorije na principu *point-to-point (od točke do točke)*. Veliki je broj primjena odnosno operacija koje izvodi robot uz kretanje od točke do točke. Takve su npr. operacije točkastog zavarivanja, bušenja, podizanja i spuštanja tereta, i sl. Zajedničko za prije navedene operacije je da se pomak odvija u zadanu poziciju, da se vrh manipulatora zaustvalja u zadanoj poziciji, da se u toj poziciji obavlja zadaća i nakon što je zadaća obavljena ostvaruje se pomak u sljedeću poziciju. Kod kretanja od točke do točke brzina zakretanja zglobova robota nije toliko važna, već je važno da se svaka os zgloba okreće sa makimalno dopuštenom kutnom brzinom i da sve osi zglobova svoje kružno kretanje završe istovremeno. To nadalje znači da će se maksimalnom brzinom okretati ona os zgloba na mora prijeći najveći kutni pomak, dok će se ostale osi sporije okretati.

Algoritam planiranja trajektorije *od točke do točke* podrazumijeva generiranje funkcije $q(t)$ pomoću kubnog polinoma:

$$q(t) = a_3 \cdot t^3 + a_2 \cdot t^2 + a_1 \cdot t + a_0$$

Gdje su:

a_k ($k = 0\ do\ 3$) – koeficijenti poilinoma

Pri čemu je zadano vrijeme kretanja od početne do konačne točke t_f. U slučaju kada su zadani početni uvjeti vrijedi:

- početni uvjeti pomaka na početku i kraju putanje: $q_i = q(0)$ i $q_f = q(t_f)$
- početni uvjeti brzine na početku i kraju putanje: $\dot{q}_i = \dot{q}(0)$ i $\dot{q}_f = \dot{q}(t_f)$

Deriviranjem kubnog polinoma $q(t)$ slijedi polinom brzine koja ima parabolični profil kako slijedi:

$$\dot{q}(t) = 3 \cdot a_3 \cdot t^2 + 2 \cdot a_2 \cdot t + a_1$$

Deriviranjem prabaoličnog polinoma brzine $\dot{q}(t)$ slijedi linearni profil ubrzanja:

$$\ddot{q}(t) = 6 \cdot a_3 \cdot t + 2 \cdot a_2$$

Prema tome, kako bi se odredili profili pomaka, brzine i ubrzanja potrebno je odrediti koeficijente polinoma $q(t)$. Isti se mogu odrediti ako su poznati početni uvjeti i neka su zadani sljedeći početni uvjeti:

$$q_i = 0\ ;\ q_f = \pi;\ \dot{q}_i = 0 \text{ i } \dot{q}_f = 0$$

Na osnovu prije navedenog slijedi:

$$q(0) = a_3 \cdot 0^3 + a_2 \cdot 0^2 + a_1 \cdot 0 + a_0 = 0$$

$$q(t_f) = a_3 \cdot {t_f}^3 + a_2 \cdot {t_f}^2 + a_1 \cdot t_f + a_0 = \pi$$

$$\dot{q}(0) = 3 \cdot a_3 \cdot 0^2 + 2 \cdot a_2 \cdot 0 + a_1 = 0$$

$$\dot{q}(t_f) = 3 \cdot a_3 \cdot {t_f}^2 + 2 \cdot a_2 \cdot t_f + a_1 = 0$$

Prema tome vrijedi:

$$a_0 = 0 \text{ i } a_1 = 0$$

Ako je zadano vrijeme kretanja od početne do konačne točke $t_f = 1sek$, tada je:

$$a_3 \cdot 1^3 + a_2 \cdot 1^2 + 0 \cdot 1 + 0 = \pi$$

$$3 \cdot a_3 \cdot 1^2 + 2 \cdot a_2 \cdot 1 + 0 = 0$$

Odnosno:

$$a_3 + a_2 = \pi$$

$$3 \cdot a_3 + 2 \cdot a_2 = 0$$

Rješenje iznosi:

$$\left.\begin{aligned} a_3 + a_2 &= \pi \\ a_2 &= -\frac{3}{2} \cdot a_3 \end{aligned}\right\} \quad a_3 - \frac{3}{2} \cdot a_3 = \pi$$

Dobijamo:

$$a_2 = 3\pi \text{ i } a_3 = -2\pi$$

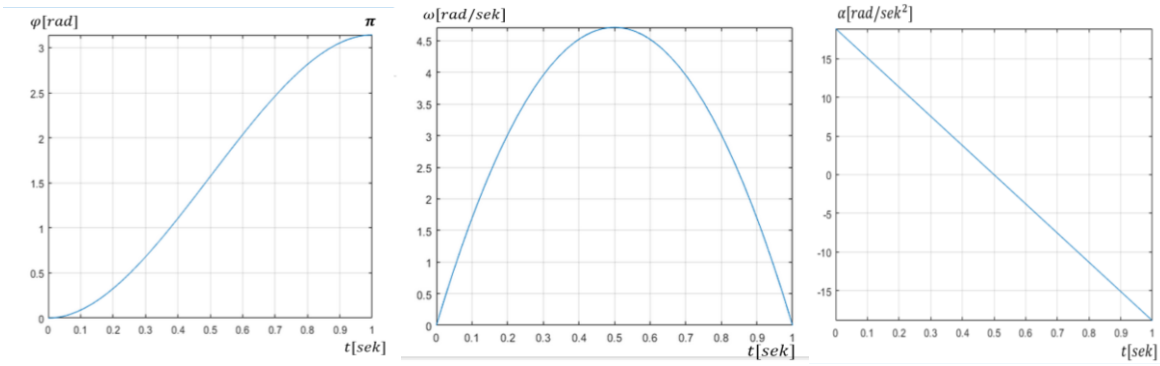
Profili pomaka, brzine i ubrzanja su sljedeći:

$$\varphi = q(t) = -2\pi \cdot t^3 + 3\pi \cdot t^2$$

$$\omega = \dot{q}(t) = -6\pi \cdot t^2 + 6\pi \cdot t$$

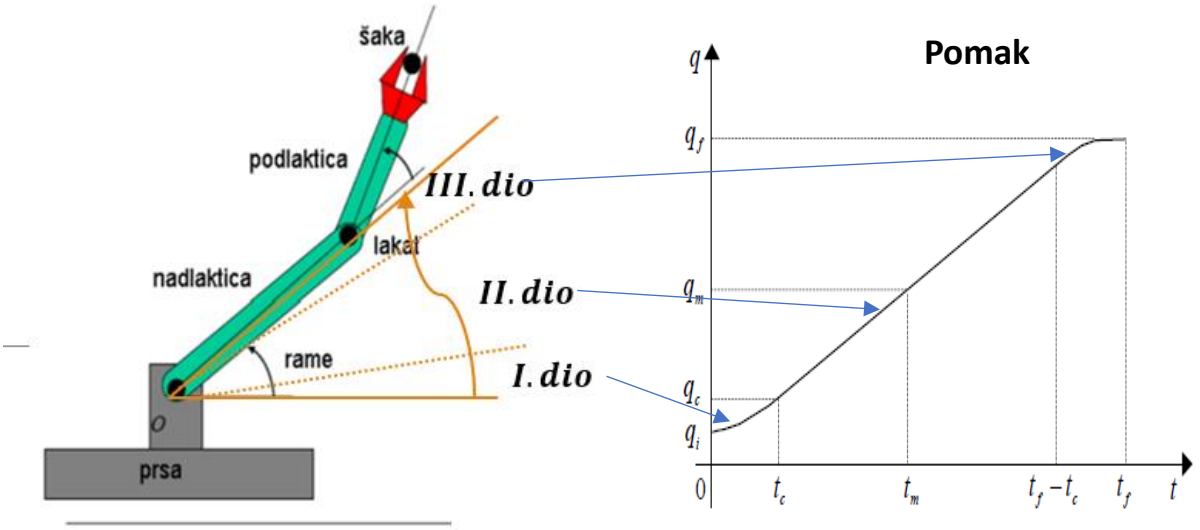
$$\alpha = \ddot{q}(t) = -12\pi \cdot t + 6\pi$$

Na slici 1.46 a),b) i c) prikazan je trajektorija kutnog pomaka, kutne brzine i ubrzanja.



Sl. 1.46 a),b) i c) - Trajektorija kutnog pomaka, kutne brzine i ubrzanja

Profili prikazani na slici 1.46 su idelani i nisu primjenjivi u stvarnosti. Na slici 1.47 prikazan je profil kutnog pomaka koji se sastoji od tri djela. Prvi dio $[0\ do\ t_c]$, drugi dio $[t_c\ do\ t_f - t_c]$ i treći dio $[t_f - t_c\ do\ t_f]$, gdje je t_c vrijeme maksimalnog kutnog ubrzanja, nakon čega je brzina konstantna.



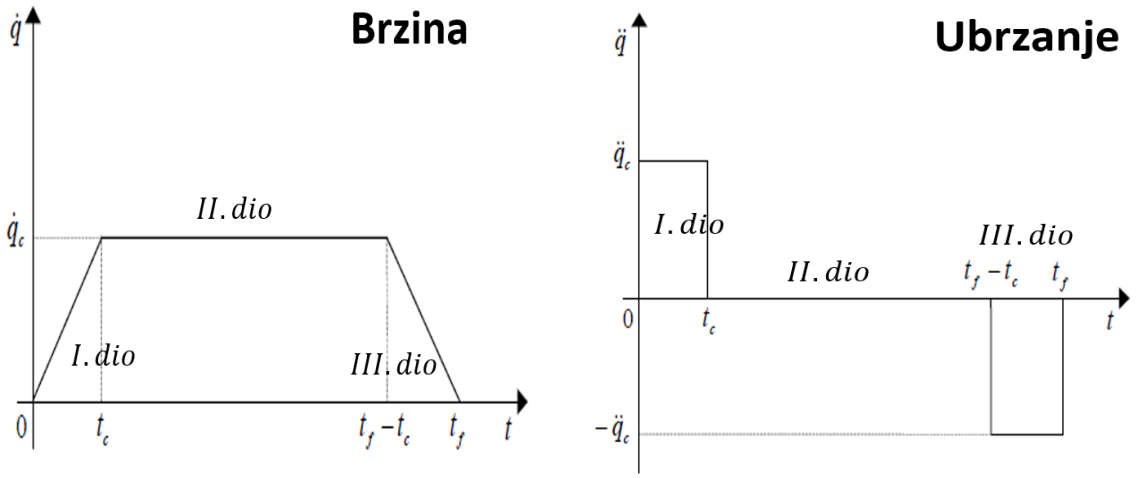
Sl. 1.47 – Profil kutnog pomaka zgloba robota (ibidem)

Vrijeme t_m predstavlja sredinu procesa, a q_m predstavlja polovinu pomaka. Isto je moguće izraziti puteme sljedećih relacije:

$$t_m = \frac{t_f}{2}$$

$$q_m = \frac{q_i + q_f}{2}$$

Profil kutne brzine i ubrzanja prikazan je na slici 1.48 a) i b).



Sl. 1.48a) i b) – Profil kutne brzine i ubrzanja zgloba robota (ibidem)

Jednadžba pomaka prvog segmeta (I.dio)

Jednažba pomaka prvog segmenta temelji se na gibanju objekta s konstantnim ubrzanjem. Fizikalni zapis takvog gibanja bio bi:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega$$

$$\omega = \alpha \cdot t$$

Iz prije zapisanog slijedi:

$$d\varphi = \alpha \cdot t \cdot dt$$

Osnosno:

$$\varphi = \int \alpha \cdot t \cdot dt = \alpha \cdot \frac{t^2}{2} + C$$

Kako je u promatranom slučaju:

$$\varphi = q(t);\ \alpha = \ddot{q}_c \text{ i } C = q_i$$

Može se pisati:

$$q(t) = \frac{1}{2}\ddot{q}_c \cdot t^2 + q_i$$

u intervalu $[0 \ \leq t \leq \ t_c]$.

Jednadžba pomaka drugog segmeta (II.dio)

U drugom segmentu kutna brzina je konstantna odnosno radi se o gibanju objekta s konstantnom brzinom . Fizikalni zapis takvog gibanja bio bi:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Odnosno:

$$\dot{q}_c = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

Slijedom navedenoga prema slici 1.47 vrijedi:

$$\dot{q}_c = \frac{q_m - q_c}{t_m - t_c}$$

U trenutku $t = t_c$ vrijednost kutne brzine postaje konstantna i ona iznosi:

$$\dot{q}_c = \ddot{q}_c \cdot t_c$$

Može se zato napisati:

$$\ddot{q}_c \cdot t_c = \frac{q_m - q_c}{t_m - t_c}$$

Uvedu li se supstitucije:

$$t_m = \frac{t_f}{2} \text{ i } q_m = \frac{q_i + q_f}{2}$$

Tada slijedi:

$$\ddot{q}_c \cdot t_c = \frac{\frac{q_i + q_f}{2} - q_c}{\frac{t_f}{2} - t_c}$$

Odnosno:

$$\ddot{q}_c \cdot t_c \cdot \frac{t_f}{2} - \ddot{q}_c \cdot t_c^2 = \frac{q_i + q_f}{2} - q_c$$

Kako je $q_c = \frac{1}{2}\ddot{q}_c \cdot t_c^2 + q_i$ tada se može pisati:

$$\ddot{q}_c \cdot t_c \cdot t_f - 2 \cdot \ddot{q}_c \cdot t_c^2 = q_i + q_f - 2 \cdot (\frac{1}{2}\ddot{q}_c \cdot t_c^2 + q_i)$$

I dolazi se do kvadratne jednadžbe:

$$\ddot{q}_c \cdot \left(t_c^2 - t_f \cdot t_c\right) + q_f - q_i = 0$$

Iz koje se određuje vrijeme maksimalnog kutnog ubrzanja t_c koje iznosi:

$$t_c = \frac{t_f}{2} - \sqrt{\frac{t_f^2}{4} - \frac{q_f - q_i}{\ddot{q}_c}}$$

Slijedom navedenog, rješnje je moguće samo onda kada je:

$$|\ddot{q}_c| \geq \frac{4 \cdot |q_f - q_i|}{t_f^2}$$

Jednadžba pomaka u drugom segementu bila bi:

$$q(t) = \ddot{q}_c \cdot t_c \cdot \left(t - \frac{t_c}{2}\right) + q_i$$

u intervalu $\left[t_c \ < t \leq \ t_f - t_c\right]$. Isto vrijedi jer ako je $t = t_c$ tada se dobija:

$$q(t_c) = \ddot{q}_c \cdot t_c \cdot \left(t_c - \frac{t_c}{2}\right) + q_i = \frac{1}{2}\ddot{q}_c \cdot t^2 + q_i$$

Vrijednost $q(t_c) = q_c$ predstavlja krajnji pomak u prvom segmentu.

Jednadžba pomaka trećeg segmeta (III.dio)

U trećem segmentu dolazi do usporavanja i proces je obrnut u odnosu na prvi segment. Prema tome na osnovu:

$$q(t) = \frac{1}{2}\ddot{q}_c \cdot t^2 + q_i$$

Slijedi daje ubrzanje negativno (usporenje) $-\ddot{q}_c$, vremenski interval je $[t_f - t_c \quad t_f]$ i robot dolazi u krajnji položaj q_f.

Stoga vrijedi:

$$q(t) = -\frac{1}{2}\ddot{q}_c \cdot (t_f - t)^2 + q_f$$

u intervalu $[t_f - t_c \ < t \leq \ t_f]$.

Zbirno, jednažba linearnog segmenta za pomak $\varphi = q(t)$ glasi:

$$\varphi = q(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\ddot{q}_c \cdot t^2 + q_i, & 0 < t \leq t_c \\ \ddot{q}_c \cdot t_c \cdot \left(t - \frac{t_c}{2}\right) + q_i, & t_c < t \leq t_f - t_c \\ -\frac{1}{2}\ddot{q}_c \cdot \left(t_f - t\right)^2 + q_f, & t_f - t_c < t \leq t_f \end{cases}$$

Za kutnu brzinu $\omega = \dot{q}(t)$ glasi:

$$\omega = \dot{q}(t) = \begin{cases} \ddot{q}_c \cdot t, & 0 < t \leq t_c \\ \ddot{q}_c \cdot t_c, & t_c < t \leq t_f - t_c \\ \ddot{q}_c \cdot (t_f - t), & t_f - t_c < t \leq t_f \end{cases}$$

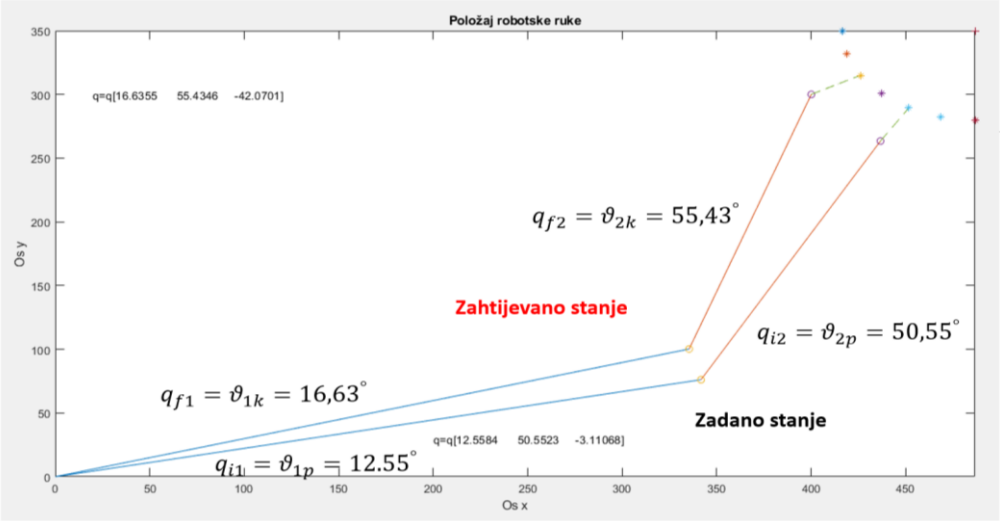
Za kutno ubrzanje $\alpha = \ddot{q}(t)$ glasi:

$$\alpha = \ddot{q}(t) = \begin{cases} \ddot{q}_c, & 0 < t \leq t_c \\ 0, & t_c < t \leq t_f - t_c \\ -\ddot{q}_c, & t_f - t_c < t \leq t_f \end{cases}$$

Prema tome određeni su profili kutog pomaka, brzine i ubrzanja troosnog robota po segmentima.

Primjer br. 4

Na slici 1.49 prikazano je zadano i završno stanje troosnog robota u konfiguraciji 1.



Sl. 1.49 – Zadano i završno stanje troosnog robota u konfiguraciji 1

Potrebno je odrediti profil kutog pomaka, brzine i ubrzanja troosnog robota po segmentima ako zadano vrijeme kretanja od početne do konačne točke iznosi $t_f = 2sek$ i ako je maksimalno dopušteno kutno ubrzanje $\alpha = \ddot{q}_c = 0.1rad/sek^2$

Na temelju prethodno zadatih parametara potrebno je provjeriti je li rješenje moguće. To znači kako treba biti ispunjen sljedeći uvjet:

$$|\ddot{q}_c| \geq \frac{4 \cdot |q_f - q_i|}{t_f^2} \rightarrow 0{,}1 \geq \frac{4 \cdot \left|(16{,}63^\circ - 12{,}55^\circ)\right| \cdot {}^{\pi}/_{180^\circ}}{2^2}$$

Kako je rješenje:

$$0{,}1 \geq 0{,}0712$$

To znači da je ispunjen uvjet i rješenje je moguće.

Za prvi članak robota vrijedit će sljedeći profili, uzimajući u obzir početne uvjete sa slike 1.49:

$$q_{i1} = \vartheta_{1p} = 12.55^\circ = 0{,}219rad$$

$$q_{f1} = \vartheta_{1k} = 16{,}63^\circ = 0{,}29rad$$

$$\alpha = \ddot{q}_c = 0.1rad/sek^2$$

Potrebno je odrediti vrijeme maksimalnog kutnog ubrzanja t_c koje iznosi:

$$t_c = \frac{t_f}{2} - \sqrt{\frac{t_f^2}{4} - \frac{q_{f1} - q_{i1}}{\ddot{q}_c}} = \frac{2}{2} - \sqrt{\frac{2^2}{4} - \frac{0{,}29 - 0{,}219}{0.1}} = 0{,}4634\ sek$$

Kutni pomak prvog članka ϑ_1 iznosi:

$$\vartheta_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2 + \vartheta_{1p}, & 0 < t \leq t_c \\ \alpha \cdot t_c \cdot \left(t - \frac{t_c}{2}\right) + \vartheta_{1p}, & t_c < t \leq t_f - t_c \\ -\frac{1}{2}\alpha \cdot \left(t_f - t\right)^2 + \vartheta_{1k}, & t_f - t_c < t \leq t_f \end{cases}$$

Odnosno:

$$\vartheta_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}0.1 \cdot t^2 + 0{,}219, & 0 < t \leq 0{,}4634 \\ 0.1 \cdot 0{,}4634 \cdot \left(t - \frac{0{,}4634}{2}\right) + 0{,}219, & 0{,}4634 < t \leq 2 - 0{,}4634 \\ -\frac{1}{2}0.1 \cdot (2 - t)^2 + 0{,}29, & 2 - 0{,}4634 < t \leq 2 \end{cases}$$

Sređivanjem dobija se:

$$\vartheta_1(t) = \begin{cases} 0.05 \cdot t^2 + 0{,}219, & 0 < t \leq 0{,}4634 \\ 0{,}04634 \cdot (t - 0{,}2317) + 0{,}219, & 0{,}4634 < t \leq 1{,}5366 \\ -0.05 \cdot (2 - t)^2 + 0{,}29, & 1{,}5366 < t \leq 2 \end{cases}$$

Kutna brzina članka $\dot{\vartheta}_1$ iznosi:

$$\dot{\vartheta}_1(t) = \begin{cases} \alpha \cdot t, & 0 < t \leq t_c \\ \alpha \cdot t_c, & t_c < t \leq t_f - t_c \\ \alpha \cdot (t_f - t), & t_f - t_c < t \leq t_f \end{cases}$$

Odnosno:

$$\dot{\vartheta}_1(t) = \begin{cases} 0.1 \cdot t, & 0 < t \leq 0{,}4634 \\ 0{,}04634, & 0{,}4634 < t \leq 1{,}5366 \\ 0.1 \cdot (2 - t), & 1{,}5366 < t \leq 2 \end{cases}$$

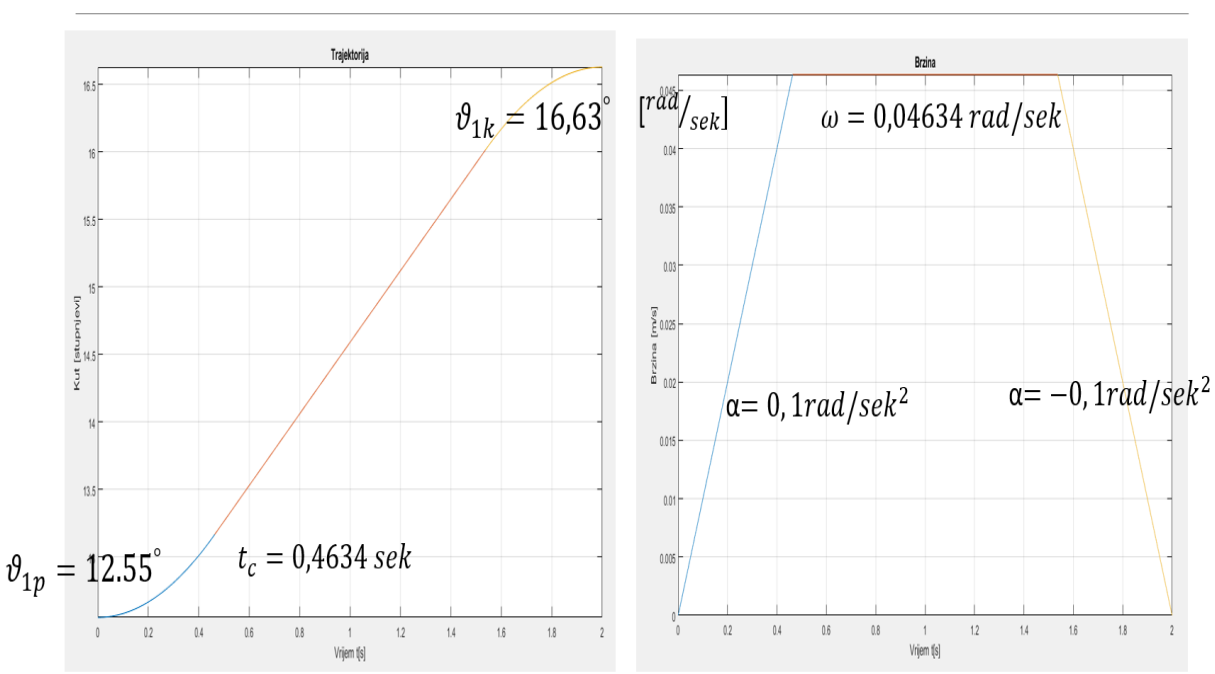
Kutna ubrzanje članka $\ddot{\vartheta}_1$ iznosi:

$$\ddot{\vartheta}_1(t) = \begin{cases} \alpha, & 0 < t \leq 0{,}4634 \\ 0, & 0{,}4634 < t \leq 1{,}5366 \\ -\alpha, & 1{,}5366 < t \leq 2 \end{cases}$$

Odnosno:

$$\ddot{\vartheta}_1(t) = \begin{cases} 0{,}1, & 0 < t \leq 0{,}4634 \\ 0, & 0{,}4634 < t \leq 1{,}5366 \\ -0{,}1, & 1{,}5366 < t \leq 2 \end{cases}$$

Na slici 1.50 prikazana je trajektorija kutnog pomaka i brzine.



Sl. 1.50 - Trajektorija kutnog pomaka i brzine prvog članka

Za drugi članak robota vrijedit će sljedeći profili, uzimajući u obzir početne uvjete sa slike 1.49:

$$q_{i2} = \vartheta_{2p} = 50{,}55^{\circ} = 0{,}8823 rad$$

$$q_{f2} = \vartheta_{2k} = 55{,}43^{\circ} = 0{,}9674 rad$$

Kako maksimalno ubrzanje iznosi $\alpha = \ddot{q}_c = 0.1 rad/sek^2$, potrebno je izračunati vrijeme maksimalnog kutnog ubrzanja t_c za drugi članak koje iznsi:

$$t_c = \frac{t_f}{2} - \sqrt{\frac{t_f^2}{4} - \frac{q_{f2} - q_{i2}}{\ddot{q}_c}} = \frac{2}{2} - \sqrt{\frac{2^2}{4} - \frac{0{,}9674 - 0{,}8823}{0.1}} = 0{,}615\ sek$$

Kutni pomak drugog članka ϑ_2 iznosi:

$$\vartheta_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2 + \vartheta_{2p}, & 0 < t \leq t_c \\ \alpha \cdot t_c \cdot \left(t - \frac{t_c}{2}\right) + \vartheta_{2p}, & t_c < t \leq t_f - t_c \\ -\frac{1}{2}\alpha \cdot \left(t_f - t\right)^2 + \vartheta_{2k}, & t_f - t_c < t \leq t_f \end{cases}$$

Odnosno:

$$\vartheta_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}0.1 \cdot t^2 + 0{,}8823, & 0 < t \leq 0{,}615 \\ 0.1 \cdot 0{,}615 \cdot \left(t - \frac{0{,}4634}{2}\right) + 0{,}8823, & 0{,}615 < t \leq 2 - 0{,}615 \\ -\frac{1}{2}0.1 \cdot (2 - t)^2 + 0{,}9674, & 2 - 0{,}615 < t \leq 2 \end{cases}$$

Sređivanjem dobija se:

$$\vartheta_2(t) = \begin{cases} 0.05 \cdot t^2 + 0{,}8823, & 0 < t \leq 0{,}615 \\ 0{,}0615 \cdot (t - 0{,}2317) + 0{,}8823, & 0{,}615 < t \leq 1{,}385 \\ -0.05 \cdot (2 - t)^2 + 0{,}9674, & 1{,}385 < t \leq 2 \end{cases}$$

Kutna brzina članka $\dot{\vartheta}_2$ iznosi:

$$\dot{\vartheta}_2(t) = \begin{cases} \alpha \cdot t, & 0 < t \leq t_c \\ \alpha \cdot t_c, & t_c < t \leq t_f - t_c \\ \alpha \cdot (t_f - t), & t_f - t_c < t \leq t_f \end{cases}$$

Odnosno:

$$\dot{\vartheta}_2(t) = \begin{cases} 0.1 \cdot t, & 0 < t \leq 0{,}615 \\ 0{,}0615, & 0{,}615 < t \leq 1{,}385 \\ 0.1 \cdot (2 - t), & 1{,}385 < t \leq 2 \end{cases}$$

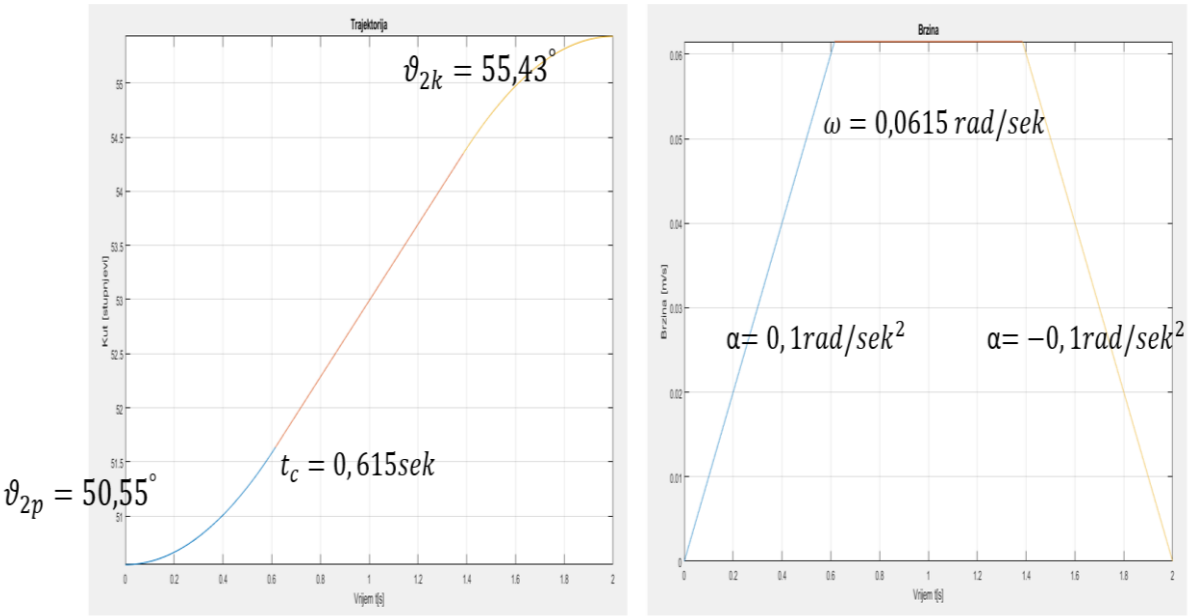
Kutna ubrzanje članka $\ddot{\vartheta}_2$ iznosi:

$$\ddot{\vartheta}_2(t) = \begin{cases} \alpha, & 0 < t \leq 0{,}615 \\ 0, & 0{,}615 < t \leq 1{,}385 \\ -\alpha, & 1{,}385 < t \leq 2 \end{cases}$$

Odnosno:

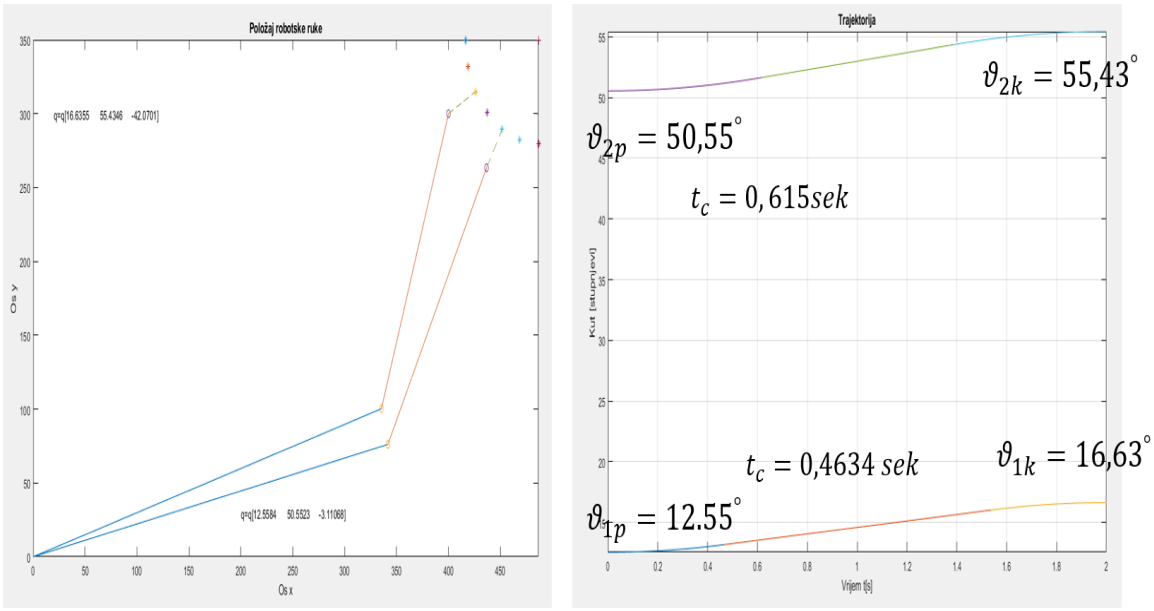
$$\ddot{\vartheta}_2(t) = \begin{cases} 0{,}1, & 0 < t \leq 0{,}615 \\ 0, & 0{,}615 < t \leq 1{,}385 \\ -0{,}1, & 1{,}385 < t \leq 2 \end{cases}$$

Na slici 1.51 prikazana je trajektorija kutnog pomaka i brzine.

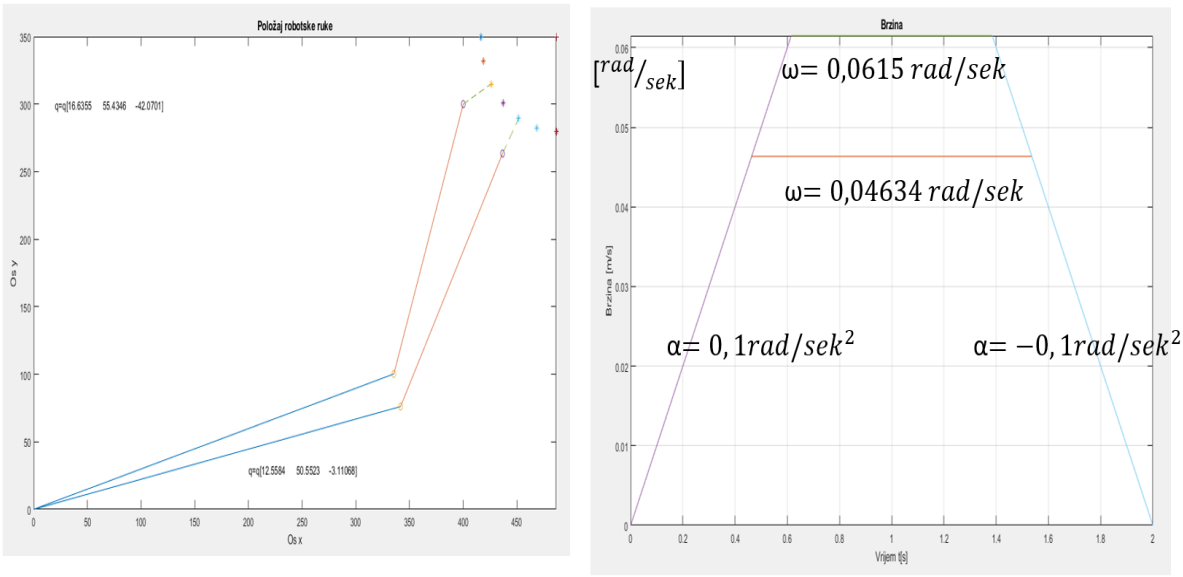


Sl. 1.51 - Trajektorija kutnog pomaka i brzine drugog članka

Na slici 1.51 a) prikazane su zajedničke trajektorije kutnog pomaka, dok su na slici 1.51 b) prikazane zajedničke trajektorije kutne brzine.

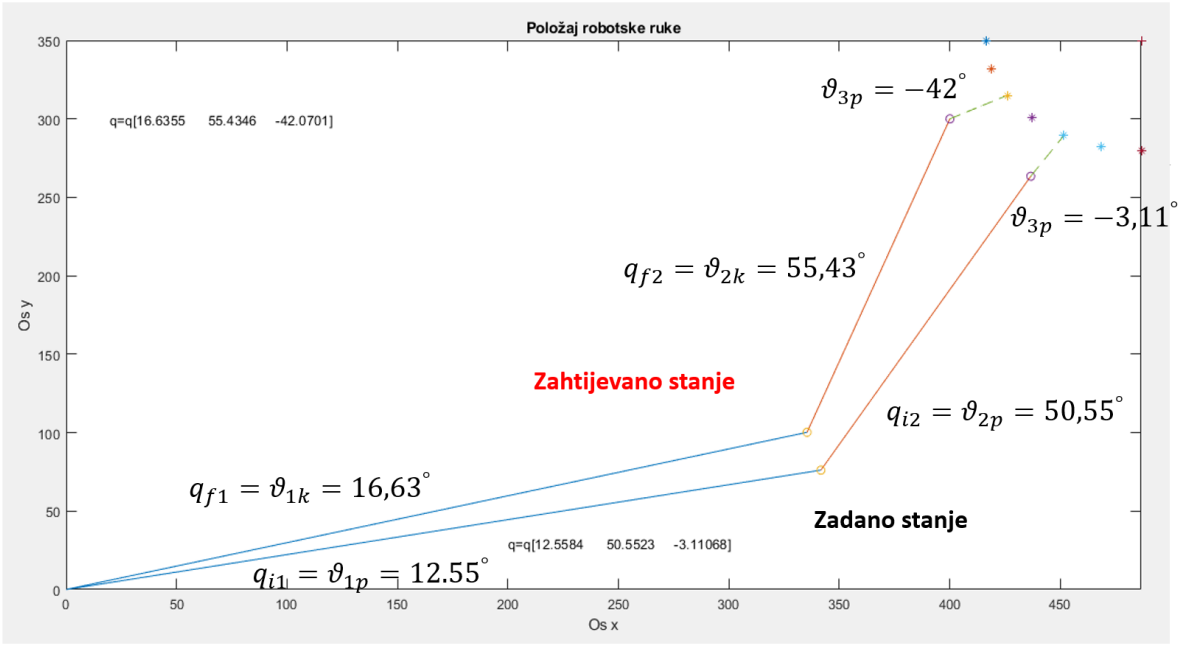


Sl. 1.51 a) - Zajedničke trajektorije kutnog pomaka



Sl. 1.51 b) - Zajedničke trajektorije kutne brzine

U prethodnoje analizi nije uzeta u obzir rotacija alata, stoga je na slici 1.52 prikazana pozicija i orijentacija alata.



Sl. 1.52 – Pozicija i orijentacija alata

Slijedom podataka prikazanih na slci 1.52 vrijedi za alat:

$$q_{i3} = \vartheta_{3p} = -3{,}11^{\circ} = -0{,}0543 rad$$

$$q_{f3} = \vartheta_{3k} = -42^{\circ} = -0{,}733 rad$$

$$\alpha = \ddot{q}_c = 0.1 rad/sek^2$$

Potrebno je odrediti vrijeme maksimalnog kutnog ubrzanja t_c koje iznosi:

$$t_c = \frac{t_f}{2} - \sqrt{\frac{t_f^2}{4} - \frac{|q_{f3} - q_{i3}|}{\ddot{q}_c}} = \frac{2}{2} - \sqrt{\frac{2^2}{4} - \frac{|-0{,}733 - (-0{,}0543)|}{0.1}} = 0{,}448\ sek$$

Kutni pomak alata ϑ_3 iznosi:

$$\vartheta_3(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2 + \vartheta_{3p}, & 0 < t \leq t_c \\ \alpha \cdot t_c \cdot \left(t - \frac{t_c}{2}\right) + \vartheta_{3p}, & t_c < t \leq t_f - t_c \\ -\frac{1}{2}\alpha \cdot \left(t_f - t\right)^2 + \vartheta_{3k}, & t_f - t_c < t \leq t_f \end{cases}$$

Odnosno:

$$\vartheta_3(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}0.1 \cdot t^2 - 0{,}0543, & 0 < t \leq 0{,}448 \\ 0.1 \cdot 0{,}448 \cdot \left(t - \frac{0{,}4634}{2}\right) - 0{,}0543, & 0{,}448 < t \leq 2 - 0{,}448 \\ -\frac{1}{2}0.1 \cdot (2 - t)^2 - 0{,}733, & 2 - 0{,}448 < t \leq 2 \end{cases}$$

Sređivanjem dobija se:

$$\vartheta_3(t) = \begin{cases} 0.05 \cdot t^2 - 0{,}0543, & 0 < t \leq 0{,}448 \\ 0{,}0488 \cdot (t - 0{,}2317) - 0{,}0543, & 0{,}448 < t \leq 1{,}512 \\ -0.05 \cdot (2 - t)^2 - 0{,}733, & 1{,}512 < t \leq 2 \end{cases}$$

Kutna brzina članka $\dot{\vartheta}_3$ iznosi:

$$\dot{\vartheta}_3(t) = \begin{cases} \alpha \cdot t, & 0 < t \leq t_c \\ \alpha \cdot t_c, & t_c < t \leq t_f - t_c \\ \alpha \cdot (t_f - t), & t_f - t_c < t \leq t_f \end{cases}$$

Odnosno:

$$\dot{\vartheta}_3(t) = \begin{cases} 0.1 \cdot t, & 0 < t \leq 0{,}448 \\ 0{,}0488, & 0{,}448 < t \leq 1{,}512 \\ 0.1 \cdot (2 - t), & 1{,}512 < t \leq 2 \end{cases}$$

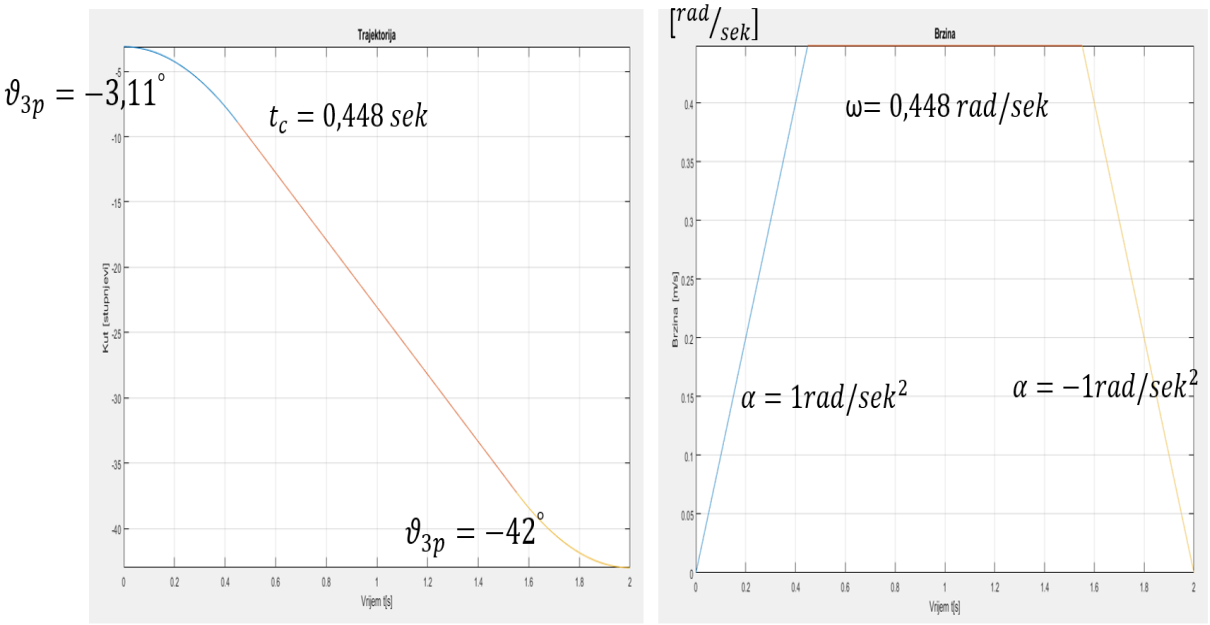
Kutna ubrzanje članka $\ddot{\vartheta}_3$ iznosi:

$$\ddot{\vartheta}_3(t) = \begin{cases} \alpha, & 0 < t \leq 0{,}448 \\ 0, & 0{,}448 < t \leq 1{,}512 \\ -\alpha, & 1{,}512 < t \leq 2 \end{cases}$$

Odnosno:

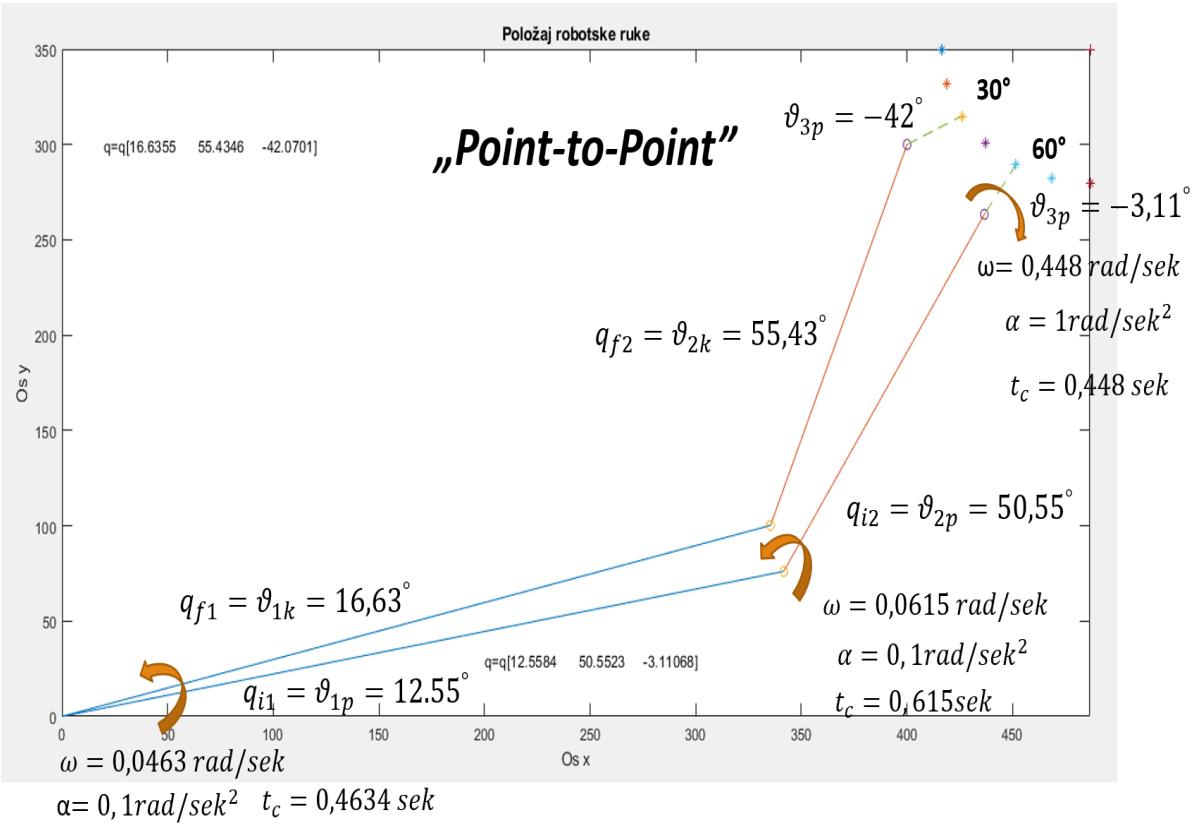
$$\ddot{\vartheta}_3(t) = \begin{cases} 0{,}1, & 0 < t \leq 0{,}448 \\ 0, & 0{,}448 < t \leq 1{,}512 \\ -0{,}1, & 1{,}512 < t \leq 2 \end{cases}$$

Na slici 1.53 prikazana je trajektorija kutnog pomaka i brzine alata.



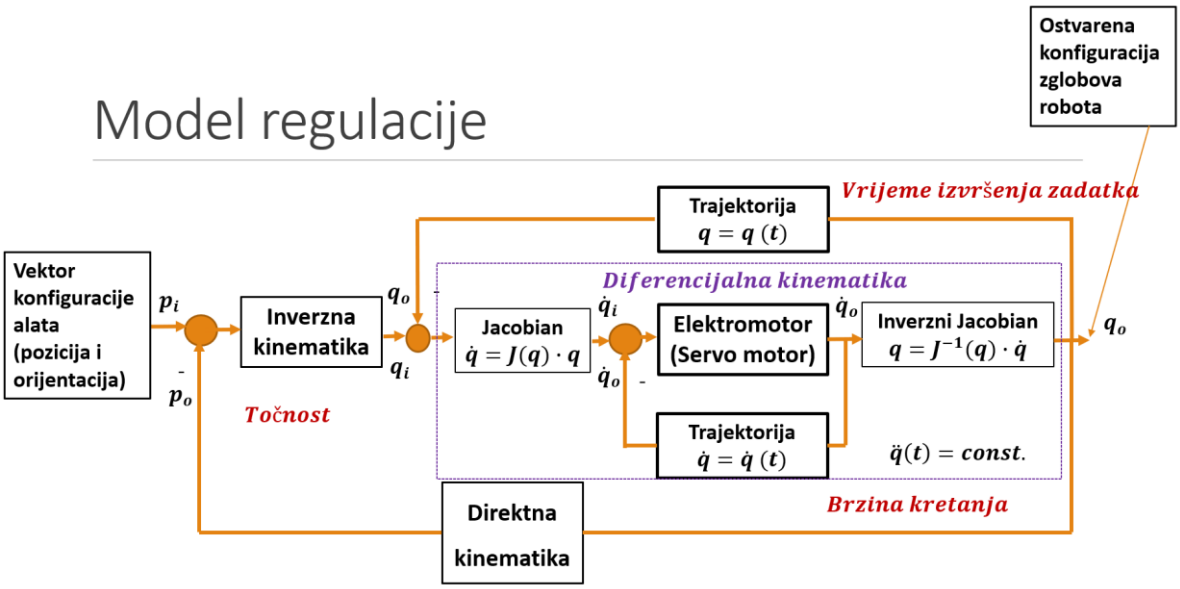
Sl. 1.53 - Trajektorija kutnog pomaka i brzine alat

Na slici 1.54 prikazani su izračunati prametri profila trajetorija pomaka, kutne brzine i ubrzanja torosnog robota.



Sl. 1.54 - Prametri profila trajetorija pomaka, kutne brzine i ubrzanja torosnog robota

Planiranje trajektorije kretanja robota u njegovim zglobovima od točke do točke provedeno je na *temelju nadoveznih polinoma* pri čemu se može ocjeniti je li kutna brzina i ubrzanje zadovoljavaju zadana dinamička ograničenja kao što je npr. maksimalno kutno ubrzanje. Polazeći od jednadžbi direktne i inverzne kinematike, na slici 1.55 prikazan je model regulacije koji se temelji na trajektoriji kutnog pomaka i brzine, pri čemu je kutno ubrzanje konstantno.

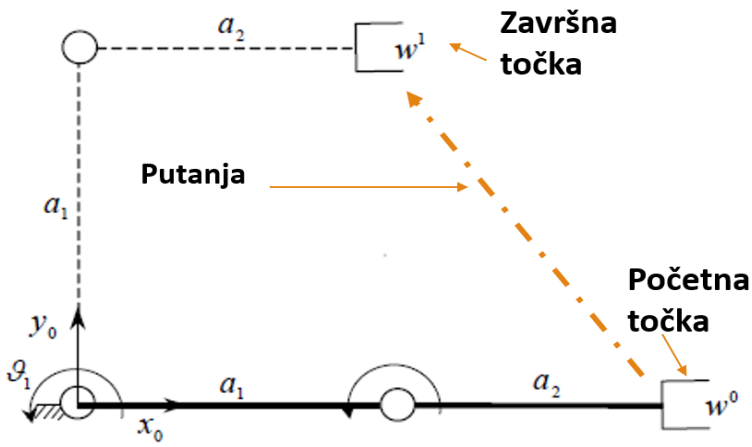


Sl. 1.55 – Model regulacije robota

U nastavku će se analizirati planiranje trajektorije u operacijskom prostoru pomoću vektora konfiguracije hvatišta alata w.

6.2 Planiranje trajektorije u operacijskom prostoru

Neka je putanja hvatišta alat ***W*** spoj početne i završne točke, i eventualno neke među točke na tom spoju koji je određen vektorom konfiguracije hvatišta alata, kako je prikaznao na slici 1.56



Sl. 1.56 – Spoj početne i krajnje točke položaja hvatišta alata (ibidem)

Na slici 1.56 vektor konfiguracije hvatišta alata $\boldsymbol{w}$ glasi:

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w^0}(\boldsymbol{q}) \\ \boldsymbol{w^1}(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix}$$

gdje je:

$\boldsymbol{w^0}$ - vektor početne točke kretanja hvatišta alata

$\boldsymbol{w^1}$ - vektor završne točke kretanja hvatišta alata

Potrebno je provesti interpolaciju između spojnih točaka kako bi se dobila glatka putanja profila pomaka, linerane brzine i ubrzanja hvatišta alata. Jedan od najboljih načina je intrepolacija gibanja alata između točaka $\boldsymbol{w^0}$ i $\boldsymbol{w^1}$ pomoću kubnog polinoma:

$$\boldsymbol{w}(t) = \boldsymbol{A} \cdot t^3 + \boldsymbol{B} \cdot t^2 + \boldsymbol{C} \cdot t + \boldsymbol{D}, \qquad 0 \leq t \leq T$$

Gdje je:

T – vrijeme potrebno za prijelaz putanje

Pri čemu je:

$$\boldsymbol{A} = \frac{T \cdot (\boldsymbol{v^1} + \boldsymbol{v^0}) - 2 \cdot (\boldsymbol{w^1} - \boldsymbol{w^0})}{T^3}$$

$$\boldsymbol{B} = -\frac{T \cdot (\boldsymbol{v^1} + 2 \cdot \boldsymbol{v^0}) - 3 \cdot (\boldsymbol{w^1} - \boldsymbol{w^0})}{T^2}$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{v^0}$$

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{w^0}$$

Gdje je:

$\boldsymbol{v^0}$ – vektor početne brzine kretanja hvatišta alata

$\boldsymbol{v^1}$ - vektor završne brzine kretanja hvatišta alata

Vektor konfiguracije hvatišta alata $\boldsymbol{W}$ u općem obliku bio bi**:**

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Poz} \\ \boldsymbol{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1(q) \\ w_2(q) \\ w_3(q) \\ \varphi \\ \chi \\ \vartheta \end{bmatrix}$$

Za slučaj troosnog robota prikazanog na slici 1.56 vrijedi da je:

$\varphi = 0^\circ$ - nema rotacije oko osi x

$\chi = 0^\circ$ -nema rotacije oko osi y

$\vartheta \neq 0^\circ$ - ostvaruje se rotacije oko osi z

Varijabla w_6 izrazit će se na sljedeći način:

$$w_6 = e^{\frac{\vartheta[rad]}{\pi}}$$

Ako je npr. $\vartheta = 0rad$ tada je $w_6 = 1$. Prema tome može se pisati:

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cdot C_1 + a_2 \cdot C_{12} \\ a_1 \cdot S_1 + a_2 \cdot S_{12} \\ d_3 \\ 0 \\ 0 \\ e^{\frac{\vartheta[rad]}{\pi}} \end{bmatrix}$$

Vektor početne točke kretanja hvatišta $\boldsymbol{w^0}$ za troosni robot prikazan na slici 1.56 bio bi sljedeći, pri čemu je $q = q(0^\circ, 0^\circ, 0^\circ, 0)$:

$$\boldsymbol{w^0} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 \\ a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ e^{\frac{0}{\pi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vektor završne točke kretanja hvatišta $\boldsymbol{w^1}$ prikazan na slici 1.56 bio bi sljedeći, pri čemu je $q = q(90^\circ, -90^\circ, 90^\circ, 0)$:

$$\boldsymbol{w^1} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1 \\ a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ e^{\frac{\pi/2}{\pi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1{,}6487 \end{bmatrix}$$

Vektor početne i završne brzine jednak je nuli:

$$\boldsymbol{v^0} = \boldsymbol{v^1} = 0$$

Stoga vrijedi:

$$\boldsymbol{A} = -\frac{2 \cdot (\boldsymbol{w^1} - \boldsymbol{w^0})}{T^3}$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{3 \cdot (\boldsymbol{w^1} - \boldsymbol{w^0})}{T^2}$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{w^0}$$

Polinom sada glasi:

$$\boldsymbol{w}(t) = -\frac{2 \cdot (\boldsymbol{w^1} - \boldsymbol{w^0})}{T^3} \cdot t^3 + \frac{3 \cdot (\boldsymbol{w^1} - \boldsymbol{w^0})}{T^2} \cdot t^2 + \boldsymbol{w^0}, \qquad 0 \le t \le T$$

Na temelju vektora početne i završne točke kretanja hvatišta slijede pojedinačni polinomi i to:

$$w_1(t) = -\frac{2 \cdot (w_1^1 - w_1^0)}{T^3} \cdot t^3 + \frac{3 \cdot (w_1^1 - w_1^0)}{T^2} \cdot t^2 + w_1^0$$

$$w_2(t) = -\frac{2 \cdot (w_2^1 - w_2^0)}{T^3} \cdot t^3 + \frac{3 \cdot (w_2^1 - w_2^0)}{T^2} \cdot t^2 + w_2^0$$

$$w_3(t) = w_4(t) = w_5(t) = 0$$

$$w_6(t) = -\frac{2 \cdot (w_6^1 - w_6^0)}{T^3} \cdot t^3 + \frac{3 \cdot (w_6^1 - w_6^0)}{T^2} \cdot t^2 + w_6^0$$

Kako je:

$$w_1^0 = \ a_1 + \ a_2$$

$$w_1^1 = \ a_2$$

$$w_2^0 = w_2^1$$

$$w_2^1 = a_1$$

$$w_6^0 = 1$$

$$w_6^1 = 1{,}6487$$

Može se pisati:

$$w_1(t) = -\frac{2 \cdot [\ a_2 - \ (a_1 + \ a_2)]}{T^3} \cdot t^3 + \frac{3 \cdot [\ a_2 - \ (a_1 + \ a_2)]}{T^2} \cdot t^2 + (a_1 + \ a_2)$$

Slijedi:

$$w_1(t) = \frac{2 \cdot a_1}{T^3} \cdot t^3 - \frac{3 \cdot a_1}{T^2} \cdot t^2 + \ a_1 + \ a_2$$

Nadalje slijedi:

$$w_2(t) = -\frac{2 \cdot (a_1 - 0)}{T^3} \cdot t^3 + \frac{3 \cdot (a_1 - 0)}{T^2} \cdot t^2 + 0$$

odnosno:

$$w_2(t) = -\frac{2 \cdot a_1}{T^3} \cdot t^3 + \frac{3 \cdot a_1}{T^2} \cdot t^2$$

I za alat vrijedi:

$$w_6(t) = -\frac{2 \cdot (1{,}6487 - 1)}{T^3} \cdot t^3 + \frac{3 \cdot (1{,}6487 - 1)}{T^2} \cdot t^2 + 1$$

Odnosno:

$$w_6(t) = -\frac{1{,}297443}{T^3} \cdot t^3 + \frac{1{,}946164}{T^2} \cdot t^2 + 1$$

Primjer br. 5

Zadani su sljedeći parametri troosnog robota $T = 1sek,\ a_1 = 0{,}3m,\ a_2 = 0{,}2m$ i $d_3 = 0$. Potrebno je odrediti trajektoriju hvatišta alata u operacijskom prostoru odnosno linearnu brzinu i ubrzanje u trenutku $t = 0{,}2\ sek$ i $t = 0{,}6\ sek$.

Na temelju predthodno određenih relacija slijedi:

a) $w_1(t)$

$$w_1(t) = \frac{2 \cdot a_1}{T^3} \cdot t^3 - \frac{3 \cdot a_1}{T^2} \cdot t^2 + a_1 + a_2 = w_1(t) = \frac{2 \cdot 0{,}3}{1^3} \cdot t^3 - \frac{3 \cdot 0{,}3}{1^2} \cdot t^2 + 0{,}3 + 0{,}2$$

$$w_1(t) = 0{,}6 \cdot t^3 - 0{,}9 \cdot t^2 + 0{,}5$$

b) $w_2(t)$

$$w_2(t) = -\frac{2 \cdot a_1}{T^3} \cdot t^3 + \frac{3 \cdot a_1}{T^2} \cdot t^2 = -\frac{2 \cdot 0{,}3}{1^3} \cdot t^3 + \frac{3 \cdot 0{,}3}{1^2} \cdot t^2$$

$$w_2(t) = -0{,}6 \cdot t^3 + 0{,}9 \cdot t^2$$

c) $w_6(t)$

$$w_6(t) = -\frac{1{,}297443}{T^3} \cdot t^3 + \frac{1{,}946164}{T^2} \cdot t^2 + 1 = -\frac{1{,}297443}{1^3} \cdot t^3 + \frac{1{,}946164}{1^2} \cdot t^2 + 1$$

$$w_6(t) = -1{,}297443 \cdot t^3 + 1{,}946164 \cdot t^2 + 1$$

Jednako tako mogu se odrediti relacije za brzinu, kako slijedi:

a) $\dot{w}_1(t)$

$$\dot{w}_1(t) = \frac{d}{dt} w_1(t) = \frac{6 \cdot a_1}{T^3} \cdot t^2 - \frac{6 \cdot a_1}{T^2} \cdot t = \frac{6 \cdot 0{,}3}{1} \cdot t^2 - \frac{6 \cdot 0{,}3}{1} \cdot t$$

$$\dot{w}_1(t) = 1{,}8 \cdot (t^2 - t)$$

b) $\dot{w}_2(t)$

$$\dot{w}_2(t) = \frac{d}{dt} w_2(t) = -\frac{6 \cdot a_1}{T^3} \cdot t^2 + \frac{6 \cdot a_1}{T^2} \cdot t = -\frac{6 \cdot 0{,}3}{1} \cdot t^2 + \frac{6 \cdot 0{,}3}{1} \cdot t$$

$$\dot{w}_2(t) = -1{,}8 \cdot (t^2 - t)$$

c) $\dot{w}_6(t)$

$$\dot{w}_6(t) = \frac{d}{dt} w_6(t) = -\frac{3 \cdot 1{,}297443}{T^3} \cdot t^2 + \frac{2 \cdot 1{,}946164}{T^2} \cdot t$$

$$= -\frac{3 \cdot 1{,}297443}{1} \cdot t^2 + \frac{2 \cdot 1{,}946164}{1} \cdot t$$

$$\dot{w}_6(t) = -3{,}9823 \cdot (t^2 - t)$$

Ubrzanje, kako slijedi:

a) $\ddot{w}_1(t)$

$$\ddot{w}_1(t) = \frac{d}{dt}\dot{w}_1(t) = \frac{12 \cdot a_1}{T^3} \cdot t - \frac{6 \cdot a_1}{T^2} = \frac{12 \cdot 0{,}3}{1} \cdot t - \frac{6 \cdot 0{,}3}{1}$$

$$\ddot{w}_1(t) = 3{,}6 \cdot t - 1{,}8$$

b) $\ddot{w}_2(t)$

$$\ddot{w}_2(t) = \frac{d}{dt}\dot{w}_2(t) = -\frac{12 \cdot a_1}{T^3} \cdot t + \frac{6 \cdot a_1}{T^2} = -\frac{12 \cdot 0{,}3}{1} \cdot t + \frac{6 \cdot 0{,}3}{1}$$

$$\ddot{w}_2(t) = -3{,}6 \cdot t + 1{,}8$$

c) $\ddot{w}_6(t)$

$$\ddot{w}_6(t) = \frac{d}{dt}\dot{w}_6(t) = -\frac{6 \cdot 1{,}297443}{T^3} \cdot t + \frac{2 \cdot 1{,}946164}{T^2} = -\frac{6 \cdot 1{,}297443}{1} \cdot t + \frac{2 \cdot 1{,}946164}{1}$$

$$\ddot{w}_6(t) = -7{,}7847 \cdot t + 3{,}8923$$

Prema tome u trenutku $t = 0{,}2\ sek$ vrijednosti za pomak, brzinu i ubrzanje iznose:

a) Pomak

$$w_1(0{,}2) = 0{,}6 \cdot t^3 - 0{,}9 \cdot t^2 + 0{,}5 = 0{,}6 \cdot 0{,}2^3 - 0{,}9 \cdot 0{,}2^2 + 0{,}5 = 0{,}4468m$$

$$w_2(0{,}2) = -0{,}6 \cdot t^3 + 0{,}9 \cdot t^2 = -0{,}6 \cdot 0{,}2^3 + 0{,}9 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}0312m$$

$$w_6(0{,}2) = -1{,}297443 \cdot t^3 + 1{,}946164 \cdot t^2 + 1 = -1{,}297443 \cdot 0{,}2^3 + 1{,}946164 \cdot 0{,}2^2 + 1 = 1{,}0675$$

Odnosno:

$$\vartheta_{alat} = \pi \cdot \ln w_6 = \pi \cdot \ln 1{,}0675 = 0{,}2051rad = 11{,}752^{\circ}$$

b) Brzina

$$\dot{w}_1(0{,}2) = 1{,}8 \cdot (t^2 - t) = 1{,}8 \cdot (0{,}2^2 - 0{,}2) = -0{,}288m/sek$$

$$\dot{w}_2(0{,}2) = -1{,}8 \cdot (t^2 - t) = \dot{w}_2(t) = -1{,}8 \cdot (0{,}2^2 - 0{,}2) = 0{,}288m/sek$$

Lineran brzina v po putnji iznosila bi:

$$v = \sqrt{\dot{w}_1(0{,}2)^2 + \dot{w}_2(0{,}2)^2} = \sqrt{-0{,}288^2 + 0{,}288^2} = 0{,}4073m/sek$$

Kutna brzina alata $\omega = \dot{\vartheta}_{alat}$ može se izračunati na sljedeći način na temelju relacije:

$$w_6(t) = e^{\frac{\vartheta_{alat}}{\pi}}$$

Naime , vrijedi:

$$\vartheta_{alat}(t) = \pi \cdot \ln w_6(t)$$

Deriviranjem dobijamo:

$$\dot{\vartheta}_{alat}(t) = \pi \cdot \frac{d}{dt}[\ln w_6(t)] = \pi \cdot \frac{\dot{w}_6(t)}{w_6(t)}$$

Prema tome vrijedi:

$$\dot{\vartheta}_{alat}(t) = \pi \cdot \frac{-3{,}9823 \cdot (t^2 - t)}{-1{,}297443 \cdot t^3 + 1{,}946164 \cdot t^2 + 1}$$

Za $t = 0{,}2\ sek$ dobije se:

$$\dot{\vartheta}_{alat}(0{,}2) = \pi \cdot \frac{-3{,}9823 \cdot (0{,}2^2 - 0{,}2)}{-1{,}297443 \cdot 0{,}2^3 + 1{,}946164 \cdot 0{,}2^2 + 1} = 1{,}8752 rad/sek$$

c) Ubrzanje

$$\ddot{w}_1(0{,}2) = 3{,}6 \cdot t - 1{,}8 = 3{,}6 \cdot 0{,}2 - 1{,}8 = -1{,}08\ {}^{m}/_{sek^2}$$

$$\ddot{w}_2(0{,}2) = -3{,}6 \cdot t + 1{,}8 = -3{,}6 \cdot 0{,}2 + 1{,}8 = 1{,}08\ {}^{m}/_{sek^2}$$

Linearno ubrzanje a po putnji iznosilo bi:

$$a = \sqrt{\ddot{w}_1(0{,}2)^2 + \ddot{w}_1(0{,}2)^2} = \sqrt{-1{,}08^2 + 1{,}08^2} = 1.524\ {}^{m}/_{sek^2}$$

Ubrzanje alata $\alpha = \ddot{\vartheta}_{alat}$ može se izračunati na sljedeći način na temelju relacije:

$$\dot{\vartheta}_{alat}(t) = \pi \cdot \frac{\dot{w}_6(t)}{w_6(t)}$$

Deriviranjem dobijamo:

$$\ddot{\vartheta}_{alat}(t) = \pi \cdot \frac{d}{dt}\left[\frac{\dot{w}_6(t)}{w_6(t)}\right] = \pi \cdot \frac{\ddot{w}_6(t) \cdot w_6(t) - \dot{w}_6(t) \cdot \dot{w}_6(t)}{w_6(t)^2}$$

Prema tome vrijedi:

$$\ddot{\vartheta}_{alat}(t) =$$

$$\pi \cdot \frac{(-7{,}7847 \cdot t + 3{,}8923) \cdot (-1{,}297443 \cdot t^3 + 1{,}946164 \cdot t^2 + 1) - [-3{,}9823 \cdot (t^2 - t)]^2}{(-1{,}297443 \cdot t^3 + 1{,}946164 \cdot t^2 + 1)^2}$$

Za $t = 0{,}2\ sek$ dobije se:

$$\ddot{\vartheta}_{alat}(0{,}2\ ) = \pi \cdot$$

$$\cdot \frac{(-7{,}7847 \cdot 0{,}2 + 3{,}8923) \cdot (-1{,}297443 \cdot 0{,}2^3 + 1{,}946164 \cdot 0{,}2^2 + 1) - [-3{,}9823 \cdot (0{,}2^2 - 0{,}2)]^2}{(-1{,}297443 \cdot 0{,}2^3 + 1{,}946164 \cdot 0{,}2^2 + 1)^2}$$

Odnosno:

$$\ddot{\vartheta}_{alat}(0{,}2\ ) = 5{,}5737\ {}^{rad}/_{sek^2}$$

Za trenutak $t = 0{,}6\ sek$ vrijednosti za pomak, brzinu i ubrzanje iznosile bi:

$$w_1(0{,}6) = 0{,}3056m$$

$$w_2(0{,}6) = 0.1944m$$

$$\vartheta_{alat}(0{,}6) = 1{,}1024rad = 63{,}165^{\circ}$$

$$\dot{w}_1(0{,}6) = -0{,}432m/s$$

$$\dot{w}_2(0{,}6) = 0{,}432m/s$$

$$v = 0{,}61m/sek$$

$$\dot{\vartheta}_{alat}(0{,}6) = 2{,}114rad/sek$$

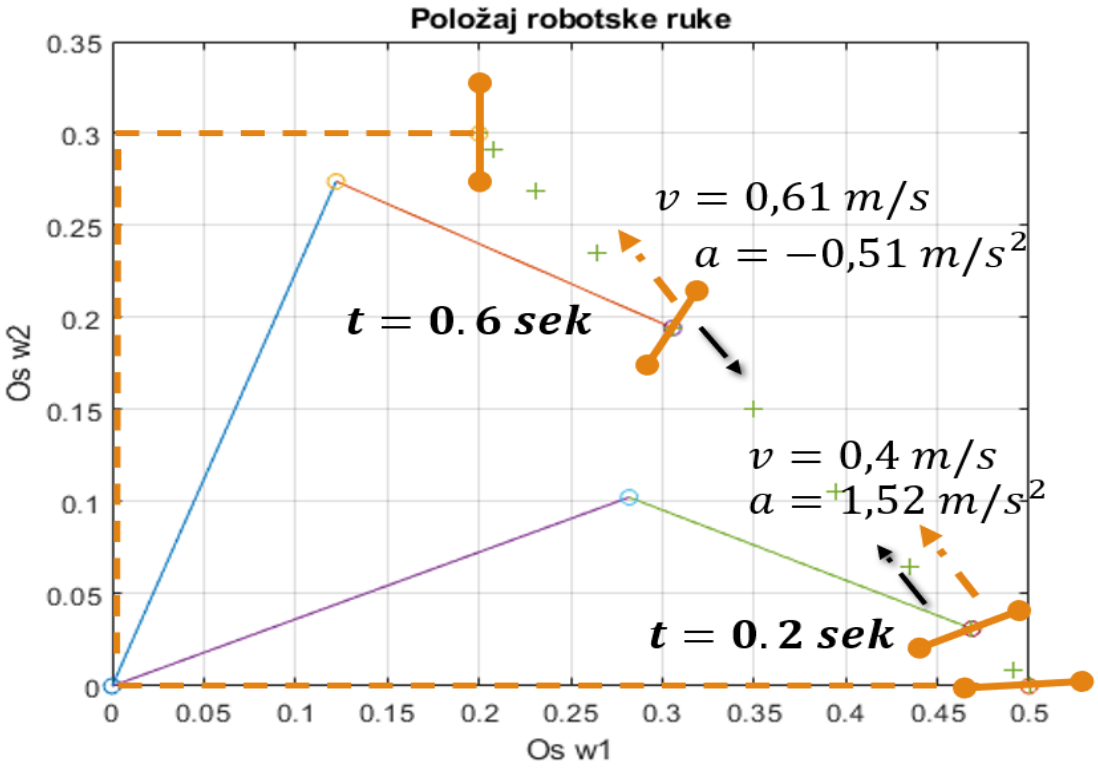
$$\ddot{w}_1(0{,}6) = 0{,}36\,{}^{m}/_{sek^2}$$

$$\ddot{w}_1(0{,}6) = -0{,}36\,{}^{m}/_{sek^2}$$

$$a = -0{,}51\,{}^{m}/_{sek^2}$$

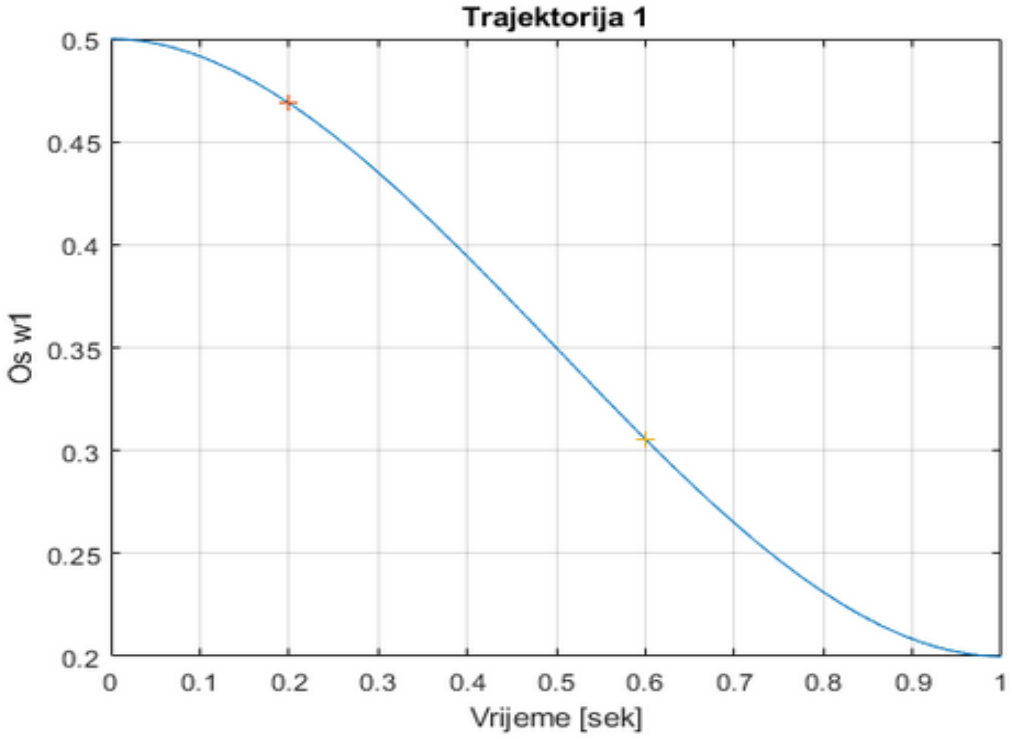
$$\ddot{\vartheta}_{alat}(0{,}6\,) = -3{,}144\,{}^{rad}/_{sek^2}$$

Na slici 1.57. prikazani su rezultati proračuna za $t = 0{,}2\ sek$ i $t = 0{,}6\ sek$ s ucrtanom pozicijom hvatišta robota i orijentacijom alata, kao i podaci o linearnim brzinama, ubrzanju i usporenju hvatišta alata.



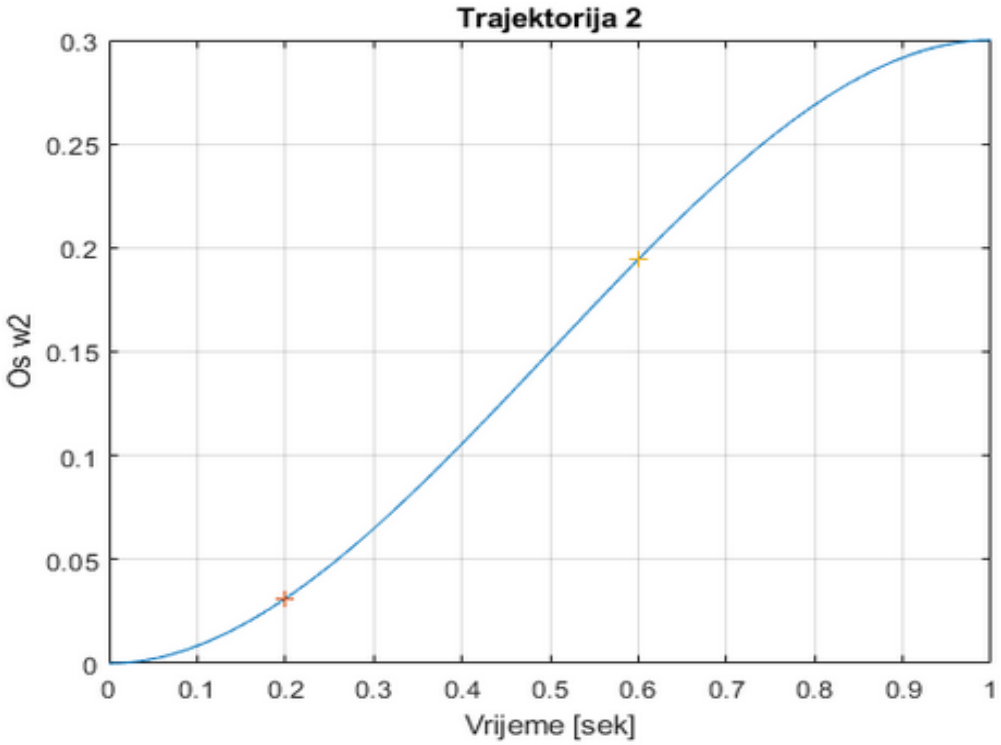
Sl. 1.57 – Rezultati proračuna u operacijskom prostoru

Na slici 1.58 a) prikazana je trajektorija pomaka hvatišta alata po osi $w_1 = w_1(t)$.



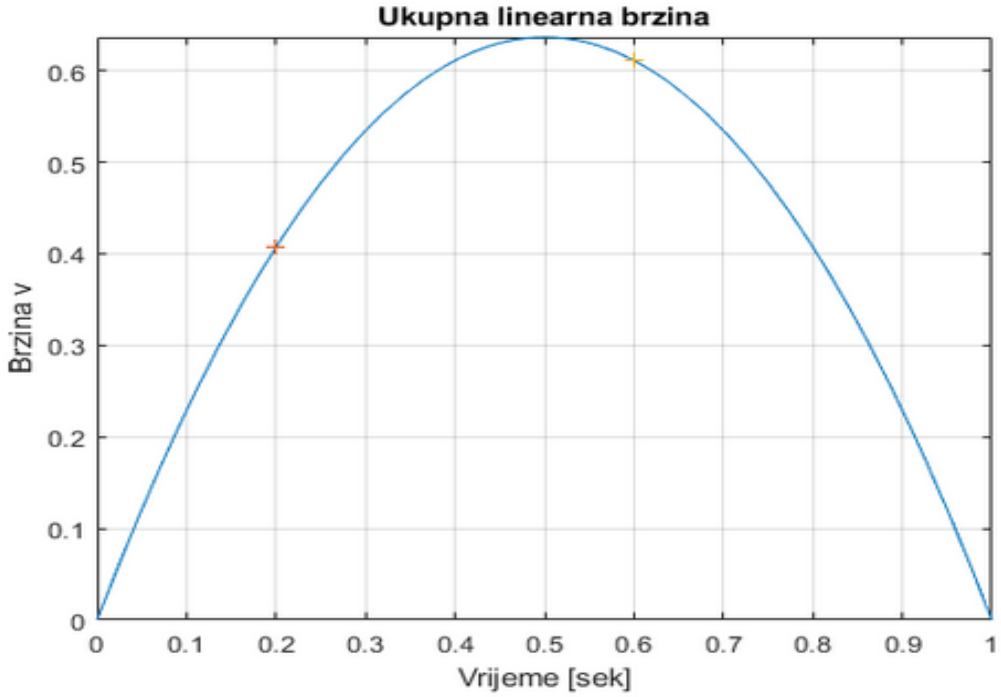
Sl. 1.58 a) - Trajektorija pomaka hvatišta alata po osi $w_1 = w_1(t)$.

Na slici 1.58 b) prikazana je trajektorija pomaka hvatišta alata po osi $w_2 = w_2(t)$.



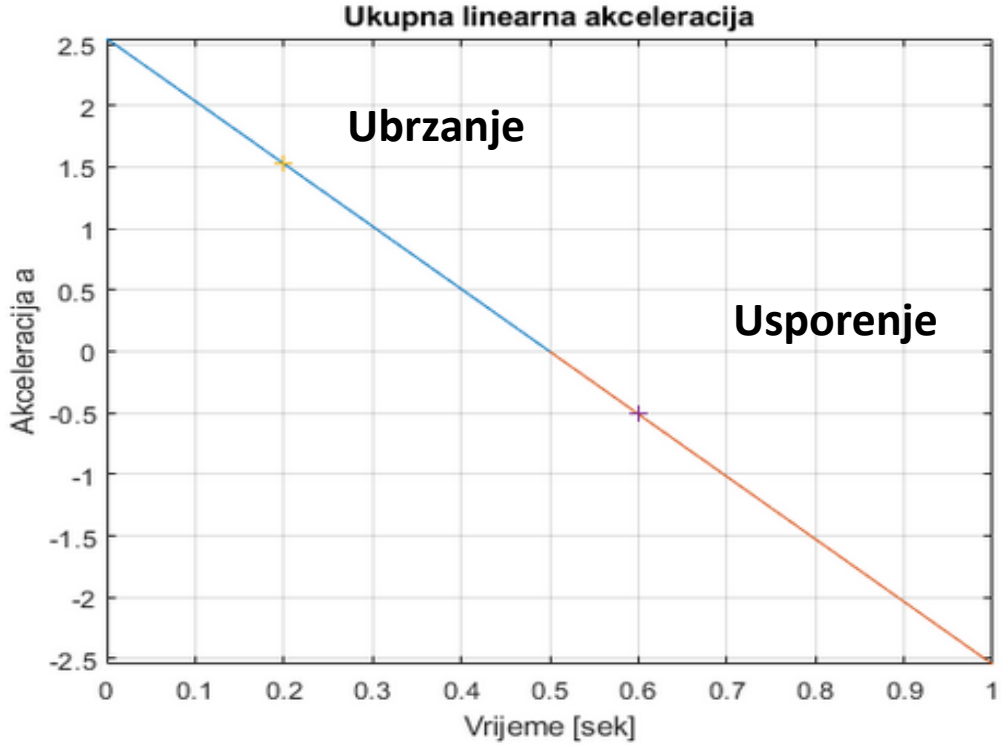
Sl. 1.58 a) - Trajektorija pomaka hvatišta alata po osi $w_2 = w_2(t)$.

Na slici 1.58 c) prikazana je trajektorija linearne brzine hvatišta alata $v = v(t)$ po putanje.



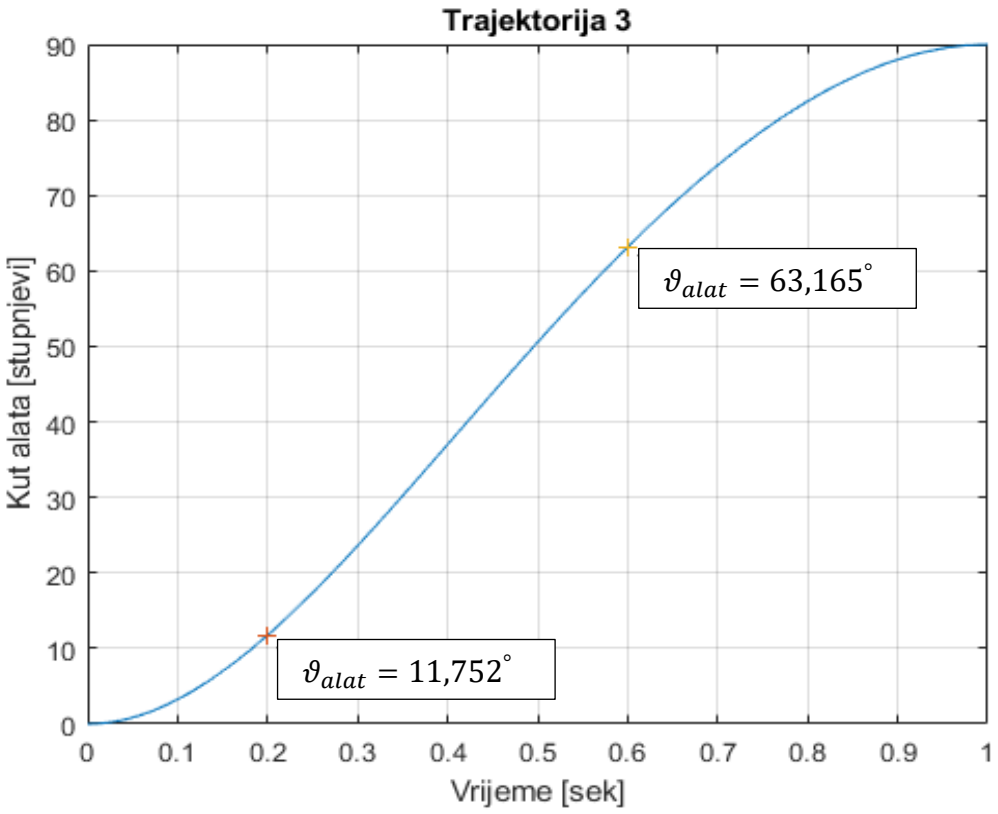
Sl. 1.58 c) - Trajektorija linearne brzine hvatišta alata $v = v(t)$ po putanje

Na slici 1.58 d) prikazana je trajektorija linearnog ubrzanja (akceleracije) hvatišta alata $a = a(t)$ po putanje.



Sl. 1.58 c) - Trajektorija linearnog ubrzanja (akceleracije) hvatišta alata $a = a(t)$ po putanje

Na slici 1.58 e) prikazana je trajektorija kutnog pomaka alata ϑ_{alat} po putanji.



Sl. 1.58 e) - Trajektorija kutnog pomaka alata ϑ_{alat} po putanji

Planiranje treajektorije kretanja robota u operacijskom prostoru po putanji provedeno je na temelju vektora konfiguracije hvatišta alata i određeni su profili pomaka, brzine i ubrzanja za kretanje robota po putanji između spojnih točaka interpoliranih kubnim polinomom.

Kroz prethodne primjere prikazana su dva su postupka generiranja trajektorija i to: od točke do točke (engl. *point-to-point*) – kada su zadane samo početna i krajnja točka kretanja alata robota, i kretanje po putanji (engl. *path motion*) – kada je zadan skup točaka duž putanje, a hvatište alata se kreće po spojnici početne i završne točke u operacijskom prostoru.

U nastavku će se analizirati dinamika robota. Naime robot pripada sustavima s raspodjeljenim parametrima (masama), za razliku od sustava s koncentriranim paramatrima gdje je masa koncentrirana na jednom mjestu. U slučaju robota kao sustava s rspodjeljenim masama u matematičkom opisu dinamike robota koriste se linearne parcijalne diferencijalne jednadžbe kako slijedu u poglavlju 7.

7. DINAMIKA ROBOTA

Dinamika robota podrazumijeva određivanje dinamičkog model (engl. *dinamic model*) manipulatora u odnosu na momente zglobova robota skupom parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, a krajnji rezultata je *jednadžba kretanja robota*. Postoje dvije osnovne metode određivanja jednadžbe kretanja robota i to: Langrangeova i Newton-Eulerova metoda. Prema tome problem dinamika robota bio bi sljedeći: *kako odrediti vrijednosti zakretnih momenata zglobova robota u odnosu na vremensku promjenu konfiguracije robotske ruke ako je zadan vektor konfiguracije zglobova robota, masa robotskih članaka, kutna brzina i ubrzanje u zglobovima robota, kao i trajektorija robota?*

Za rješavanje prije spomentog problema primjenit će se Langrangeova metoda koja opisuje dinamičko ponašanje robota na osnovu kinetičke i potencijalne energije, a rezultirajuća jednadžba kretanja robota izražena je pomoću momenata i kutnih pomaka. Dakle, dinamički model opisuje vezu između zakretnih momenata u zglobovima robota koji pogone članke robota i na taj način ostvaruju kretanje ukupne strukture robota.

Langrangeova metoda sastoji se u formiranju jednadžbi kretanja zglobova robota na temelju kinetičke i potencijalne energije čije su opće formule:

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

$$E_p = mgh$$

Gdje je:

m -masa [kg]

$v = \omega \cdot r$ – linearna brzina [m/s]

ω – kutna brzina [rad/sek]

r – radijus [m]

$g = 9{,}81\ {}^{m}/_{s^2}$ – gravitacija

h - visina [m]

Sile koje djeluju na zglobove manipulatora posljedica su sile inercije i gravitacijske sile kao posljedica kinetičke i potencijalne energije. Jednadžba kretanja robota određuje se na temelju Langrangeova funkcije koja će biti obrađena u nastavku.

7.1 Langrangeova funkcija (Langragian)

Langrangeova funkcija $\mathrm{L}(\dot{q}, q)$ glasi:

$$\mathrm{L}(\dot{q}, q) = \sum_{i=1}^{n} E_{k_i}(\dot{q}, q) - \sum_{i=1}^{n} E_{p_i}(q)$$

Momenti u zglobovima robota M_i određuju se na temlju parcijalne diferencijalne jednadžbe kretanja robota koja glasi:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L(\dot{q}, q) - \frac{\partial}{\partial q_i} L(\dot{q}, q) = M_i$$

Opće rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe glasi:

$$\boldsymbol{M(\ddot{q}, \dot{q}, q) = B(q) \cdot \ddot{q} + C(\dot{q}, q) \cdot \dot{q} + G(g)}$$

Gdje je:

$\boldsymbol{B(q)}$ – matrica inercije

$\boldsymbol{C(\dot{q}, q)}$ – matrica fizikalnih svojstava

$\boldsymbol{G(g)}$ - moment gravitacije

Opće rješenje može se napisati i na sljedeći način s time da se u obzir uzima i moment trenja:

$$\mathbf{M}(\ddot{\boldsymbol{q}}, \dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q}) = \boldsymbol{M_{inercije}(q) \cdot \ddot{q} + M_{cor}(q) \cdot \dot{q} + M_{cp}(q) \cdot \dot{q}^2 + M_q \cdot g + M_{trenja}(\dot{q}, q)}$$

Gdje je:

$\boldsymbol{M_{inercije}}$ – matrica momenta inercije

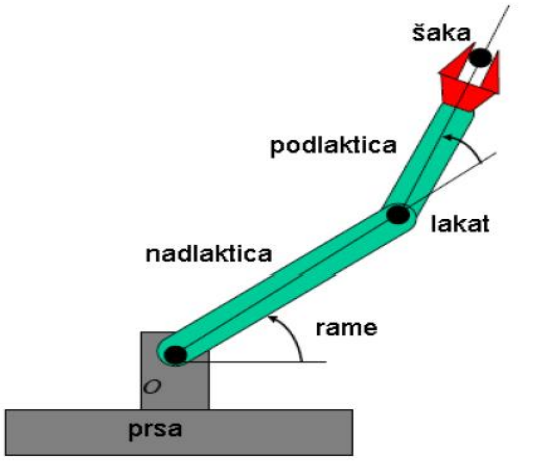
$\boldsymbol{M_{cor}}$ - matrica Coriolisove sile

$\boldsymbol{M_{cp}}$ – matrica centripetalne sile

$\boldsymbol{M_q}$ – matrica gravitacije

$\boldsymbol{M_{trenja}}$ – moment trenja

Na primjeru troosnog robota, prikazanog na slici 1.59, odredite će se prije spomenute matrice.



Sl. 1.59 Troosni robot (ibidem)

Smjer kretanja članaka robota oko osi zglobova orijentirat će se u smjeru gravitacije, stoga će vektor konfiguracije zglobova robota biti:

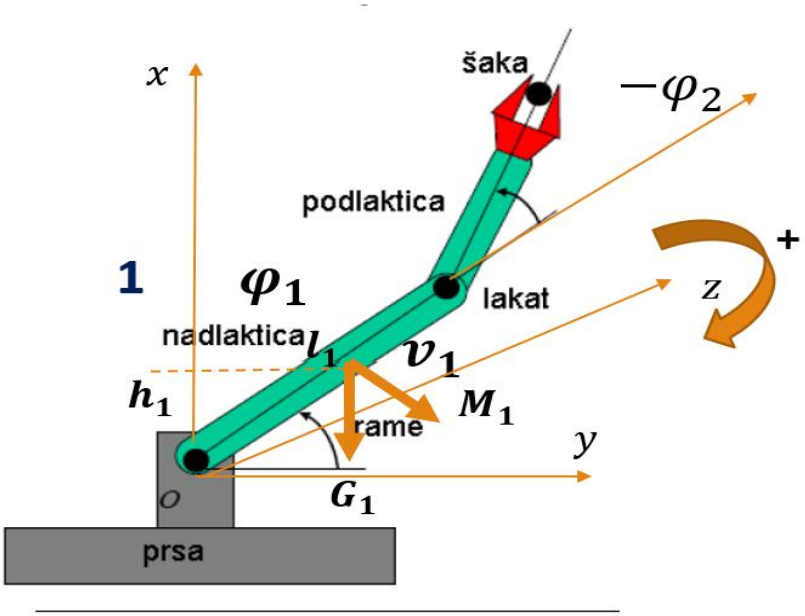
$$q = q(\varphi_1, \varphi_2, 0^\circ)$$

Pri čemu je:

$$\vartheta_1 = 90^\circ - \varphi_1$$

$$\vartheta_2 = -\varphi_2$$

Na slici 1.60 a) prikaza je rotacija prvog zgloba u smjeru gravitacije G_1.



Sl. 1.60 a) – Rotacija prvog zgloba robota (ibidem)

Kinetička energija prvog zgloba bila bi:

$$E_{k_1} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot l_1^2 \cdot \dot{\varphi}_1^2$$

gdje je:

m_1 – masa prvog članka [kg]

v_1 – linerana brzina prvog članka u težištu članka [m/s]

l_1 – udaljenost osi zgloba od težišta članka [m]

$\dot{\varphi}_1$ – kutna brzina prvog članka [rad/s]

Potencijalna energija prvog zgloba bila bi:

$$E_{p_1} = m_1 \cdot g \cdot h_1 = m_1 \cdot g \cdot l_1 \cdot \cos \varphi_1$$

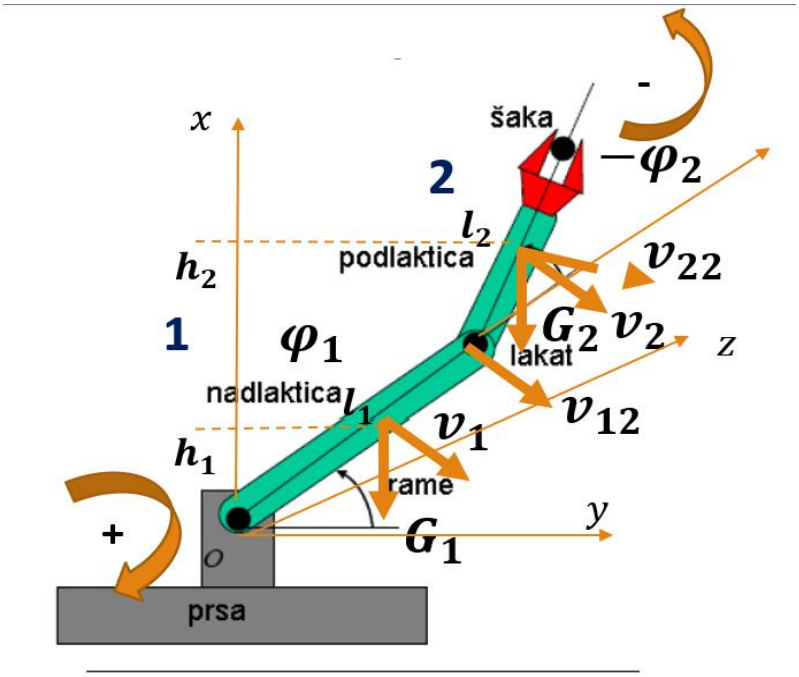
gdje je:

h_1 – visina težišta u odnosu na bazu robota [m]

φ_1 -kut rotacije prvog članka [rad ili °]

$g = 9{,}81\ {}^{m}/_{s^2}$ - gravitacija

Na isti način odredit će se kinetička i potencijalna energija drugog članka na način kako je prikazano na slici 1.60 b) gdje je rotacija drugog zgloba u suprotnom smjeru od gravitacije G_2.



Sl. 1.60 b) – Rotacija prvog i drugog zgloba robota (ibidem)

Kinetička energija drugog zgloba bila bi:

$$E_{k_2} = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2$$

Gdje je:

$$v_2^2 = v_{12}^2 + v_{22}^2 + 2 \cdot v_{12} \cdot v_{22} \cdot \cos\varphi_2$$

$$v_{12} = a_1 \cdot \dot{\varphi}_1$$

$$v_{22} = l_2 \cdot (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)$$

Odnosno

a_1 – dužina prvog članak [m]

l_2 - udaljenost osi zgloba od težišta članka [m]

$\dot{\varphi}_2$ - kutna brzina drugog članka [rad/s]

Potencijalna energija drugog zgloba bila bi:

$$E_{p_2} = m_2 \cdot g \cdot h_2$$

Gdje je:

$$h_2 = a_1 \cdot \cos\varphi_1 + l_2 \cdot \cos(\varphi_1 + \varphi_2)$$

Odnosno:

h_2 - visina težišta u odnosu na bazu robota [m]

φ_2 -kut rotacije drugog članka [rad]

Na temelju kinetičkih i potencijalnih energija oba zgloba robota određuje se Langrangeova funkcija $\mathrm{L}(\dot{q}, q)$:

$$\mathrm{L}(\dot{q}, q) = \sum_{i=1}^{2} E_{k_i}(\dot{q}, q) - \sum_{i=1}^{2} E_{p_i}(q) = [E_{k_1}(\dot{q}, q) + E_{k_2}(\dot{q}, q)] - [\, E_{p_1}(q) + E_{p_2}(q)]$$

Parcijalne diferencijalne jednadžbe kretanja robota sada glase:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} L(\dot{q}, q) - \frac{\partial}{\partial q_1} L(\dot{q}, q) = M_1$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_2} L(\dot{q}, q) - \frac{\partial}{\partial q_1} L(\dot{q}, q) = M_2$$

odnosno

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} L(\dot{q}, q) = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\{[E_{k_1}(\dot{q}, q) + E_{k_2}(\dot{q}, q)] - [E_{p_1}(q) + E_{p_2}(q)]\}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_1} L(\dot{q}, q) = \frac{\partial}{\partial q_1}\{[E_{k_1}(\dot{q}, q) + E_{k_2}(\dot{q}, q)] - [E_{p_1}(q) + E_{p_2}(q)]\}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_2} L(\dot{q}, q) = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_2}\{[E_{k_1}(\dot{q}, q) + E_{k_2}(\dot{q}, q)] - [E_{p_1}(q) + E_{p_2}(q)]\}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_2} L(\dot{q}, q) = \frac{\partial}{\partial q_2}\{[E_{k_1}(\dot{q}, q) + E_{k_2}(\dot{q}, q)] - [E_{p_1}(q) + E_{p_2}(q)]\}$$

Opće rješenje jednadžbe kretanja troosnog robota iznoslo bi:

$$\mathbf{M}(\ddot{\boldsymbol{q}}, \dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q}) = \boldsymbol{M_{inercije}}(\boldsymbol{q}) \cdot \ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{M_{cor}}(\boldsymbol{q}) \cdot \dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{M_{cp}}(\boldsymbol{q}) \cdot \dot{\boldsymbol{q}}^{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{M_g}(\boldsymbol{q}) \cdot \boldsymbol{g}$$

Pri čemu se moment trenja zanemaruje:

$$\boldsymbol{M_{trenja}}(\dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q}) = \mathbf{0}$$

Matrice iznose:

$$\boldsymbol{M_{inercije}}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} m_1 \cdot l_1^2 + m_2 \cdot (a_1^2 + l_2^2 + 2 \cdot a_1 \cdot l_2 \cdot \cos\varphi_2) & m_2 \cdot (l_2^2 + a_1 \cdot l_2 \cdot \cos\varphi_2) \\ m_2 \cdot (l_2^2 + a_1 \cdot l_2 \cdot \cos\varphi_2) & m_2 \cdot l_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M_{cor}}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} -2 \cdot m_2 \cdot a_1 \cdot l_2 \cdot \sin\varphi_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M_{cp}}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -m_2 \cdot a_1 \cdot l_2 \cdot sin\,\varphi_2 \\ m_2 \cdot a_1 \cdot l_2 \cdot \sin\varphi_2 & 0 \end{bmatrix}$$

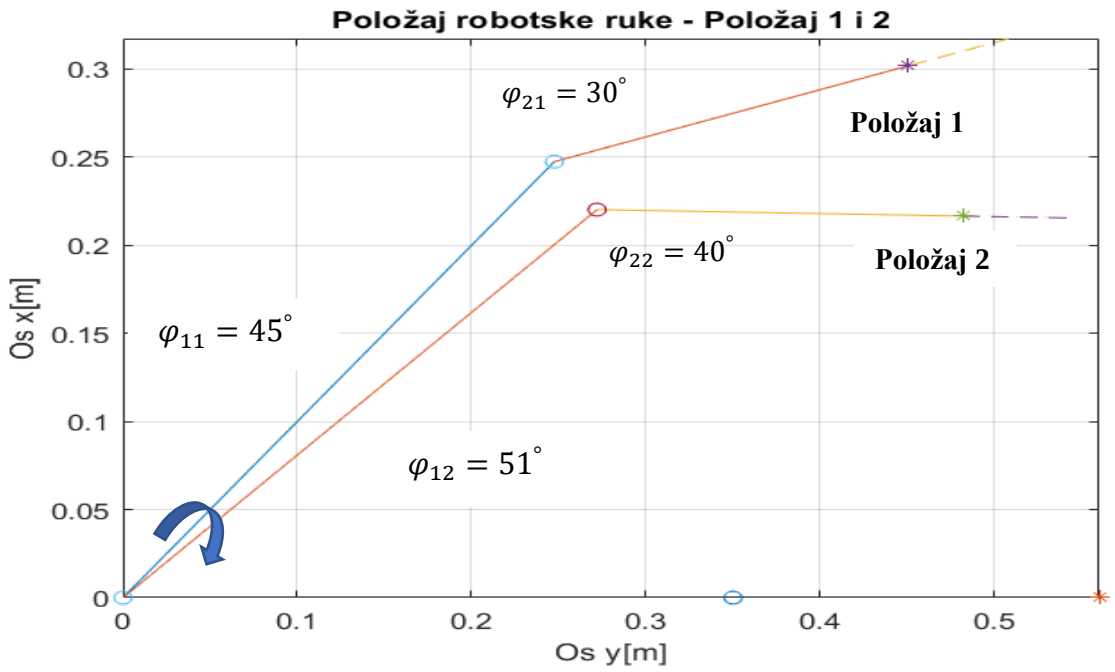
$$\boldsymbol{M_g}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} -[(m_1 \cdot l_1 + m_2 \cdot a_1) \cdot sin\,\varphi_1 + m_2 \cdot l_2 \cdot sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \\ -m_2 \cdot l_2 \cdot sin(\varphi_1 + \varphi_2) \end{bmatrix}$$

Jednadžba kretanja troosnog robota ima sljedeći oblik:

$$\boldsymbol{M}(\ddot{\boldsymbol{q}}, \dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q}) = \boldsymbol{M_{inercije}}(\boldsymbol{q}) \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \boldsymbol{M_{cor}}(\boldsymbol{q}) \cdot \dot{\varphi}_1 \cdot \dot{\varphi}_2 + \boldsymbol{M_{cp}}(\boldsymbol{q}) \cdot \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1^2 \\ \dot{\varphi}_2^2 \end{bmatrix} + \boldsymbol{M_q}(\boldsymbol{q}) \cdot g$$

Primjer br. 6

Na slici 1.61 prikazan je položaj 1 i 2 troosnog robota. Zadani su sljedeći podaci $m_1 = 5kg$, $l_1 = 0{,}17m$, $a_1 = 0{,}35m$, , $\varphi_{11} = 45^\circ$, $\varphi_{12} = 51^\circ$ $m_2 = 2{,}5kg$, $l_2 = 0{,}1m$, $a_2 = 0{,}21m$ $\varphi_{21} = 30^\circ$ i $\varphi_{22} = 40^\circ$.



Sl. 1.61 - Položaj 1 i 2 troosnog robota

Potrebno je odrediti jednadžbu kretanja troosnog robota $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}(\ddot{\boldsymbol{q}}, \dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q})$ tako što će se odrediti pojedine matrice jednadžbe kretanja u odnosu na vektor konfiguracije zglobova robota $q = q(\varphi_1, \varphi_2)$.

Matrica inercije $\boldsymbol{M_{iner}}$ iznosi:

$$\boldsymbol{M_{iner}}(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{bmatrix} m_1 \cdot l_1^2 + m_2 \cdot (a_1^2 + l_2^2 + 2 \cdot a_1 \cdot l_2 \cdot \cos\varphi_2) & m_2 \cdot (l_2^2 + a_1 \cdot l_2 \cdot \cos\varphi_2) \\ m_2 \cdot (l_2^2 + a_1 \cdot l_2 \cdot \cos\varphi_2) & m_2 \cdot l_2^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \cdot 0{,}17^2 + 2{,}5 \cdot (0{,}35^2 + 0{,}1^2 + 2 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}1 \cdot cos\varphi_2) & 2{,}5 \cdot (0{,}1^2 + 0{,}35 \cdot 0{,}1 \cdot cos\varphi_2) \\ 2{,}5 \cdot (0{,}1^2 + 0{,}35 \cdot 0{,}1 \cdot cos\varphi_2) & 2{,}5 \cdot 0{,}1^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}4757 + 0{,}175 \cdot cos\,\varphi_2 & 0{,}025 + 0{,}0875 \cdot cos\,\varphi_2 \\ 0{,}025 + 0{,}0875 \cdot cos\,\varphi_2 & 0{,}025 \end{bmatrix}$$

Vrijedi:

$$\boldsymbol{M_{iner}}(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{bmatrix} 0{,}4757 + 0{,}175 \cdot cos\,\varphi_2 & 0{,}025 + 0{,}0875 \cdot cos\,\varphi_2 \\ 0{,}025 + 0{,}0875 \cdot cos\,\varphi_2 & 0{,}025 \end{bmatrix}$$

Coriolisova matrica $\boldsymbol{M_{cor}}$ iznosi:

$$\boldsymbol{M_{cor}}(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{bmatrix} -2 \cdot m_2 \cdot a_1 \cdot l_2 \cdot sin\,\varphi_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \cdot 2{,}5 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}1 \cdot sin\,\varphi_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -0{,}175 \cdot sin\,\varphi_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vrijedi:

$$\boldsymbol{M_{cor}}(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{bmatrix} -0{,}175 \cdot sin\,\varphi_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Centripetalna matrica $\boldsymbol{M_{cp}}(\varphi_1, \varphi_2)$ iznosi:

$$\boldsymbol{M_{cp}}(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{bmatrix} 0 & -m_2 \cdot a_1 \cdot l_2 \cdot sin\,\varphi_2 \\ m_2 \cdot a_1 \cdot l_2 \cdot sin\,\varphi_2 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & -0.0875 \cdot sin\,\varphi_2 \\ 0{,}0875 \cdot sin\,\varphi_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Vrijedi:

$$\boldsymbol{M_{cp}}(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{bmatrix} 0 & -0.0875 \cdot sin\,\varphi_2 \\ 0{,}0875 \cdot sin\,\varphi_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrica gravitacije $\boldsymbol{M_g}$ iznosi:

$$\boldsymbol{M_g}(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{bmatrix} -[(m_1 \cdot l_1 + m_2 \cdot a_1) \cdot sin\,\varphi_1 + m_2 \cdot l_2 \cdot sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \\ -m_2 \cdot l_2 \cdot sin(\varphi_1 + \varphi_2) \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} -[(5 \cdot 0{,}17 + 2{,}5 \cdot 0{,}35) \cdot sin\,\varphi_1 + 2{,}5 \cdot 0{,}1 \cdot sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \\ -2{,}5 \cdot 0{,}1 \cdot sin(\varphi_1 + \varphi_2) \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} -(1{,}725 \cdot sin\varphi_1 + 0{,}25 \cdot sin(\varphi_1 + \varphi_2) \\ -0{,}25 \cdot sin(\varphi_1 + \varphi_2) \end{bmatrix}$$

Vrijedi:

$$\boldsymbol{M_g}(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{bmatrix} -(1{,}725 \cdot sin\varphi_1 + 0{,}25 \cdot sin(\varphi_1 + \varphi_2) \\ -0{,}25 \cdot sin(\varphi_1 + \varphi_2) \end{bmatrix}$$

Prema tome rješenje glasi:

$$\boldsymbol{M}(\ddot{\boldsymbol{\varphi}}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}, \boldsymbol{\varphi}) = \begin{bmatrix} 0{,}4757 + 0{,}175 \cdot cos\,\varphi_2 & 0{,}025 + 0{,}0875 \cdot cos\,\varphi_2 \\ 0{,}025 + 0{,}0875 \cdot cos\,\varphi_2 & 0{,}025 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} +$$
$$\begin{bmatrix} -0{,}175 \cdot sin\,\varphi_2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \dot{\varphi}_1 \cdot \dot{\varphi}_2 + \begin{bmatrix} 0 & -0.0875 \cdot sin\,\varphi_2 \\ 0{,}0875 \cdot sin\,\varphi_2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1^2 \\ \dot{\varphi}_2^2 \end{bmatrix} +$$
$$\begin{bmatrix} -(1{,}725 \cdot sin\varphi_1 + 0{,}25 \cdot sin(\varphi_1 + \varphi_2) \\ -0{,}25 \cdot sin(\varphi_1 + \varphi_2) \end{bmatrix} \cdot g$$

Za kuteve $\varphi_1 = 45^\circ$ i $\varphi_2 = 30^\circ$ vrijedit će:

$$\boldsymbol{M}(\ddot{\boldsymbol{\varphi}}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}, \boldsymbol{\varphi}) = \begin{bmatrix} 0{,}4757 + 0{,}175 \cdot cos\,30^{\circ} & 0{,}025 + 0{,}0875 \cdot cos\,30^{\circ} \\ 0{,}025 + 0{,}0875 \cdot cos\,30^{\circ} & 0{,}025 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} -0{,}175 \cdot sin\,30^{\circ} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \dot{\varphi}_1 \cdot \dot{\varphi}_2 + \begin{bmatrix} 0 & -0.0875 \cdot sin\,30^{\circ} \\ 0{,}0875 \cdot sin\,30^{\circ} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1^2 \\ \dot{\varphi}_2^2 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} -(1{,}725 \cdot sin 45^{\circ} + 0{,}25 \cdot \sin(45^{\circ} + 30^{\circ}) \\ -0{,}25 \cdot \sin(45^{\circ} + 30^{\circ}) \end{bmatrix} \cdot 9{,}81$$

Odnosno:

$$\boldsymbol{M_1} = \begin{bmatrix} 0{,}6273 & 0{,}3258 \\ 0{,}3258 & 0{,}025 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0{,}0875 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \dot{\varphi}_1 \cdot \dot{\varphi}_2 + \begin{bmatrix} 0 & -0{,}0437 \\ 0{,}0437 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1^2 \\ \dot{\varphi}_2^2 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} -14{,}334 \\ -2{,}368 \end{bmatrix}$$

Na isti način određeno je i za moment drugog zgloba za kuteve $\varphi_1 = 51^{\circ}$ i $\varphi_2 = 40^{\circ}$:

$$\boldsymbol{M}(\ddot{\boldsymbol{\varphi}}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}, \boldsymbol{\varphi}) = \begin{bmatrix} 0{,}4757 + 0{,}175 \cdot cos\,40^{\circ} & 0{,}025 + 0{,}0875 \cdot cos\,40^{\circ} \\ 0{,}025 + 0{,}0875 \cdot cos\,40^{\circ} & 0{,}025 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} -0{,}175 \cdot sin\,40^{\circ} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \dot{\varphi}_1 \cdot \dot{\varphi}_2 + \begin{bmatrix} 0 & -0.0875 \cdot sin\,40^{\circ} \\ 0{,}0875 \cdot sin\,40^{\circ} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1^2 \\ \dot{\varphi}_2^2 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} -(1{,}725 \cdot sin 51^{\circ} + 0{,}25 \cdot \sin(51^{\circ} + 40^{\circ}) \\ -0{,}25 \cdot \sin(51^{\circ} + 40^{\circ}) \end{bmatrix} \cdot 9{,}81$$

Odnosno:

$$\boldsymbol{M_2} = \begin{bmatrix} 0{,}6098 & 0{,}317 \\ 0{,}317 & 0{,}025 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0{,}1125 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \dot{\varphi}_1 \cdot \dot{\varphi}_2 + \begin{bmatrix} 0 & -0{,}0562 \\ 0{,}0562 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1^2 \\ \dot{\varphi}_2^2 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} -15{,}603 \\ -2{,}452 \end{bmatrix}$$

Momenti u zglobovima robota u položaju 1 i 2 kada nema kretanja hvatišta alata tj. robot se nalazi u ravnoteži bili bi:

$$\boldsymbol{M_1} = \begin{bmatrix} -14{,}334 \\ -2{,}368 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M_2} = \begin{bmatrix} -15{,}603 \\ -2{,}452 \end{bmatrix}$$

Orijentacija momenta $\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{M_1} \quad \boldsymbol{M_2}]^T$ u suprotnom je smjeru od orijentacije kutnog pomaka $q = q(\varphi_1, \varphi_2)$ u zglobovima robota, kako je vidljivo na slici 1.61. Razlog tome je sila teža $G = [G_1 \quad G_2]^T$ kojoj se suprostavljaju momenti kako bi se robot održao u ravnotežoj točki na zadanoj poziciji hvatišta alata.

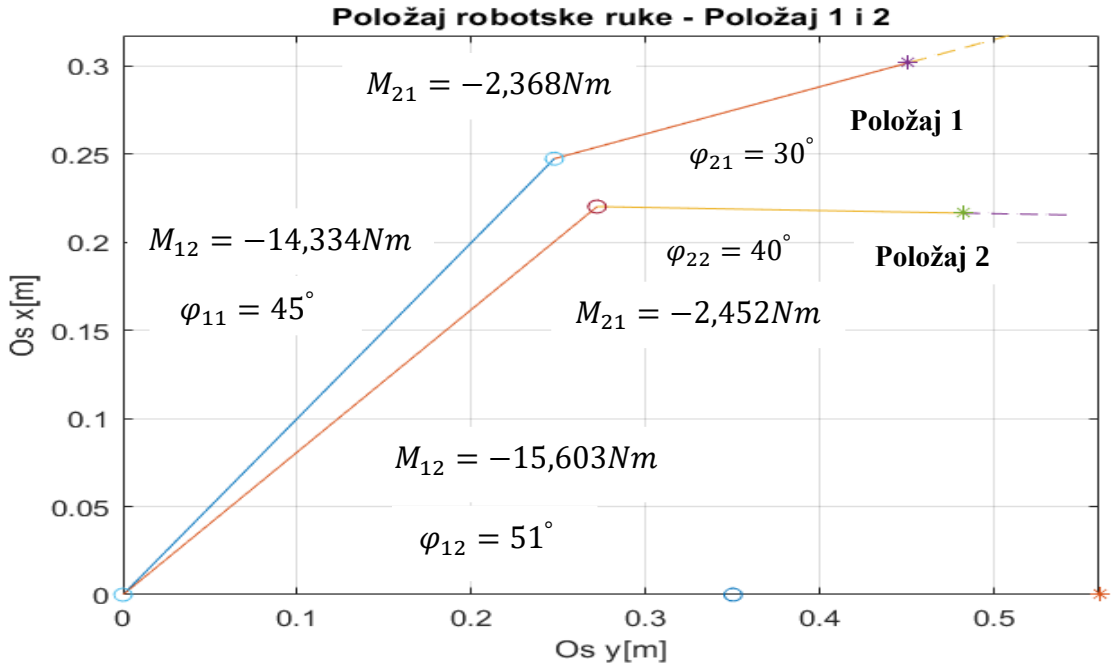
U početnoj i krajnjoj točki kretanja robota t_f kutna brzina i ubrzanje jednaki su nulu tj. vrijedi:

$$\ddot{\varphi}_1(0) = \ddot{\varphi}_2(0) = 0 \text{ i } \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$$

$$\ddot{\varphi}_1(t_f 0) = \ddot{\varphi}_2(t_f 0) = 0 \text{ i } \dot{\varphi}_1(t_f) = \dot{\varphi}_2(t_f) = 0$$

7.2 Jednadžba kretanja robota

Na slici 1.62 prikazani su momenti zglobova robota u točki ravnoteže za pozicije 1 i 2.



Sl. 1.62 – Momenti u zglobovima robota u točki ravnoteže

Novi zahtjev koji se postavlja pred dinamiku robota je određivanje trajektorije momenata u zglobovima robota ako se kretanja robota ostvaruje od „točke do točke“ (Point-to-Point). Naime tada vrijedi za kutni pomak prvog članka φ_1:

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2 + \varphi_{1p}, & 0 < t \leq t_c \\ \alpha \cdot t_c \cdot \left(t - \frac{t_c}{2}\right) + \varphi_{1p}, & t_c < t \leq t_f - t_c \\ -\frac{1}{2}\alpha \cdot \left(t_f - t\right)^2 + \varphi_{1k}, & t_f - t_c < t \leq t_f \end{cases}$$

Pri čemu je:

$$\varphi_{1p} = \varphi_{11} = 45^{\circ}$$
$$\varphi_{1k} = \varphi_{12} = 51^{\circ}$$

Odnosno za kutni pomak drugog članka φ_2:

$$\varphi_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2 + \varphi_{1p}, & 0 < t \leq t_c \\ \alpha \cdot t_c \cdot \left(t - \frac{t_c}{2}\right) + \varphi_{1p}, & t_c < t \leq t_f - t_c \\ -\frac{1}{2}\alpha \cdot \left(t_f - t\right)^2 + \varphi_{1k}, & t_f - t_c < t \leq t_f \end{cases}$$

Pri čemu je:

$$\varphi_{2p} = \varphi_{21} = 30^{\circ}$$
$$\varphi_{2k} = \varphi_{22} = 40^{\circ}$$

Primjer br.7

Potrebno je odrediti trajektoriju zglobnih momenta troosnog robota zadanog položaja kako je prikazano na slici 1.62. Neka zadano vrijeme kretanja od početne do konačne točke iznosi $t_f = 2sek$ i neka je kutno ubrzanje prvog članka $\alpha = \ddot{q}_c = 0.2rad/sek^2$. U tom slučaju potrebno je provjeriti je li rješenje moguće. To znači kako treba biti ispunjen sljedeći uvjet:

$$|\ddot{q}_c| \geq \frac{4 \cdot |q_f - q_i|}{t_f^2} \rightarrow 0{,}1 \geq \frac{4 \cdot \left|(51^{\circ} - 45^{\circ})\right| \cdot {}^{\pi}/_{180^{\circ}}}{2^2}$$

Kako je rješenje:

$$0{,}2 \geq 0{,}1047$$

Ispunjen je uvjet i rješenje je moguće.

Za <u>prvi članak robota</u> vrijedit će sljedeći profili, uzimajući u obzir početne uvjete:

$$q_{i1} = \varphi_{1p} = 45^{\circ} = 0{,}7854rad$$
$$q_{f1} = \varphi_{1k} = 51^{\circ} = 0{,}89rad$$
$$\alpha = \ddot{q}_c = 0{,}2rad/sek^2$$

Potrebno je odrediti vrijeme maksimalnog kutnog ubrzanja t_c koje iznosi:

$$t_c = \frac{t_f}{2} - \sqrt{\frac{t_f^2}{4} - \frac{q_{f1} - q_{i1}}{\ddot{q}_c}} = \frac{2}{2} - \sqrt{\frac{2^2}{4} - \frac{0{,}89 - 0{,}7854}{0{,}2}} = 0{,}31\ sek$$

Slijedom prije izračunanog može se napisati za prvi članak:

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}0{,}2 \cdot t^2 + 0{,}7854, & 0 < t \leq 0{,}31 \\ 0{,}2 \cdot 0{,}31 \cdot \left(t - \frac{0{,}31}{2}\right) + 0{,}7854, & 0{,}31 < t \leq 1{,}69 \\ -\frac{1}{2}0.2 \cdot (2 - t)^2 + 0{,}89, & 1{,}69 < t \leq 2 \end{cases}$$

Odnosno vrijedi:

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} 0{,}1 \cdot t^2 + 0{,}7854, & 0 < t \leq 0{,}31 \\ 0{,}062 \cdot (t - 0{,}1505) + 0{,}7854, & 0{,}31 < t \leq 1{,}69 \\ -0.1 \cdot (2 - t)^2 + 0{,}89, & 1{,}69 < t \leq 2 \end{cases}$$

Za drugi <u>članak robota</u> vrijedit će sljedeći profili, uzimajući u obzir početne uvjete:

$$q_{i2} = \varphi_{2p} = 30^{\circ} = 0{,}5236rad$$
$$q_{f2} = \varphi_{2k} = 40^{\circ} = 0{,}698rad$$

Kako bi zadržali jednako vrijeme maksimalnog kutnog ubrzanja $t_c = 0{,}31sek$ potrebno je odrediti kutno ubrzanje drugog članka ne temelju prethodno određene relacije:

$$\ddot{q}_c \cdot \left(t_c^2 - t_f \cdot t_c\right) + q_f - q_i = 0$$

Prema tome vrijedi:

$$\alpha = \ddot{q}_c = -\frac{q_f - q_i}{t_c^2 - t_f \cdot t_c} = -\frac{0{,}698 - 0{,}5236}{0{,}31^2 - 2 \cdot 0{,}31} \cong 0{,}3331$$

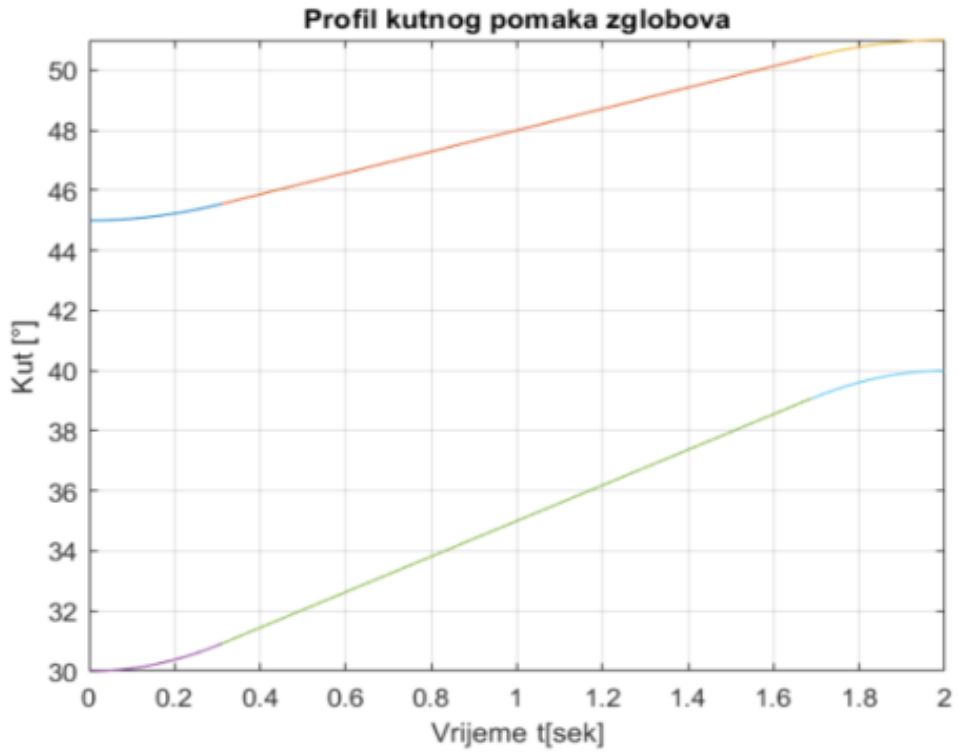
Slijedom prije izračunanog može se napisati za drugi članak:

$$\varphi_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}0{,}3331 \cdot t^2 + 0{,}5236, & 0 < t \leq 0{,}31 \\ 0{,}3331 \cdot 0{,}31 \cdot \left(t - \frac{0{,}31}{2}\right) + 0{,}5236, & 0{,}31 < t \leq 1{,}69 \\ -\frac{1}{2}0{,}3331 \cdot (2 - t)^2 + 0{,}698, & 1{,}69 < t \leq 2 \end{cases}$$

Odnosno vrijedi:

$$\varphi_2(t) = \begin{cases} 0{,}1666 \cdot t^2 + 0{,}5236, & 0 < t \leq 0{,}31 \\ 0{,}1033 \cdot \left(t - \frac{0{,}31}{2}\right) + 0{,}5236, & 0{,}31 < t \leq 1{,}69 \\ -0{,}1666 \cdot (2 - t)^2 + 0{,}698, & 1{,}69 < t \leq 2 \end{cases}$$

Na slici 1.63 prikazan je profil kutnog pomaka $\varphi_1(t)$ i $\varphi_2(t)$.



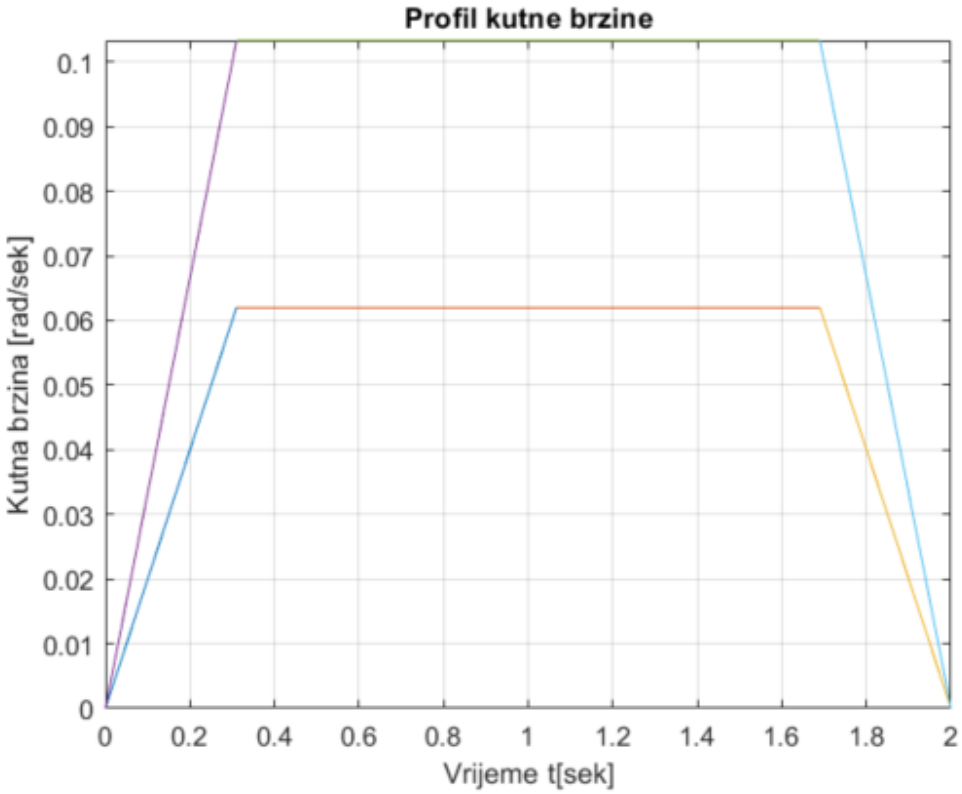
Sl. 1.63 -Profil kutnog pomaka

Kutna brzina za prvi i drugi članak iznosi:

$$\dot{\varphi}_1(t) = \begin{cases} 0{,}2 \cdot t, & 0 < t \leq 0{,}31 \\ 0{,}062\,, & 0{,}31 < t \leq 1{,}69 \\ 0.4 - 0.2 \cdot t, & 1{,}69 < t \leq 2 \end{cases}$$

$$\dot{\varphi}_2(t) = \begin{cases} 0{,}3331 \cdot t, & 0 < t \leq 0{,}31 \\ 0{,}1033\,, & 0{,}31 < t \leq 1{,}69 \\ 0{,}6664 - 0.3331 \cdot t, & 1{,}69 < t \leq 2 \end{cases}$$

Na slici 1.64 prikazana je profil kutne brzine.



Sl. 1.64 – Profil kutne brzine

Kutno ubrzanje zglobova robota iznosi:

$$\ddot{\varphi}_1 = 0{,}2\ {}^{rad}/_{s^2}$$
$$\ddot{\varphi}_2 = 0{,}3331\ {}^{rad}/_{s^2}$$

Na temelju određenog profila kutnog pomaka, brzine i ubrzanja, a na temelju jednadžbe kretanja robota, moguće je odrediti trajektorije zakretnih momenata zglobova robota. Isto će se provesti po pojedinim matricama robota u jednadžbi kretanja, a zatim zbirno za svaki pojedini zglob.

Moment inercije

Za moment inercije vrijedi:

$$\begin{bmatrix} M_{1iner} \\ M_{2iner} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}4757 + 0{,}175 \cdot cos\,\varphi_2(t) & 0{,}025 + 0{,}0875 \cdot cos\,\varphi_2(t) \\ 0{,}025 + 0{,}0875 \cdot cos\,\varphi_2\,(t) & 0{,}025 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix}$$

gdje je:

$$\varphi_2(t) = \begin{cases} 0{,}1666 \cdot t^2 + 0{,}5236, & 0 < t \leq 0{,}31 \\ 0{,}1033 \cdot \left(t - \dfrac{0{,}31}{2}\right) + 0{,}5236, & 0{,}31 < t \leq 1{,}69 \\ -0{,}1666 \cdot (2 - t\,)^2 + 0{,}698, & 1{,}69 < t \leq 2 \end{cases}$$

$$\ddot{\varphi}_1 = 0{,}2\ {}^{rad}/_{s^2}$$
$$\ddot{\varphi}_2 = 0{,}3331\ {}^{rad}/_{s^2}$$

Radi o malim kutnim pomacima u intervalima $0 < t \leq 0{,}31$ i $1{,}69 < t \leq 2$ jer je:

$$\varphi_2(0{,}31) = 0{,}1666 \cdot 0{,}31^2 + 0{,}5236 = 0{,}5396 = 30{,}917^\circ$$

Prema tome ubrzanje odnosno inercija je prisutna u intervalu $30^\circ < \varphi_2 \leq 30{,}917^\circ$ odnosno $40^\circ - 0{,}917^\circ < \varphi_2 \leq 40^\circ$. Kako su ubrzanja konstantna, može se zaključiti da je promjena inercije zanimariva u odnosu na vremenski intreval, stoga za I. segment vrijedi:

$$\begin{bmatrix} M_{1iner} \\ M_{2iner} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}4757 + 0{,}175 \cdot cos\,30^\circ & 0{,}025 + 0{,}0875 \cdot cos\,30^\circ \\ 0{,}025 + 0{,}0875 \cdot cos\,30^\circ & 0{,}025 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}3331 \end{bmatrix}$$

Odnosno:

$$M_{1iner} = 0{,}159Nm$$
$$M_{2iner} = 0{,}0285Nm$$

Za II. segment vrijedi:

$$\begin{bmatrix} M_{1iner} \\ M_{2iner} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}4757 + 0{,}175 \cdot cos\,40^\circ & 0{,}025 + 0{,}0875 \cdot cos\,40^\circ \\ 0{,}025 + 0{,}0875 \cdot cos\,40^\circ & 0{,}025 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}3331 \end{bmatrix}$$

Odnosno:

$$M_{1iner} = 0{,}1526Nm$$
$$M_{2iner} = 0{,}0267Nm$$

Momen Coriolisove sile

Za moment Coriolisove sile vrijedi:

$$M_{1cor} = -0{,}175 \cdot sin\,\varphi_2(t) \cdot \dot{\varphi}_1(t) \cdot \dot{\varphi}_2(t)$$

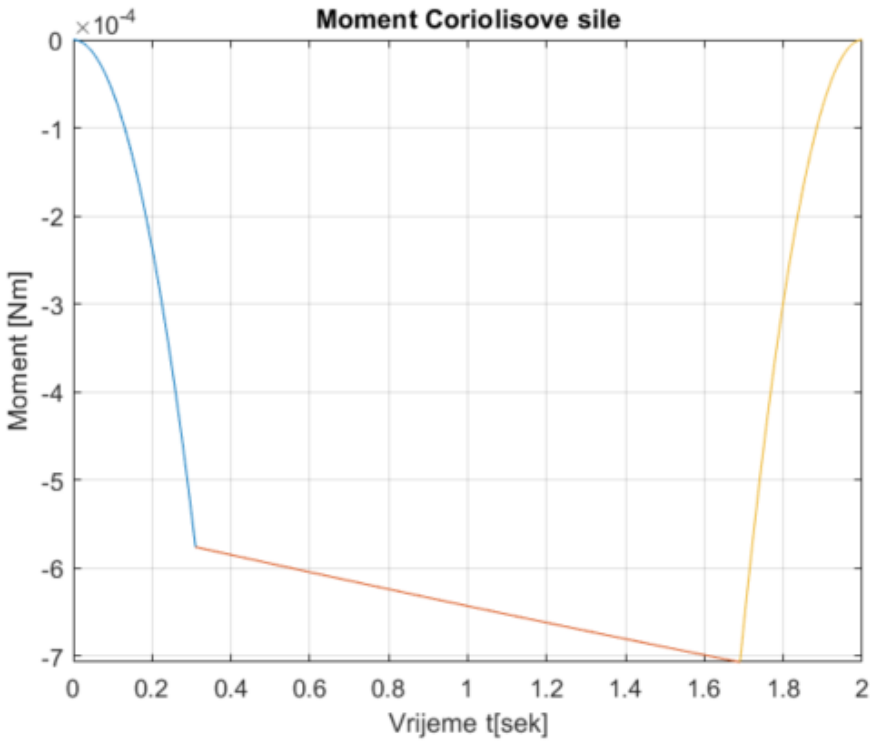
Gdje je:

$$\varphi_2(t) = \begin{cases} 0{,}1666 \cdot t^2 + 0{,}5236, & 0 < t \leq 0{,}31 \\ 0{,}1033 \cdot \left(t - \dfrac{0{,}31}{2}\right) + 0{,}5236, & 0{,}31 < t \leq 1{,}69 \\ -0{,}1666 \cdot (2 - t)^2 + 0{,}698, & 1{,}69 < t \leq 2 \end{cases}$$

$$\dot{\varphi}_1(t) = \begin{cases} 0{,}2 \cdot t, & 0 < t \leq 0{,}31 \\ 0{,}062\,, & 0{,}31 < t \leq 1{,}69 \\ 0.4 - 0.2 \cdot t, & 1{,}69 < t \leq 2 \end{cases}$$

$$\dot{\varphi}_2(t) = \begin{cases} 0{,}3331 \cdot t, & 0 < t \leq 0{,}31 \\ 0{,}1033\,, & 0{,}31 < t \leq 1{,}69 \\ 0{,}6664 - 0.3331 \cdot t, & 1{,}69 < t \leq 2 \end{cases}$$

Coriolisova sila prisutna je samo u momentu prvog zgloba, dok je u momentu drugog zgloba jednaka nuli. Coriolisova sila je isto tako inercijska sila koja djeluje na zglob robota u rotirajućim sustavima kada se kreću pod nekim kutem u odnosu na rotacijsku os sustava. Na slici 1.65 prikazan je moment Coriolisove sila za zglob robota.



Sl. 1.65 - Moment Coriolisove sile

Sa slike 1.65 može se uočiti ako su vrijednosti momenta Coriolisove sile zanemarivi ($Max. = -7 \cdot 10^{-4}$) jer su mase, težišta i kutne brzine zgloba malih vrijednosti. Isto će vrijediti i za centripetalnu silu koja se ostvaruje u zglobovima robota.

Centripetalni momet

Za centripetalni moment vrijedi:

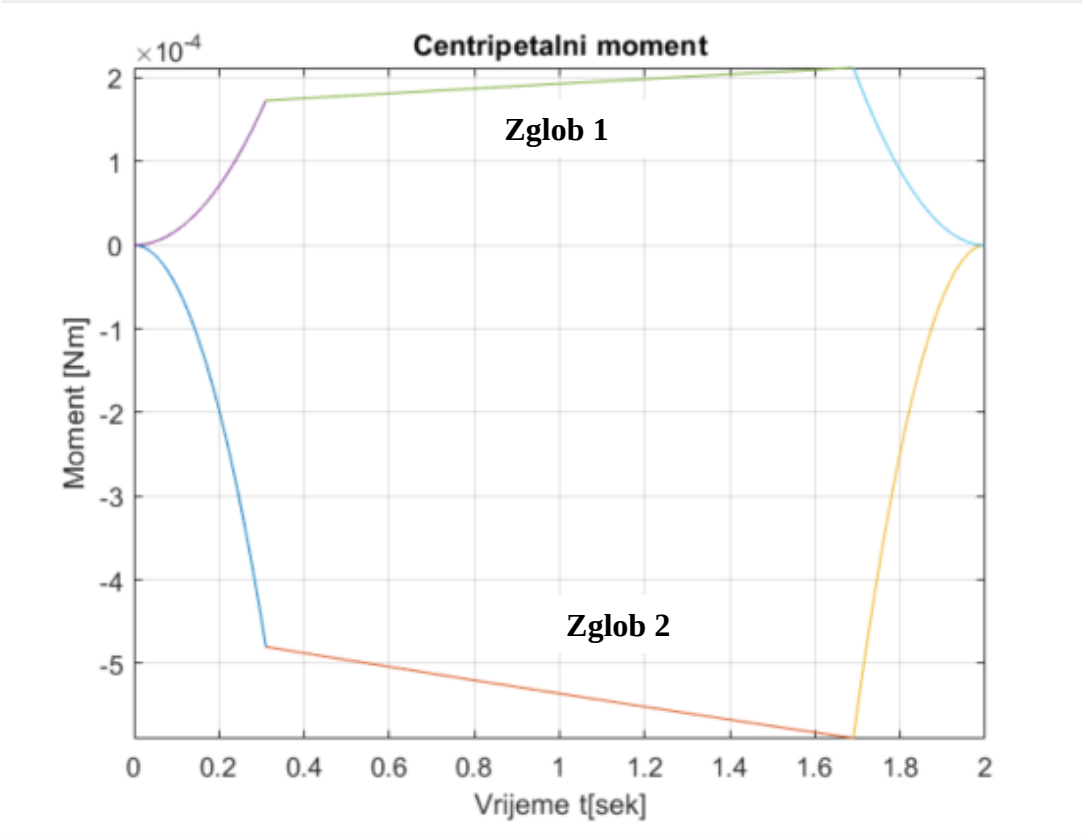
$$\begin{bmatrix} M_{1cp} \\ M_{2cp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.0875 \cdot sin\,\varphi_2(t) \\ 0{,}0875 \cdot sin\,\varphi_2\,(t) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1^2(t) \\ \dot{\varphi}_2^2(t) \end{bmatrix}$$

Gdje je:

$$\dot{\varphi}_1(t) = \begin{cases} 0{,}2 \cdot t, & 0 < t \leq 0{,}31 \\ 0{,}062 \cdot t, & 0{,}31 < t \leq 1{,}69 \\ 0.4 - 0.2 \cdot t, & 1{,}69 < t \leq 2 \end{cases}$$

$$\dot{\varphi}_2(t) = \begin{cases} 0{,}3331 \cdot t, & 0 < t \leq 0{,}31 \\ 0{,}1033 \cdot t, & 0{,}31 < t \leq 1{,}69 \\ 0{,}6664 - 0.3331 \cdot t, & 1{,}69 < t \leq 2 \end{cases}$$

Centripetalna sila djeluje na zglobove robota tako što mjenja smjer brzine i zakrivljuje putanju, i uvjek je okomita na vektor trenutne brzine kretanja zglobova robota. Na slici 1.66 prikazan je centripetalni moment u zglobovima robota.



Sl. 1.66 – Centripetalni moment

Najveću vrijednost ukupnog momenta očituje se kao posljedica potencijalne energije masa članaka robota, a izražava se putem momenta gravitacije. Moment gravitacije posljedica je teažine pojedinog članka robota i njegovog težišta u odnosu na os rotacije u bazi robota, što će se u nastavku pobliže pojasniti.

Moment gravitacije

Za moment gravitacije vrijedi:

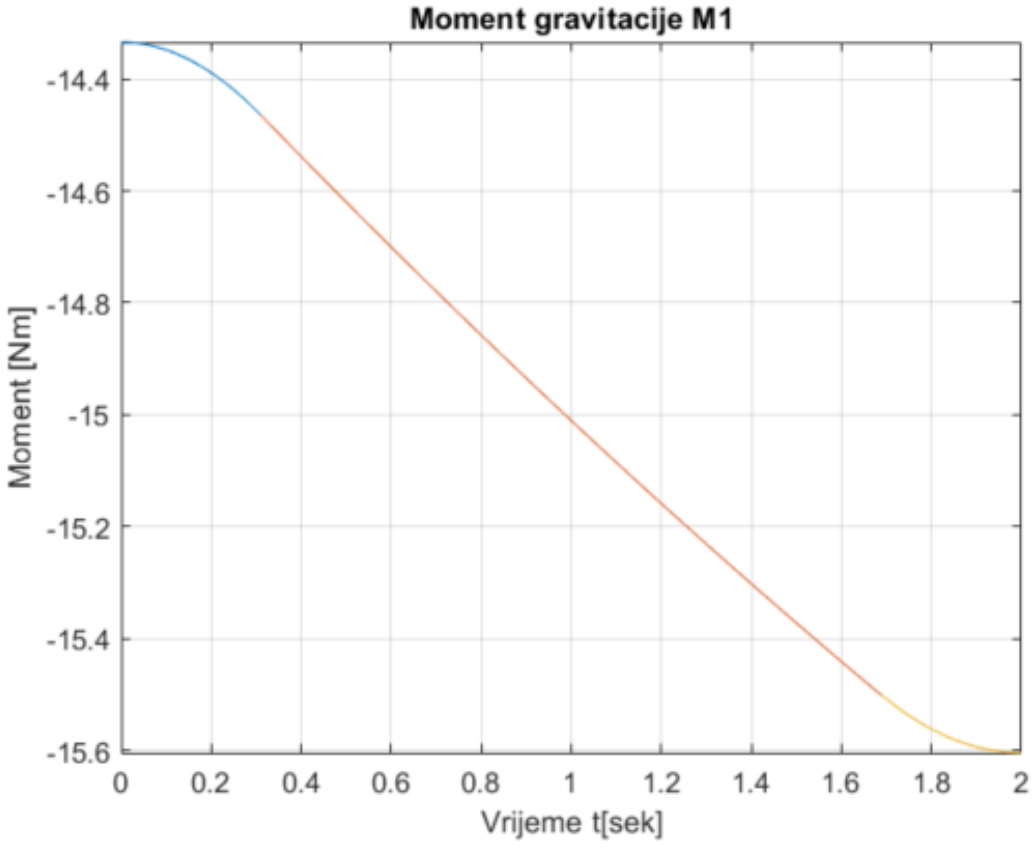
$$\begin{bmatrix} M_{1gr} \\ M_{2gr} \end{bmatrix} = 9{,}81 \cdot \begin{bmatrix} -1{,}725 \cdot sin\varphi_1(t) - 0{,}25 \cdot sin[\varphi_1(t) + \varphi_2(t)] \\ -0{,}25 \cdot sin[\varphi_1(t) + \varphi_2(t)] \end{bmatrix}$$

Gdje je:

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} 0{,}1 \cdot t^2 + 0{,}7854, & 0 < t \leq 0{,}31 \\ 0{,}062 \cdot \left(t - \dfrac{0{,}31}{2}\right) + 0{,}7854, & 0{,}31 < t \leq 1{,}69 \\ -0.1 \cdot (2 - t)^2 + 0{,}89, & 1{,}69 < t \leq 2 \end{cases}$$

$$\varphi_2(t) = \begin{cases} 0{,}1666 \cdot t^2 + 0{,}5236, & 0 < t \leq 0{,}31 \\ 0{,}1033 \cdot \left(t - \dfrac{0{,}31}{2}\right) + 0{,}5236, & 0{,}31 < t \leq 1{,}69 \\ -0{,}1666 \cdot (2 - t)^2 + 0{,}698, & 1{,}69 < t \leq 2 \end{cases}$$

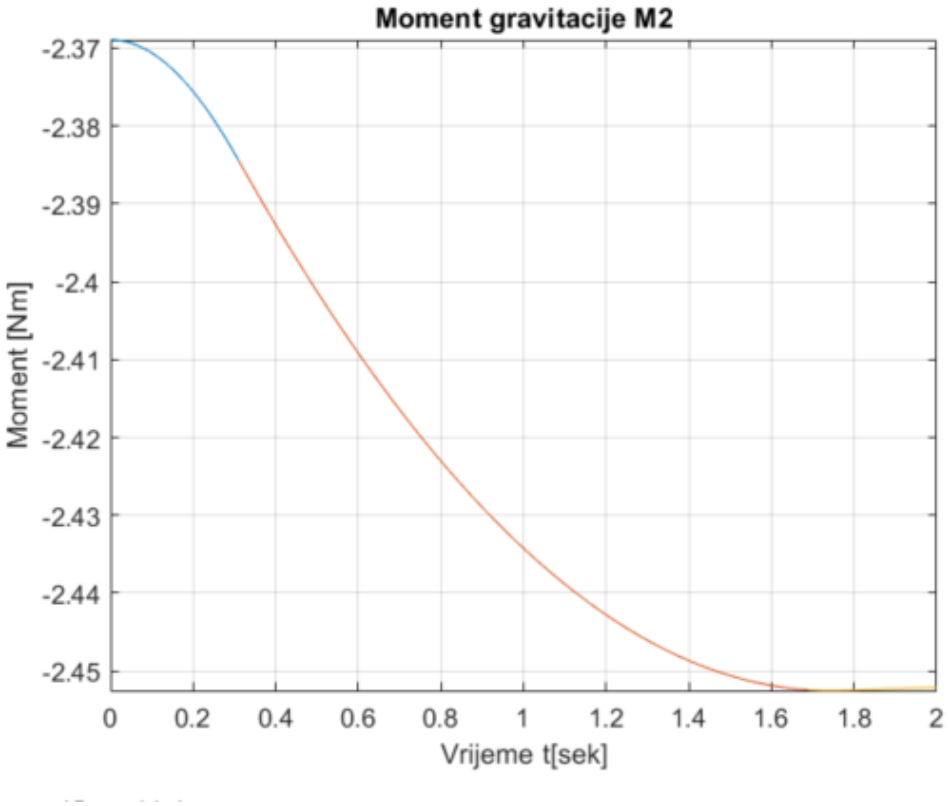
Na slici 1.67 a) prikazan je moment gravitacije u prvom zglobu.



Sl. 1.67 a) - Moment gravitacije u prvom zglobu

Moment je negativnog predznaka jer se suprostavlja učinku sile teže odnosno suprotno je orijentiran od smjera rotacije zglobova robota.

Na slici 1.67 b) prikazan je moment gravitacije u drugom zglobu.



Sl. 1.67 b) - Moment gravitacije u drugom zglobu

Momenti zglobova robota

Zbroj svih prethodno određenih momenta u zglobovima robota (princip superpozicije) daje konačnu vrijednost momenta zglobova na trajektoriji iz položaja 1 u položaj 2, kako je i prethodno prikazano na slici 1.62.

Jednadžba glasi:

$$M_1(t) = M_{1iner} + M_{1cor}(t) + M_{1cp}(t) + M_{1gr}(t)$$

$$M_2(t) = M_{2iner} + M_{2cor}(t) + M_{2cp}(t) + M_{2gr}(t)$$

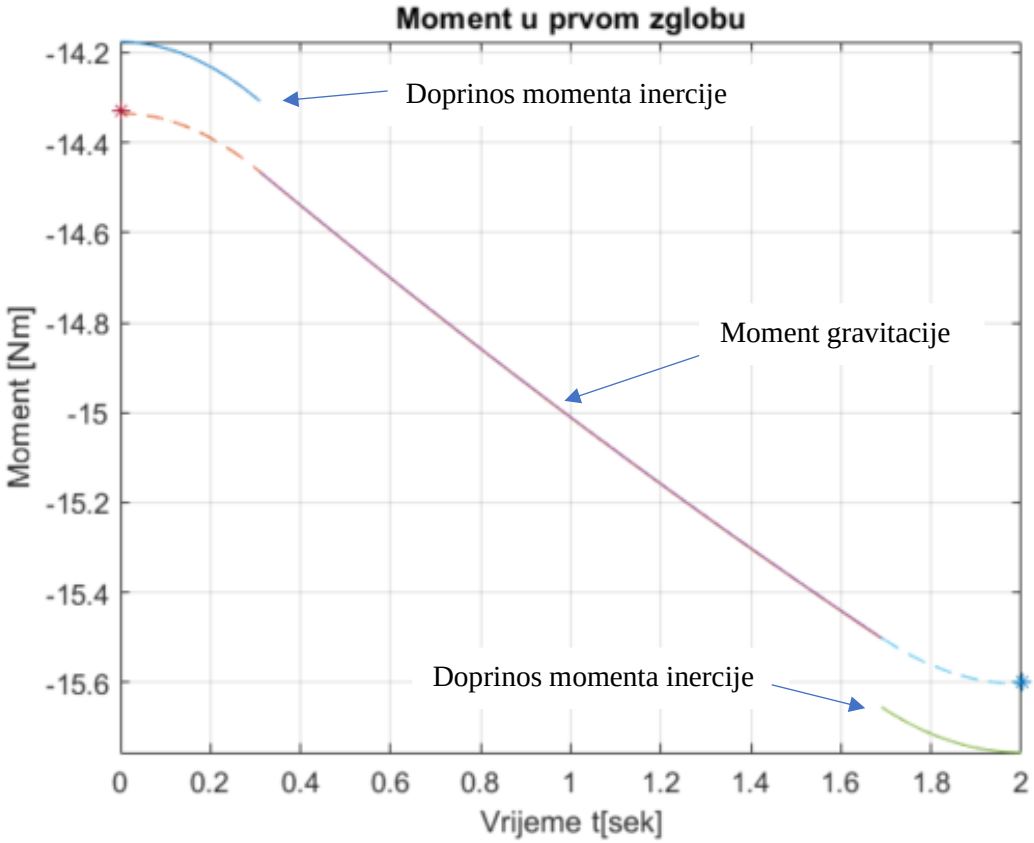
U konkretnom slučaju može se zanemariti utjecaj Coriolisove i centripetalne sile i tada momenti glase:

$$M_1(t) \cong M_{1iner} + M_{1gr}(t)$$

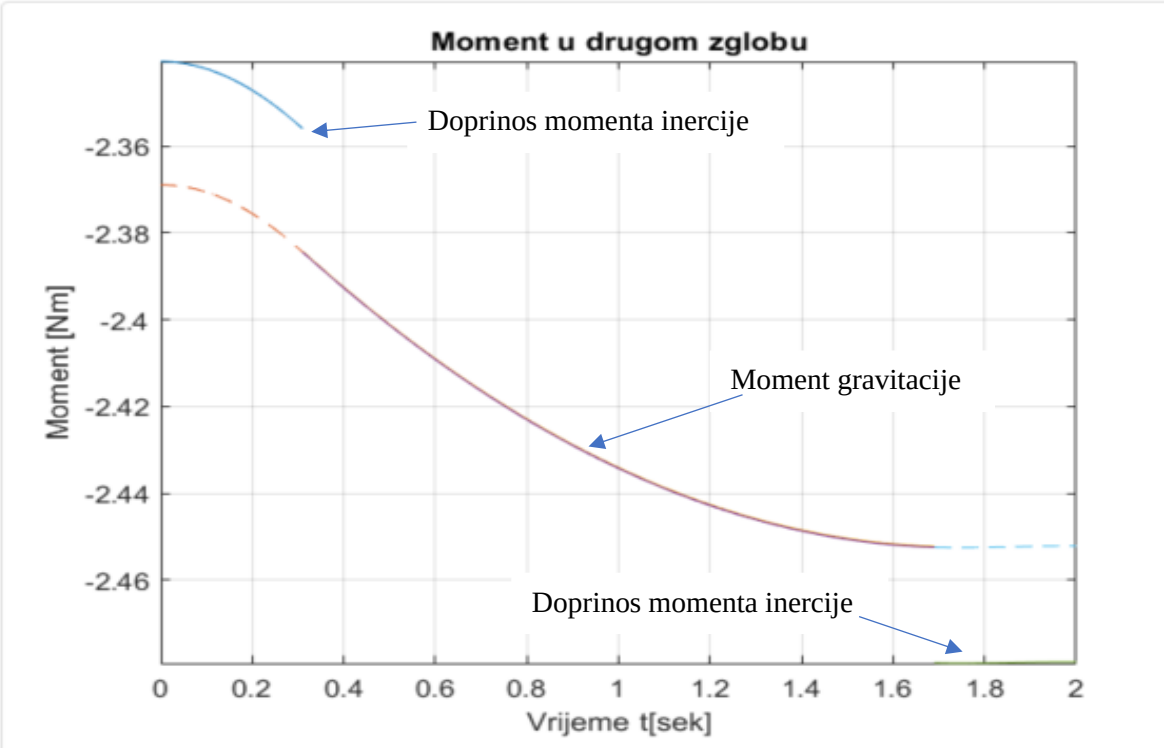
$$M_2(t) \cong M_{2iner} + M_{2gr}(t)$$

Na temelju prethodno navedenih relacije izrađene su trajektorije zakretnih momenta robota prilikom kretanja robota iz položaja 1 u položaj 2 na način da zadano vrijeme kretanja robota od početne do konačne točke iznosi $t_f = 2sek$ i da je kutno ubrzanje prvog članka $\alpha = \ddot{q}_c = 0.2rad/sek^2$, a vrijeme ubrzanja t_c jednako za oba zgloba. Na slici 1.68 a) prikazana je

trajektorija zakretnog momenta prvog zgloba $M_1(t)$, dok je na slici 1.68 b) prikazana trajektorija zakretnog momenta drugog zgloba $M_2(t)$.



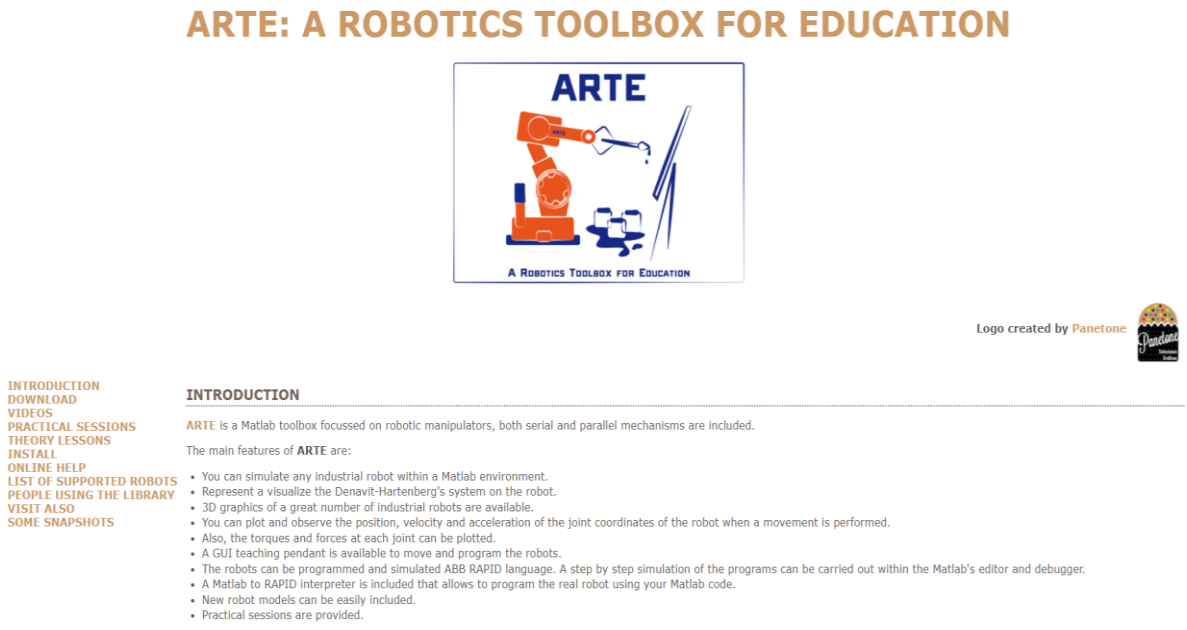
Sl. 1.68 a) – Moment u prvom zglobu robota $M_1(t)$



Sl. 1.68 b) – Moment u drugom zglobu robota $M_2(t)$

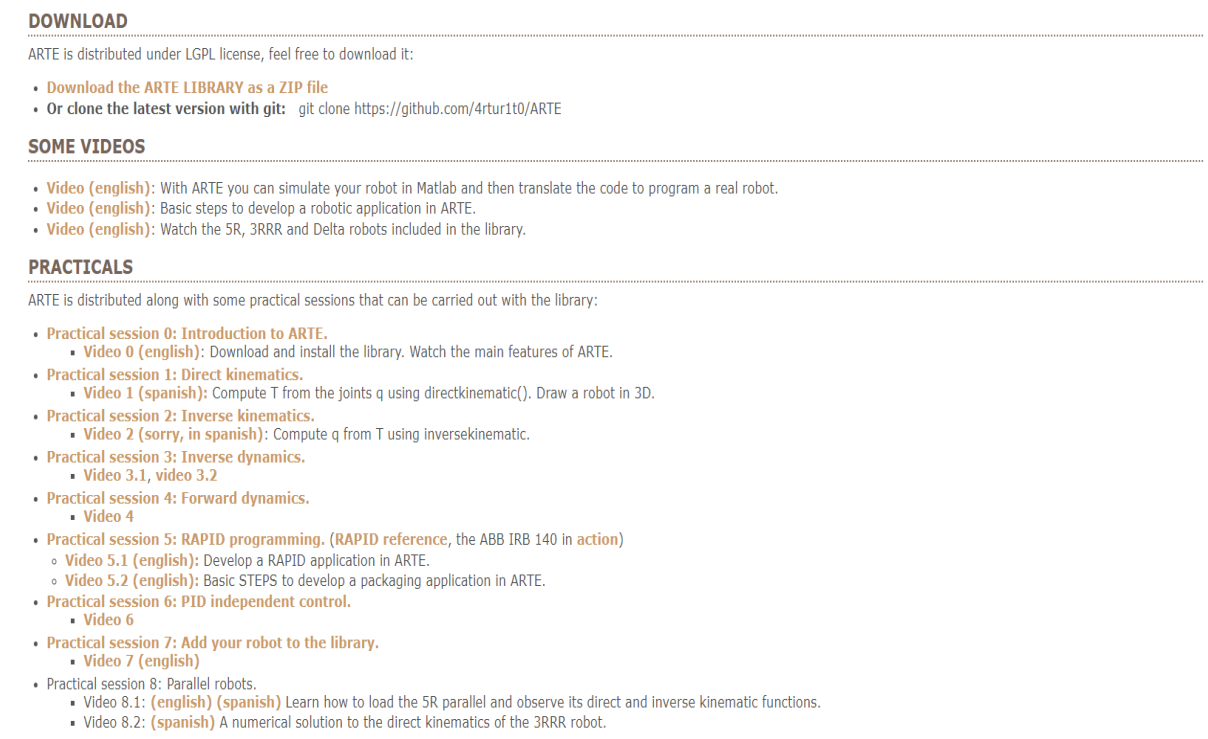
8. PROGRAMIRANJE ROBOTA PUTEM SIMULACIJSKOG MODELA

Programiranje robota provest će se kroz simulacijski model *arte* koji je podržan u MatLab-u (https://arvc.umh.es/arte/index_en.html). Na slici 1.69 prikazana je naslovna stranica paketa *arte*. .



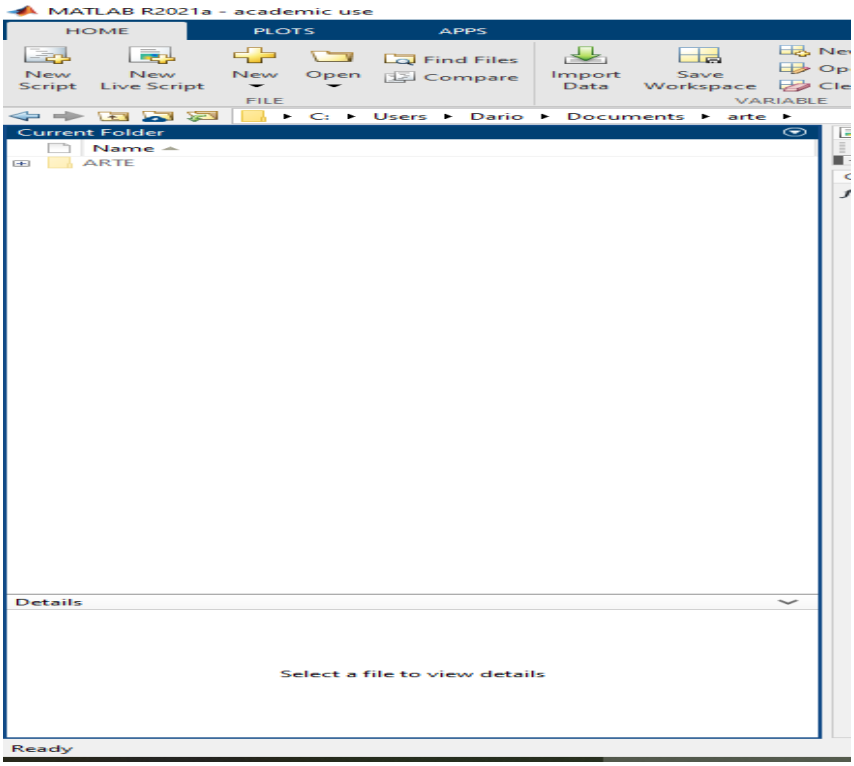
Sl. 1.69 – Paket arte (naslovna strana)

Jednako tako dat je postupak *download*-a rutina kako je opisano na slici 1.70.



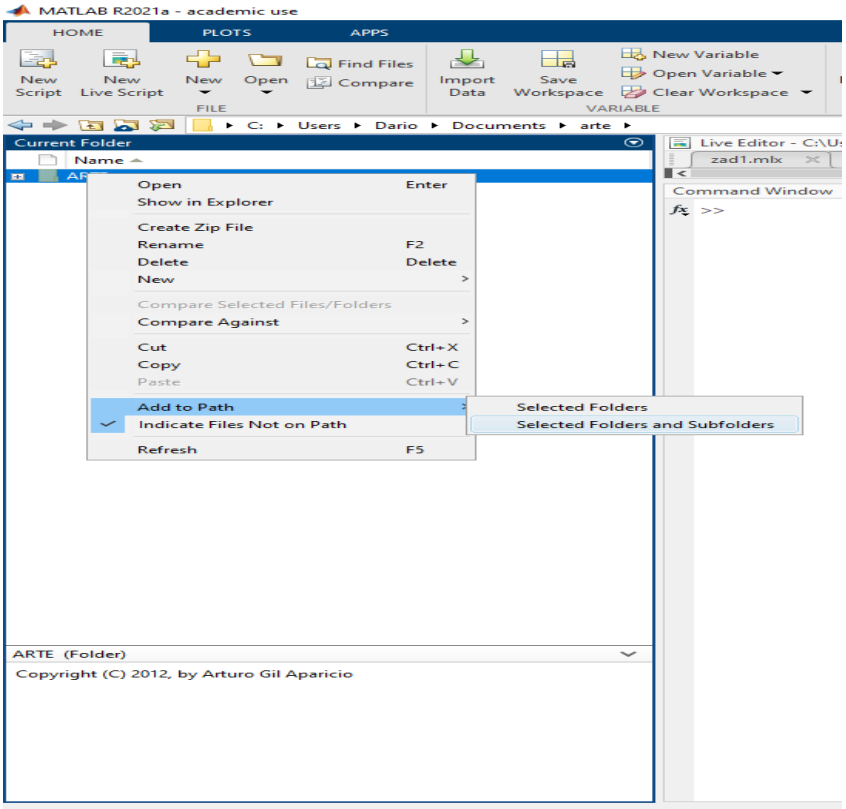
Sl. 1.70 - *Download*-a rutina u paketu arte

Nakon što su rutine prebačene na računalo aktivira se MatLab i unosi paket ARTE u *Current Folder*, kako je prikazano na slici 1.71.



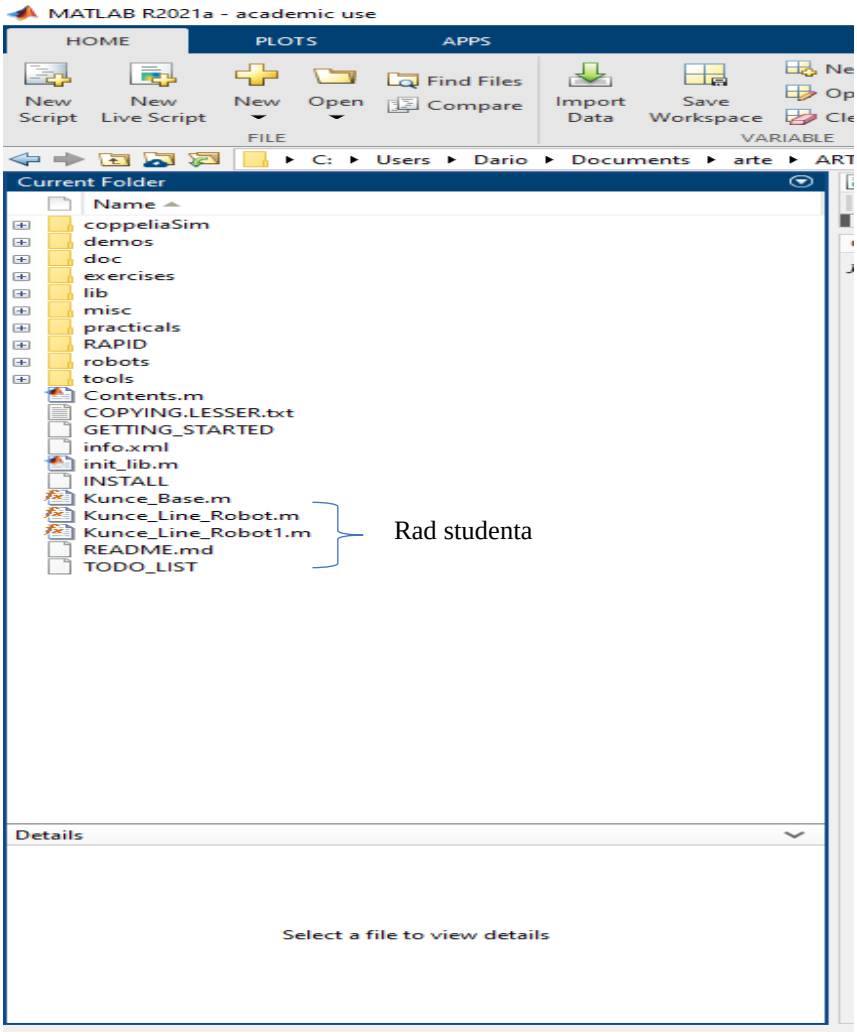
Sl. 1.71 – Current Folder

Paket *arte* potrebno je povezati, stoga se isti povezuje putem „Add to Path“, kako je prikazano na slici 1.72



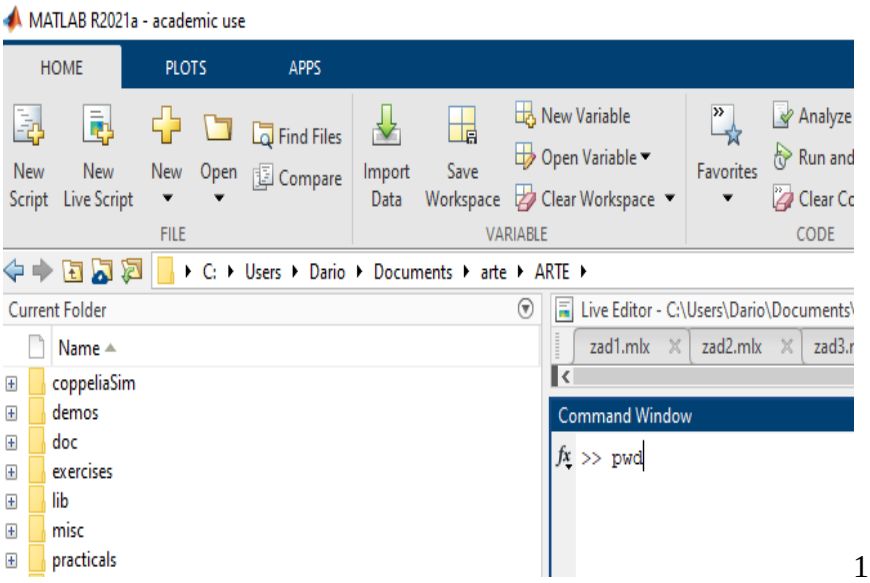
Sl. 1.72 - Add to Path

Klikom miša na *arte* otvaraju se pod rutine, kako je prikazano na slici 1.73. Na slici su prikazane i naknadno spremljene rutine koje su rezultata rada studenta.



sl. 1.73 – Podrutine paketa

Paket se pokreće putem naredbe *pwd* u Command Window-u, kako pokazuje slika 1.74.



1.74 – Naredba *pwd*

Nakon aktiviranja naredbe *pwd* slijedi, kako je prikazano na slici 1.75.

```
Command Window
>> pwd

ans =

     'C:\Users\Dario\Documents\arte\ARTE'
```

Sl. 1.75 – Naredba *pwd*

Slijedi naredba *init_lib* , kako je prikazano na slici .176.

```
>> init_lib
```

sl. 1.76 – Naredba init_lib

Aktivacijom naredbe slijedi sadržaj prikazan na slici 1.77. koji predstavlja inicijalizaciju programskog paketa *arte*.

```
Command Window
>> init_lib
%     ARTE (A Robotics Toolbox for Education)
%     Copyright (C) 2012  Arturo Gil Aparicio, arturo.gil@umh.es
%     http://arvc.umh.es/arte
%
%     This program is free software: you can redistribute it and/or modify
%     it under the terms of the GNU Lesser General Public License as published by
%     the Free Software Foundation, either version 3 of the License, or
%     any later version.
%
%     This program is distributed in the hope that it will be useful,
%     but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of
%     MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE.  See the
%     GNU  Lesser General Public License for more details.
%
%     You should have received a copy of the GNU Lesser General Public License
%     along with this program.  If not, see  <http://www.gnu.org/licenses/>.
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%     To begin with, try loading a robot:
%     >> robot = load_robot('ABB','IRB140');
%
%     Next, draw it on its zero position:
%     >> drawrobot3d(robot,[0 0 0 0 0 0])
%
%     Next, try a different pose:
%     >> drawrobot3d(robot,[0 pi/2 -pi/2 0 0 0])
%
%     Finally, use the teach pendant to move the robot:
%     >> teach
%
%   Please, type:
%   >> configuration.delta_time=0.1
%   if you find that the simulation is running too slow.
%
%   Please, type:
%   >> configuration.time_delay = 0.01;
%   if the simulation plot does not show the robot correctly.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
echo off
>>
```

Sl. 1.77 – Inicijalizacija programskog paketa ARTE

Kao što je i na slici 1.77 prikazano, potrebno je pozvati robot naredbom.

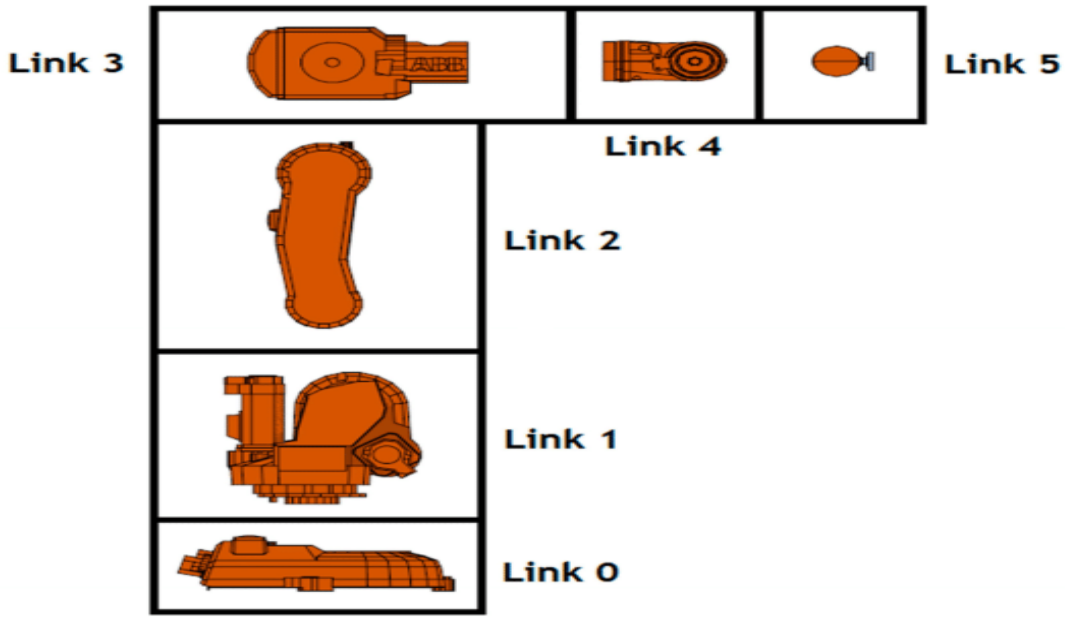
```
>> robot = load_robot('ABB','IRB140');
```

Radi se o robotu IRB140 proizvođača ABB prikazanom na slici 1.78.



Sl. 1.78 – Robota IRB140 proizvođača ABB[10]

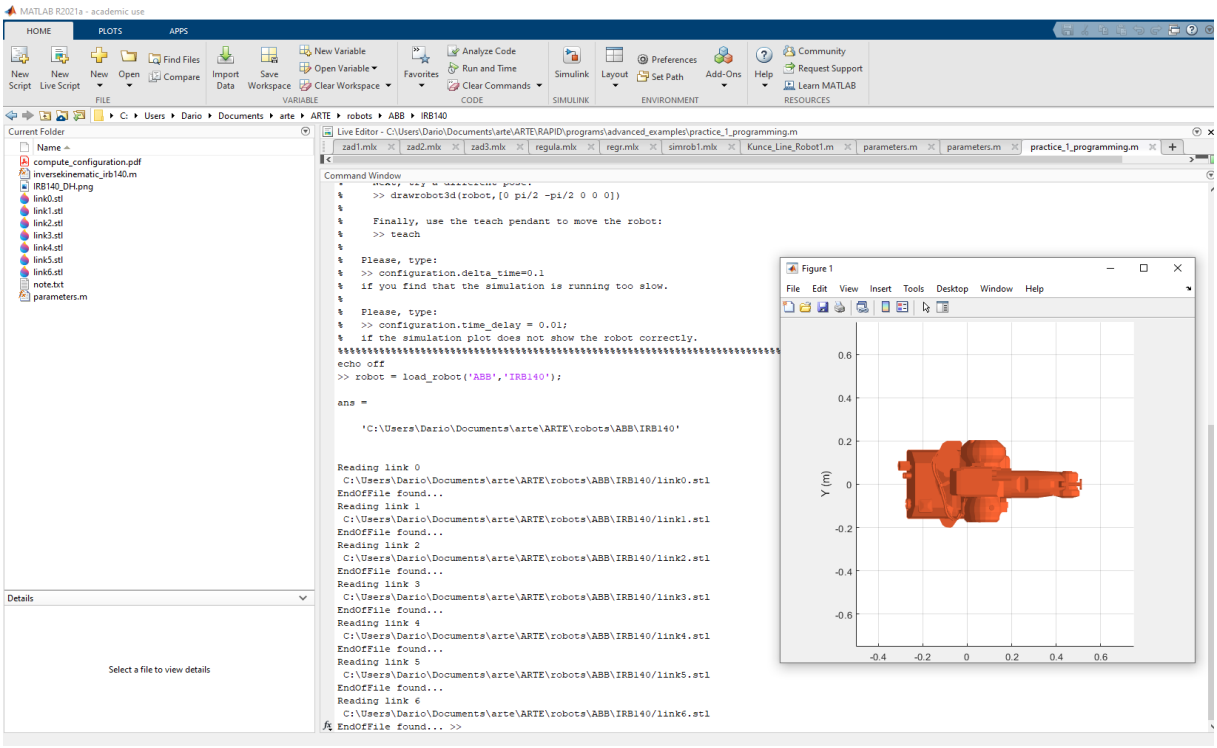
Radi se o 6-osnom robotu konfiguracije RRRRRR čiji su glavni djelovi prikazani na slici 1.79.



Sl. 1.79 – Glavni djelovi robota IRB140[11]

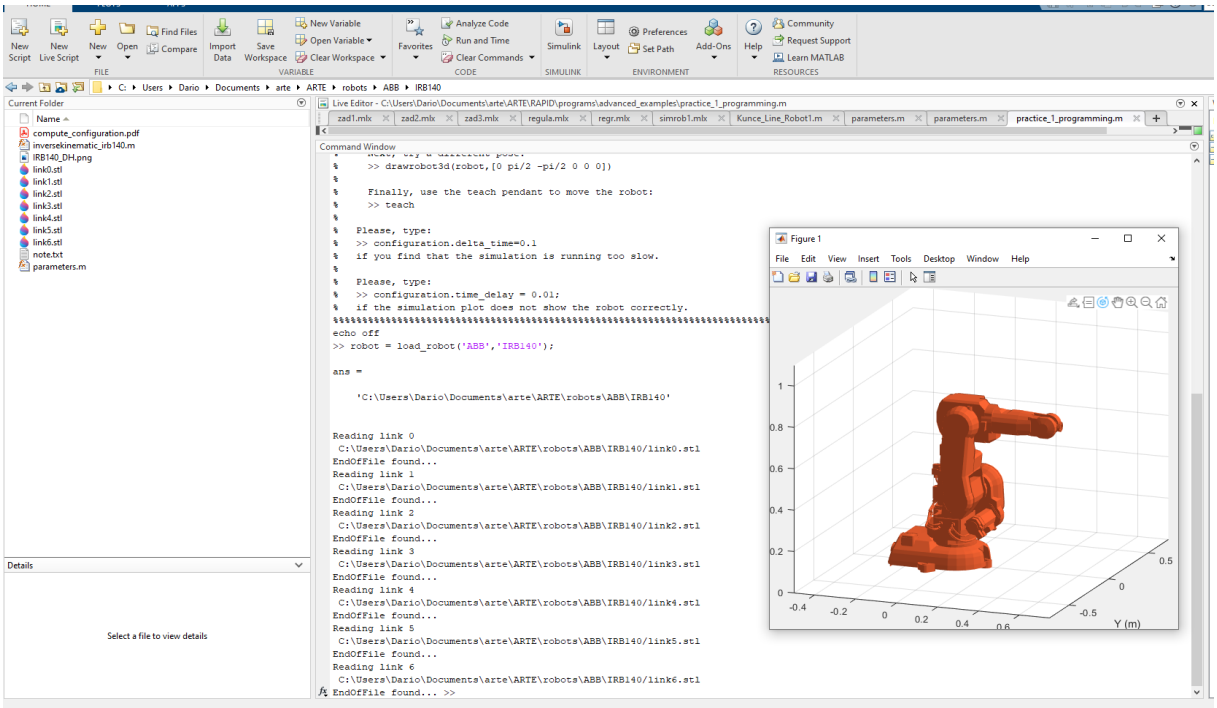
[10] https://preview.free3d.com/img/2020/06/2408226011192755829/xvfamx4i-900.jpg
[11] https://www.researchgate.net/profile/Mauro-Baquero-Suarez/publication/267450857/figure/fig6/AS:562009512124418@1511004917843/Links-of-ABB-IRB-140-robot.png

Aktiviranjem naredbe *robot = load_robot('ABB','IRB140')* slijedi uvođenje robota na način kako je prikazano na slici 1.80.



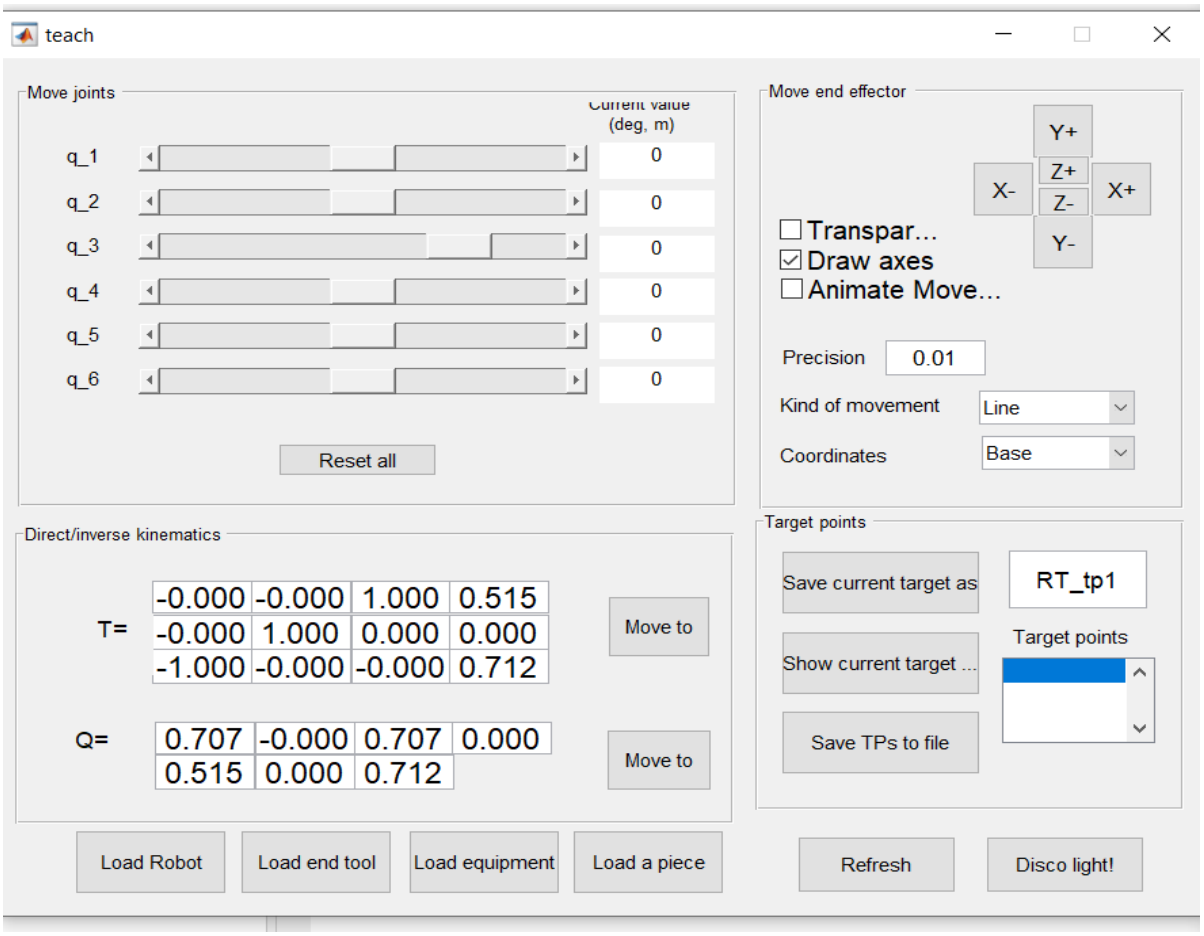
Sl. 1.80 - Uvođenje robota IRB 140 u simulaciju

Rotiranjem robota sa slike 1.80 slijedi kako je prikazano na slici 1.81.



Sl. 1.81 – Rotiranje robota IRB 140

Nakon što je uveden robota potrebno je unijeti upravljački panel pomoću naredbe *teach* na način kako je prikazano na slici 1.82.



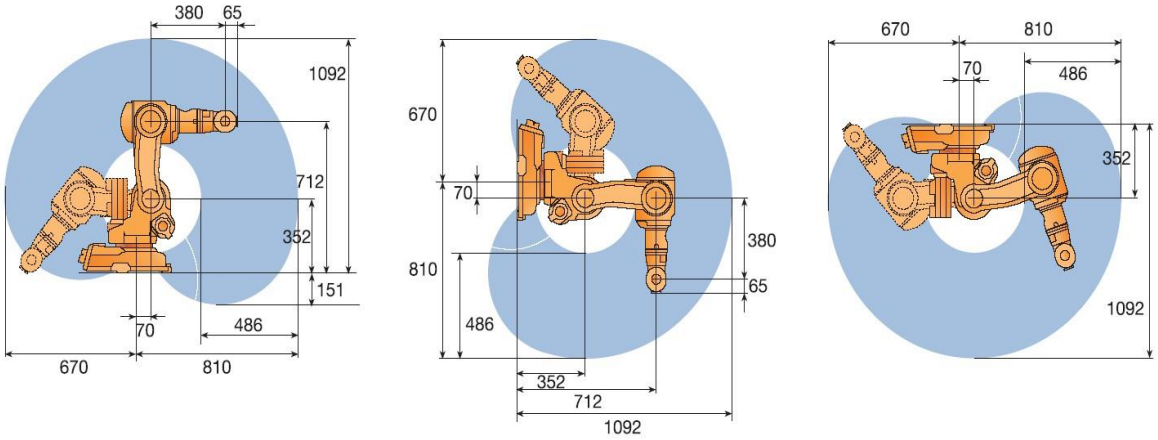
Sl. 1.82 – Upravljački panel robota (teach)

Elementi panela pojedinačno će se objasniti, a prvi korak je vektor konfiguracije zglobova robota (engl. *Move joints*) odnosno direktna/indirektna kinematika robota (engl. Direct/inverse kinematic).

8.1 Direktna kinematika robota ABB IRB 140 M2000

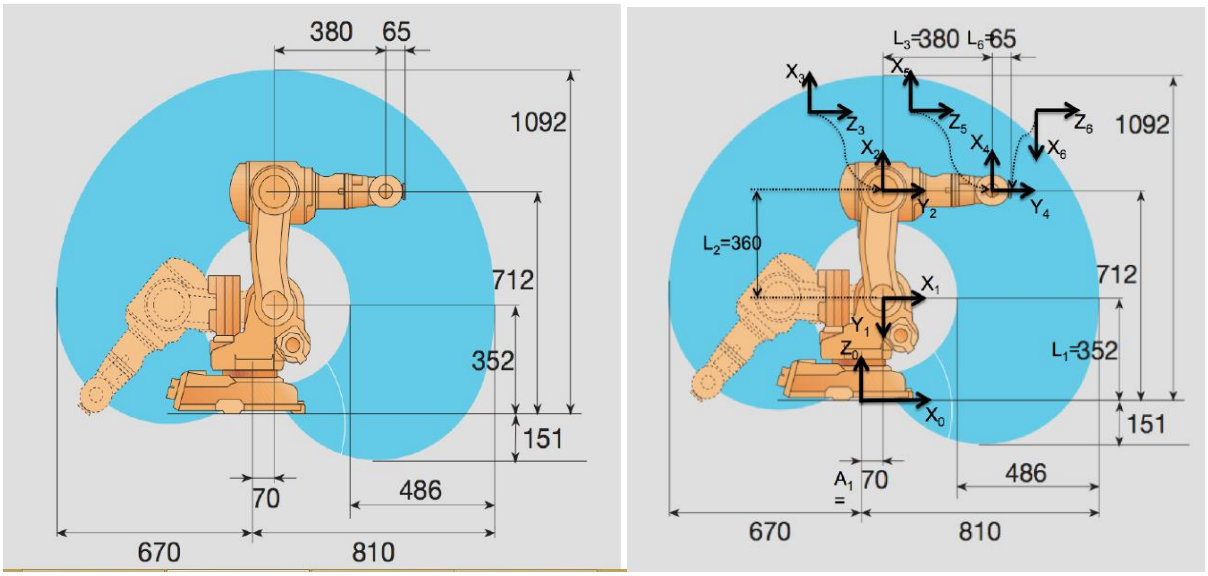
Upravljanje i vođenje robota podrazumijeva rješavanje direktne i indirektne kinematike. Problema direktne kinematike, kako je navedeno u poglavlju 3., glasi:"*Ako je zadan vektor konfiguracije zglobova robotskog manipulatora* $q_k = q(\theta_k, d_k, \alpha_k, a_k)$, *kako odrediti poziciju* ***Poz*** *i orijentaciju* θ_{ort} *vrha manipulatora (alata) u odnosu na koordinatni sustav pridružen bazi robota"*, pri čemu će se za određivanje pozicije i orijentacije alata koristiti matrica složene homogene transfromacije $\boldsymbol{T}$ i kvarternion $\boldsymbol{Q}$ kako je prikazano na slici 1.82.

Kako bi se odredila tablica zadanih kinematičkih parametra potrebno je definirati osnovne dimenzije geometrije robota u operativnom prostoru. Na slici 1.83 prikazan su temeljne dimenzije robot ABB IRB 140 M2000 u operativnom prostoru djelovanja.



Sl. 1.83 – Robot ABB IRB 140 M2000 u operativnom prostoru djelovanja (ARTE Manual)[12]

Za potrebe simulacije rada robota koristit će se *prva* konfiguracija, kako je prikazano na slici 1.84 a), dok su na slici 1.84 b) prikazani koordinatni sustavi sukladno D-H metodi.



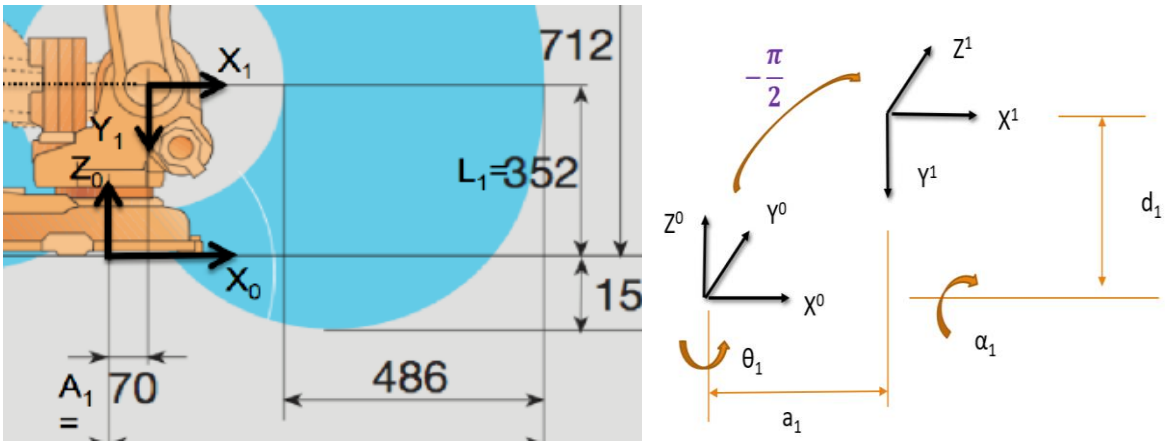
Sl. 1.84 a) i b) – Radna konfiguracija robota ABB IRB 140 M2000 (ibidem)

Na temelju radne konfiguracije robota prikazane na slici 1.84 b) potrebno je odrediti kinematičke parametre robota $q_k = q(\theta_k, d_k, \alpha_k, a_k)\ za\ k = 1\ do\ 6$, na način kako je prethodno opisano u poglavlju 3.

[12] https://www.eurobots.net/abb-robots-irb-140-p40-en.html

Prvi zglob

Na slici 1.85 a) prikazani su koordinatni sustavi K_0 i K_1. Potrebno je odrediti konfiguraciju prvog zgloba $q_1 = q(\theta_1, d_1, \alpha_1, a_1)$ gdje je $q_{1\theta} = q_1(1)$ varijabla prvog zgloba.



Sl. 1.85 a) - Konfiguracija prvog zgloba $q_1 = q(\theta_1, d_1, \alpha_1, a_1)$

Prema slici 1.85 a) između koordinatnog sustava K_0 i K_1 došlo je do:

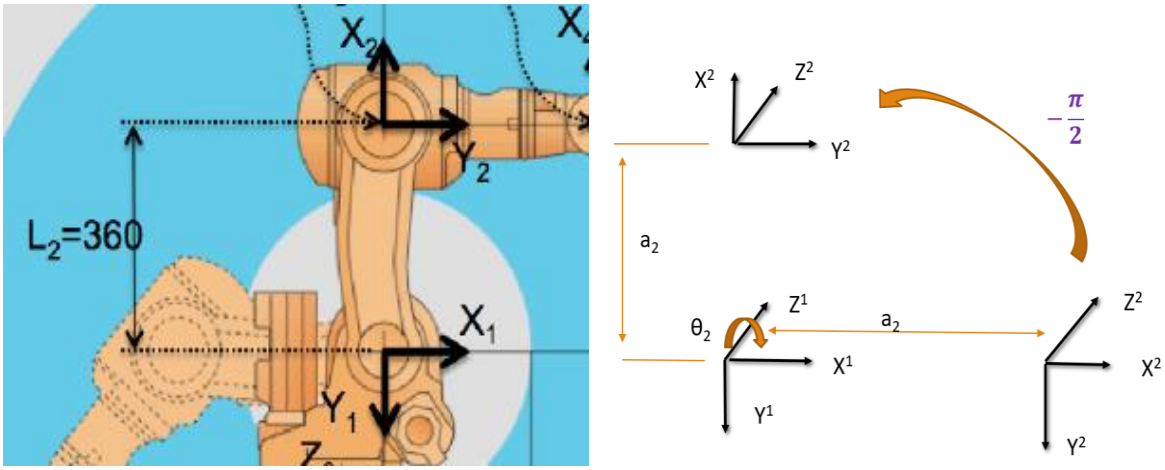
- rotacije koordinatnog sustava oko osi x za $\alpha_1 = -\frac{\pi}{2} = -90^{\circ}$
- pomaka po osi x za $a_1 = A_1 = 70mm$
- pomaka po osi z za $d_1 = L_1 = 352mm$

Konfiguracije prvog zgloba robota iznosi:

$$q_1 = q\left(q_{1\theta}, 70{,}325, -\frac{\pi}{2}\right)$$

Drugi zglob

Na slici 1.85 b) prikazani su koordinatni sustavi K_1 i K_2. Potrebno je odrediti konfiguraciju drugog zgloba $q_2 = q(\theta_2, d_2, \alpha_2, a_2)$ gdje je $q_{2\theta} = q_2(2)$ varijabla drugog zgloba.



Sl. 1.85 b) - Konfiguracija drugog zgloba $q_2 = q(\theta_2, d_2, \alpha_2, a_2)$

Prema slici 1.85 b) između koordinatnog sustava K_1 i K_2 došlo je do:

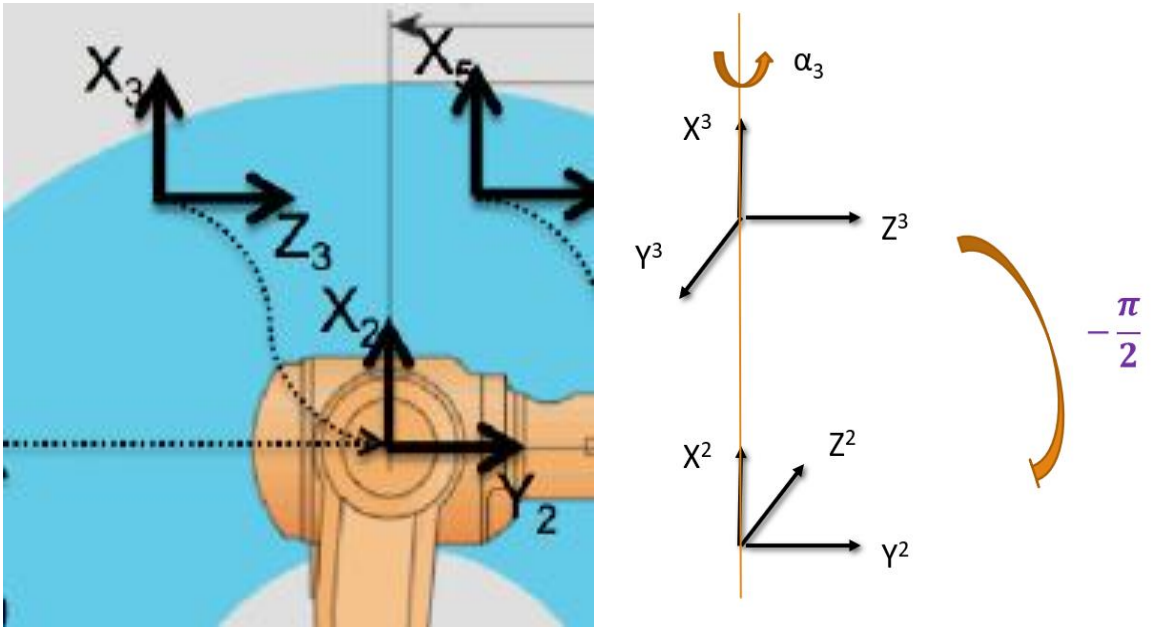
- rotacije koordinatnog sustava oko osi z za $\theta_2 = -\frac{\pi}{2} = -90^{\circ}$
- pomaka po osi x za $a_2 = L_2 = 360mm$

Konfiguracije drugog zgloba robota iznosi:

$$q_2 = q\left(q_{2\theta} - \frac{\pi}{2}, 0, 360, 0\right)$$

Treći zglob

Na slici 1.85 c) prikazani su koordinatni sustavi K_2 i K_3. Potrebno je odrediti konfiguraciju trećeg zgloba $q_3 = q(\theta_3, d_3, \alpha_3, a_3)$ gdje je $q_{3\theta} = q_3(3)$ varijabla trećeg zgloba.



Sl. 1.85 c) - Konfiguracija trećeg zgloba $q_3 = q(\theta_3, d_3, \alpha_3, a_3)$

Prema slici 1.85 c) između koordinatnog sustava K_2 i K_3 došlo je do:

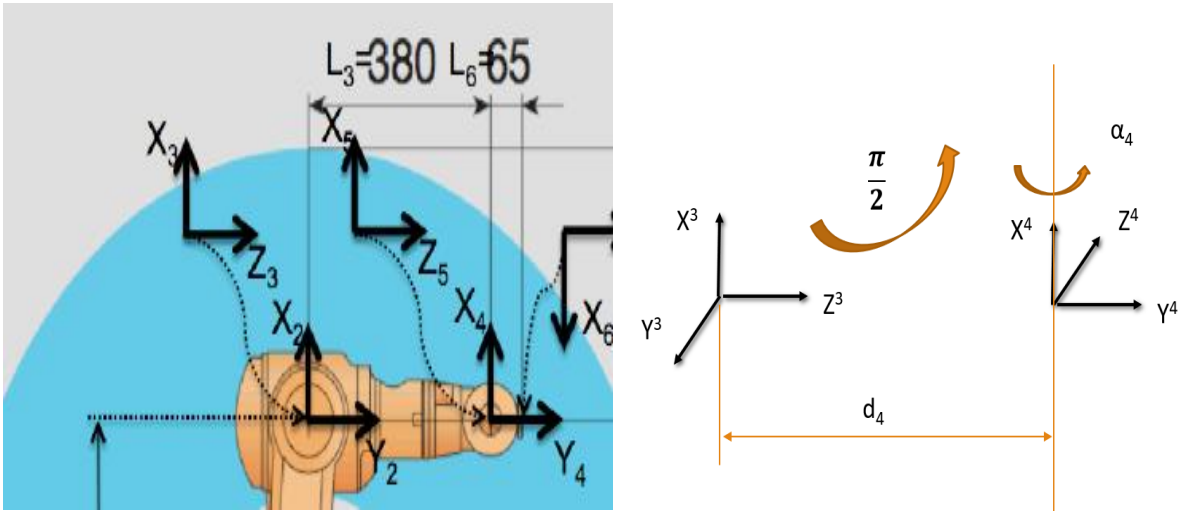
- rotacije koordinatnog sustava oko osi x za $\alpha_3 = -\frac{\pi}{2} = -90^{\circ}$

Konfiguracije trećeg zgloba robota iznosi:

$$q_3 = q\left(q_{3\theta}, 0, 0, -\frac{\pi}{2}\right)$$

Četvrti zglob

Na slici 1.85 d) prikazani su koordinatni sustavi K_3 i K_4. Potrebno je odrediti konfiguraciju četvrtog zgloba $q_4 = q(\theta_4, d_4, \alpha_4, a_4)$ gdje je $q_{4\theta} = q_4(4)$ varijabla četvrtog zgloba.



Sl. 1.85 d) - Konfiguracija četvrtog zgloba $q_4 = q(\theta_4, d_4, \alpha_4, a_4)$

Prema slici 1.85 d) između koordinatnog sustava K_3 i K_4 došlo je do:

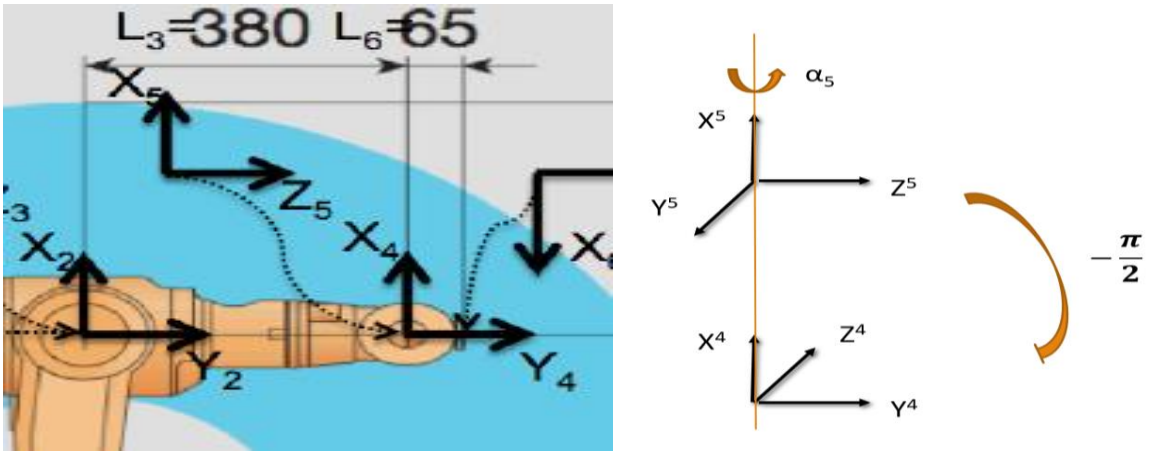
- rotacije koordinatnog sustava oko osi x za $\alpha_4 = \frac{\pi}{2} = 90^{\circ}$
- pomaka po osi z za $d_4 = L_3 = 380mm$

Konfiguracije četvrtog zgloba robota iznosi:

$$q_4 = q\left(q_{4\theta}, 380, 0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Peti zglob

Na slici 1.85 e) prikazani su koordinatni sustavi K_4 i K_5. Potrebno je odrediti konfiguraciju petog zgloba $q_5 = q(\theta_5, d_5, \alpha_5, a_5)$ gdje je $q_{5\theta} = q_5(5)$ varijabla petog zgloba.



Sl. 1.85 e) - Konfiguracija petog zgloba $q_5 = q(\theta_5, d_5, \alpha_5, a_5)$

Prema slici 1.85 e) između koordinatnog sustava K_4 i K_5 došlo je do:

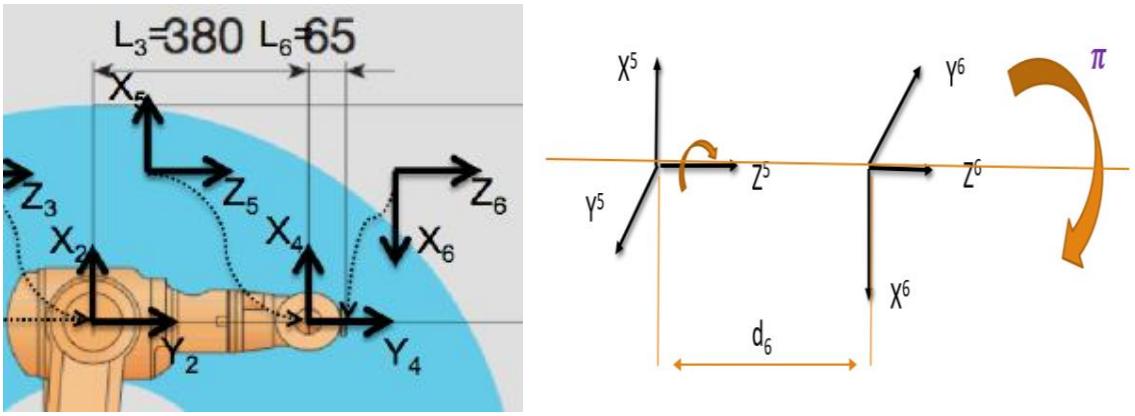
- rotacije koordinatnog sustava oko osi x za $\alpha_5 = -\frac{\pi}{2} = -90^{\circ}$

Konfiguracije petog zgloba robota iznosi:

$$q_5 = q\left(q_{5\theta}, 0{,}0, -\frac{\pi}{2}\right)$$

Šesti zglob

Na slici 1.85 f) prikazani su koordinatni sustavi K_5 i K_6. Potrebno je odrediti konfiguraciju šestog zgloba $q_6 = q(\theta_6, d_6, \alpha_6, a_6)$ gdje je $q_{6\theta} = q_6(6)$ varijabla petog zgloba.



Sl. 1.85 f) - Konfiguracija šestog zgloba $q_6 = q(\theta_6, d_6, \alpha_6, a_6)$

Prema slici 1.85 f) između koordinatnog sustava K_5 i K_6 došlo je do:

- rotacije koordinatnog sustava oko osi z za $\theta_6 = \pi = 180^{\circ}$
- pomaka po osi z za $d_6 = L_6 = 65mm$

Konfiguracija šestog zgloba robota iznosi:

$$q_6 = q(q_{6\theta} + \pi, 65, 0{,}0)$$

Na temelju prethodno izračunatih podataka kinematička matrica robota bila bi:

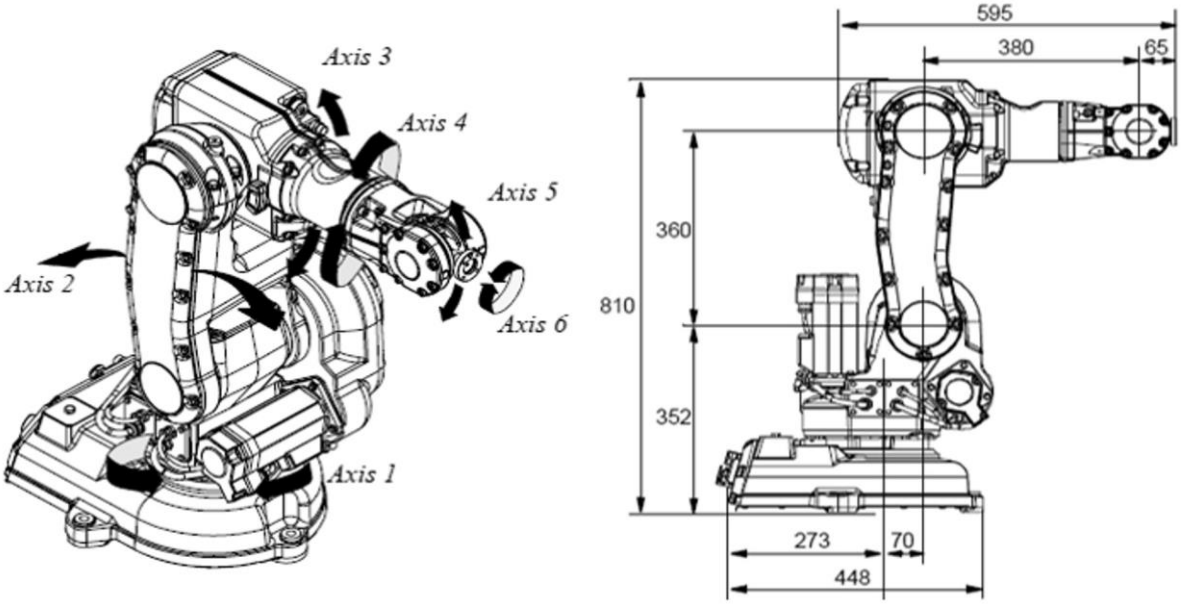
$$\theta[rad] = \left[q_1(1) \quad q_2(2) - \frac{\pi}{2} \quad q_3(3) \quad q_4(4) \quad q_5(5) \quad q_6(6) + \pi\right]$$

$$d[m] = [0{,}352 \quad 0 \quad 0 \quad 0{,}38 \quad 0 \quad 0{,}65]$$

$$a[m] = [0{,}07 \quad 0{,}36 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$\alpha[rad] = \left[-\frac{\pi}{2} \quad 0 \quad -\frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2} \quad -\frac{\pi}{2} \quad 0\right]$$

Na slici 1.86 prikazane su osi rotacije robota i glavne dimenzije robota u cilju određivanja matrice složene homogene transfromacije $\boldsymbol{T}$.



Sl. 1.86 – Osi rotacije robota i glavne dimenzije[13]

Matrica složene homogene transfromacije $\boldsymbol{T}$ robota ABB IRB140 M2000 glasi:

$$\boldsymbol{T_{baza}^{alat}(q) = T_0^6(q) = T_0^1(q_1) \cdot T_1^2(q_2) \cdot T_2^3(q_3) \cdot T_3^4(q_4) \cdot T_4^5(q_5) \cdot T_5^6(q_6)}$$

Opća relacija, kako je prethodno napisano u poglavlju 2.3, glasi:

$$\boldsymbol{T}_{baza}^{alat}(q) = \prod_{k=1}^{n} \boldsymbol{T}_{k-1}^{k}(q_k) = \prod_{k=1}^{n} [Spir(\theta_k, d_k, z) \cdot \ Spir(a_k, \alpha_k, x)]$$

Odnosno vrijedi:

$$\boldsymbol{T_{k-1}^{k}(q_k)} = \begin{bmatrix} C\theta_k & -C\alpha_k \cdot S\theta_k & S\alpha_k \cdot S\theta_k & a_k \cdot C\theta_k \\ S\theta_k & C\alpha_k \cdot C\theta_k & -S\alpha_k \cdot C\theta_k & a_k \cdot S\theta_k \\ 0 & S\alpha_k & C\alpha_k & d_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Za *os 1* (Axis 1) vrijedit će:

$$\boldsymbol{T_0^1(q_1)} = \begin{bmatrix} C\theta_1 & -C\alpha_1 \cdot S\theta_1 & S\alpha_1 \cdot S\theta_1 & a_1 \cdot C\theta_1 \\ S\theta_1 & C\alpha_1 \cdot C\theta_1 & -S\alpha_1 \cdot C\theta_1 & a_1 \cdot S\theta_1 \\ 0 & S\alpha_1 & C\alpha_1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kako su zadane sljedeće vrijednosti:

- rotacije koordinatnog sustava oko osi x za $\alpha_1 = -\frac{\pi}{2} = -90^{\circ}$
- pomaka po osi x za $a_1 = A_1 = 70mm$
- pomaka po osi z za $d_1 = L_1 = 352mm$

[13] https://journal.utem.edu.my/index.php/jmet/article/download/1230/2668

vrijedi:

$$T_0^1(q_1) = \begin{bmatrix} C\theta_1 & -C\alpha_1 \cdot S\theta_1 & S\alpha_1 \cdot S\theta_1 & a_1 \cdot C\theta_1 \\ S\theta_1 & C\alpha_1 \cdot C\theta_1 & -S\alpha_1 \cdot C\theta_1 & a_1 \cdot S\theta_1 \\ 0 & S\alpha_1 & C\alpha_1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kako je:

$$S\alpha_1 = \sin(-90^\circ) = -1$$

$$C\alpha_1 = \cos(-90^\circ) = 0$$

Slijedi:

$$\boldsymbol{T_0^1(q_1)} = \begin{bmatrix} C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & 0{,}07 \cdot C\theta_1 \\ S\theta_1 & 0 & C\theta_1 & 0{,}07 \cdot S\theta_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0{,}352 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

U slučaju kada je $\theta_1 = 0^\circ$ matrica transfromacije $\boldsymbol{T_0^1}$ iznosi:

$$\boldsymbol{T_0^1(q_1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0{,}07 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0{,}352 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Za *os 2* (Axis 2) vrijedit će:

$$T_1^2(q_2) = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -C\alpha_2 \cdot S\theta_2 & S\alpha_2 \cdot S\theta_2 & a_2 \cdot C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\alpha_2 \cdot C\theta_2 & -S\alpha_2 \cdot C\theta_2 & a_2 \cdot S\theta_2 \\ 0 & S\alpha_2 & C\alpha_2 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kako su zadane sljedeće vrijednosti:

- rotacije koordinatnog sustava oko osi z za $\theta_2 = -\frac{\pi}{2} = -90^\circ$
- pomaka po osi x za $a_2 = L_2 = 360mm$

i kako vrijedi:

$$S\alpha_2 = \sin(0^\circ) = 0$$

$$C\alpha_2 = \cos(0^\circ) = 1$$

Slijedi:

$$\boldsymbol{T_1^2(q_2)} = \begin{bmatrix} C(\theta_2 - 90^\circ) & -S(\theta_2 - 90^\circ) & 0 & 0{,}36 \cdot C(\theta_2 - 90^\circ) \\ S(\theta_2 - 90^\circ) & C(\theta_2 - 90^\circ) & 0 & 0{,}36 \cdot S(\theta_2 - 90^\circ) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

U slučaju kada je $\theta_2 = 0^\circ$ matrica transfromacije $\boldsymbol{T_1^2}$ iznosi:

$$\boldsymbol{T_1^2(q_2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -0{,}36 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Za *os 3* (Axis 3) vrijedit će:

$$T_2^3(q_3) = \begin{bmatrix} C\theta_3 & -C\alpha_3 \cdot S\theta_3 & S\alpha_3 \cdot S\theta_3 & a_3 \cdot C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\alpha_3 \cdot C\theta_3 & -S\alpha_3 \cdot C\theta_3 & a_3 \cdot S\theta_3 \\ 0 & S\alpha_3 & C\alpha_3 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kako su zadane sljedeće vrijednosti:

- rotacije koordinatnog sustava oko osi x za $\alpha_3 = -\frac{\pi}{2} = -90^\circ$

i kako vrijedi:

$$S\alpha_3 = \sin(-90^\circ) = -1$$

$$C\alpha_3 = \cos(-90^\circ) = 0$$

Slijedi:

$$\boldsymbol{T_2^3(q_3)} = \begin{bmatrix} C\theta_3 & 0 & -S\theta_3 & 0 \\ S\theta_3 & 0 & C\theta_3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

U slučaju kada je $\theta_3 = 0^\circ$ matrica transfromacije $\boldsymbol{T_2^3}$ iznosi:

$$\boldsymbol{T_2^3(q_3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Za *os 4* (Axis 4) vrijedit će:

$$\boldsymbol{T_3^4(q_4)} = \begin{bmatrix} C\theta_4 & -C\alpha_4 \cdot S\theta_4 & S\alpha_4 \cdot S\theta_4 & a_4 \cdot C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\alpha_4 \cdot C\theta_4 & -S\alpha_4 \cdot C\theta_4 & a_4 \cdot S\theta_4 \\ 0 & S\alpha_4 & C\alpha_4 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kako su zadane sljedeće vrijednosti:

- rotacije koordinatnog sustava oko osi x za $\alpha_4 = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$
- pomaka po osi z za $d_4 = L_3 = 380mm$

i kako vrijedi:

$$S\alpha_4 = \sin(90^\circ) = 1$$

$$C\alpha_4 = \cos(90^\circ) = 0$$

Slijedi:

$$\boldsymbol{T_3^4(q_4)} = \begin{bmatrix} C\theta_4 & 0 & S\theta_4 & 0 \\ S\theta_4 & 0 & -C\theta_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}38 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

U slučaju kada je $\theta_4 = 0^\circ$ matrica transfromacije $\boldsymbol{T_3^4}$ iznosi:

$$\boldsymbol{T_3^4(q_3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}38 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Za *os* 5 (Axis 5) vrijedit će:

$$\boldsymbol{T_4^5(q_3)} = \begin{bmatrix} C\theta_5 & -C\alpha_5 \cdot S\theta_5 & S\alpha_5 \cdot S\theta_5 & a_5 \cdot C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\alpha_5 \cdot C\theta_5 & -S\alpha_5 \cdot C\theta_5 & a_5 \cdot S\theta_5 \\ 0 & S\alpha_5 & C\alpha_5 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kako su zadane sljedeće vrijednosti:

- rotacije koordinatnog sustava oko osi x za $\alpha_5 = -\frac{\pi}{2} = -90^\circ$

i kako vrijedi:

$$S\alpha_3 = \sin(-90^\circ) = -1$$

$$C\alpha_3 = \cos(-90^\circ) = 0$$

Slijedi:

$$\boldsymbol{T_4^5(q_5)} = \begin{bmatrix} C\theta_5 & 0 & -S\theta_5 & 0 \\ S\theta_5 & 0 & C\theta_5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

U slučaju kada je $\theta_5 = 0^\circ$ matrica transfromacije $\boldsymbol{T_4^5}$ iznosi:

$$\boldsymbol{T_4^5(q_5)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Za *os 6* (Axis 6) vrijedit će:

$$\boldsymbol{T_5^6(q_6)} = \begin{bmatrix} C\theta_6 & -C\alpha_6 \cdot S\theta_6 & S\alpha_6 \cdot S\theta_6 & a_6 \cdot C\theta_6 \\ S\theta_6 & C\alpha_6 \cdot C\theta_6 & -S\alpha_6 \cdot C\theta_6 & a_6 \cdot S\theta_6 \\ 0 & S\alpha_6 & C\alpha_6 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kako su zadane sljedeće vrijednosti:

- rotacije koordinatnog sustava oko osi z za $\theta_6 = \pi = 180^\circ$
- pomaka po osi z za $d_6 = L_6 = 65mm$

i kako vrijedi:

$$S\alpha_6 = \sin(0^\circ) = 0$$

$$C\alpha_6 = \cos(0^\circ) = 1$$

Slijedi:

$$\boldsymbol{T_5^6(q_6)} = \begin{bmatrix} C(\theta_6 + 180^\circ) & -S(\theta_6 + 180^\circ) & 0 & 0 \\ S(\theta_6 + 180^\circ) & C(\theta_6 + 180^\circ) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}065 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

U slučaju kada je $\theta_5 = 0^\circ$ matrica transfromacije $\boldsymbol{T_5^6}$ iznosi:

$$\boldsymbol{T_5^6(q_6)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}065 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Prema tome za vektor konfiguracije zglobova robota:

$$\boldsymbol{q} = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]$$

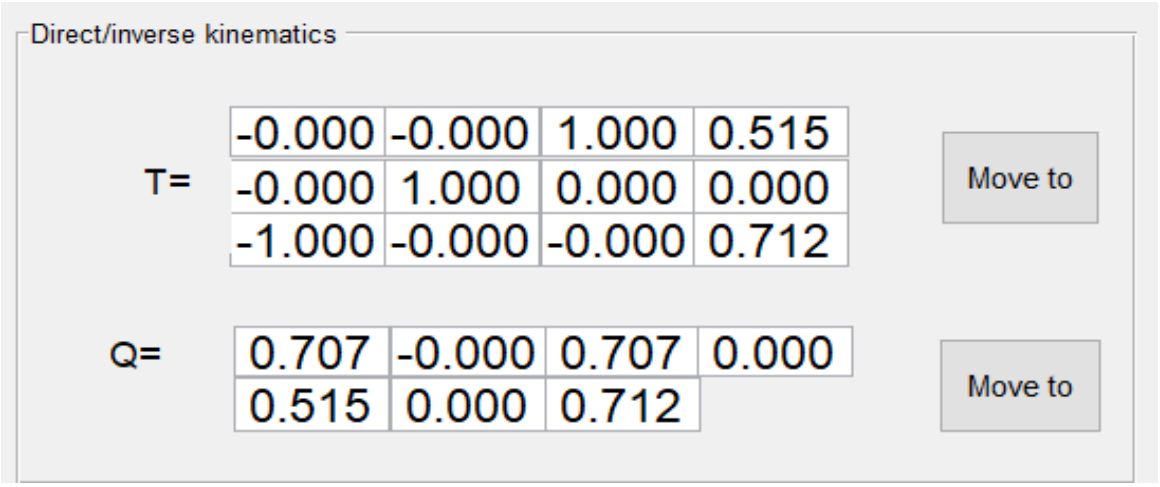
Matrica složene homogene transfromacije $\boldsymbol{T}$ robota ABB IRB140 M2000 iznosi:

$$\boldsymbol{T_{baza}^{alat}(q) = T_0^6(q)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0{,}07 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0{,}352 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -0{,}36 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot$$
$$\cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}38 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}065 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rezultat je sljedeći:

$$\boldsymbol{T_{baza}^{alat}(q) = T_0^6(q)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0{,}515} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0{,}712} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Isti u potpunosti odgovara simulacijskom modelu u paketu arte, kako je prikazano na slici 1.87.



Sl. 1.87 – Rezultati simulacije u paketu ARTE

U pogledu quteriona radi se o rotaciji oko osi y za 90°stoga vrijedi:

$$Q = \cos\left(\frac{90^{\circ}}{2}\right) + i \cdot 0 \cdot \sin\left(\frac{90^{\circ}}{2}\right) + j \cdot 1 \cdot sin\left(\frac{90^{\circ}}{2}\right) + k \cdot 0 \cdot sin\left(\frac{90^{\circ}}{2}\right)$$

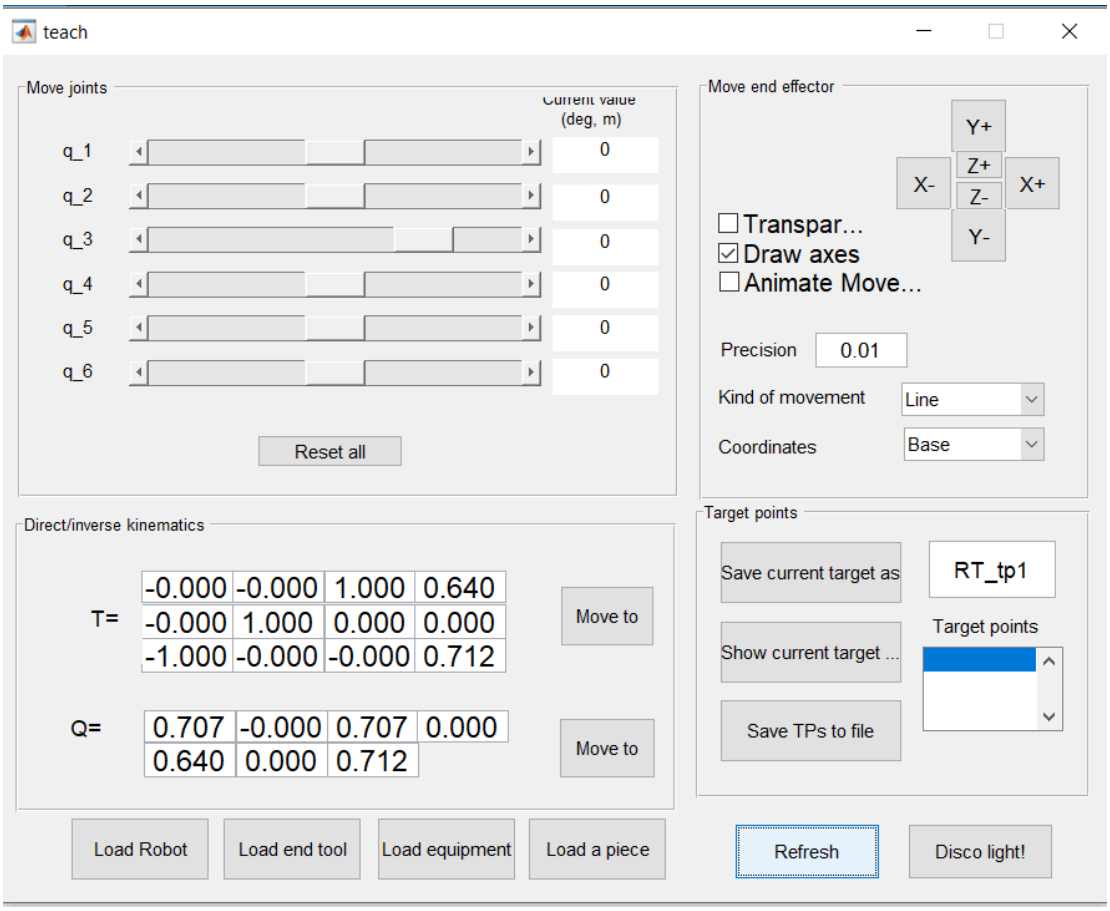
Odnosno:

$$Q = [0{,}707; 0; j \cdot 0{,}707; 0]$$

Rješen je problem direktne kinematike robota ABB IRB140 M2000.

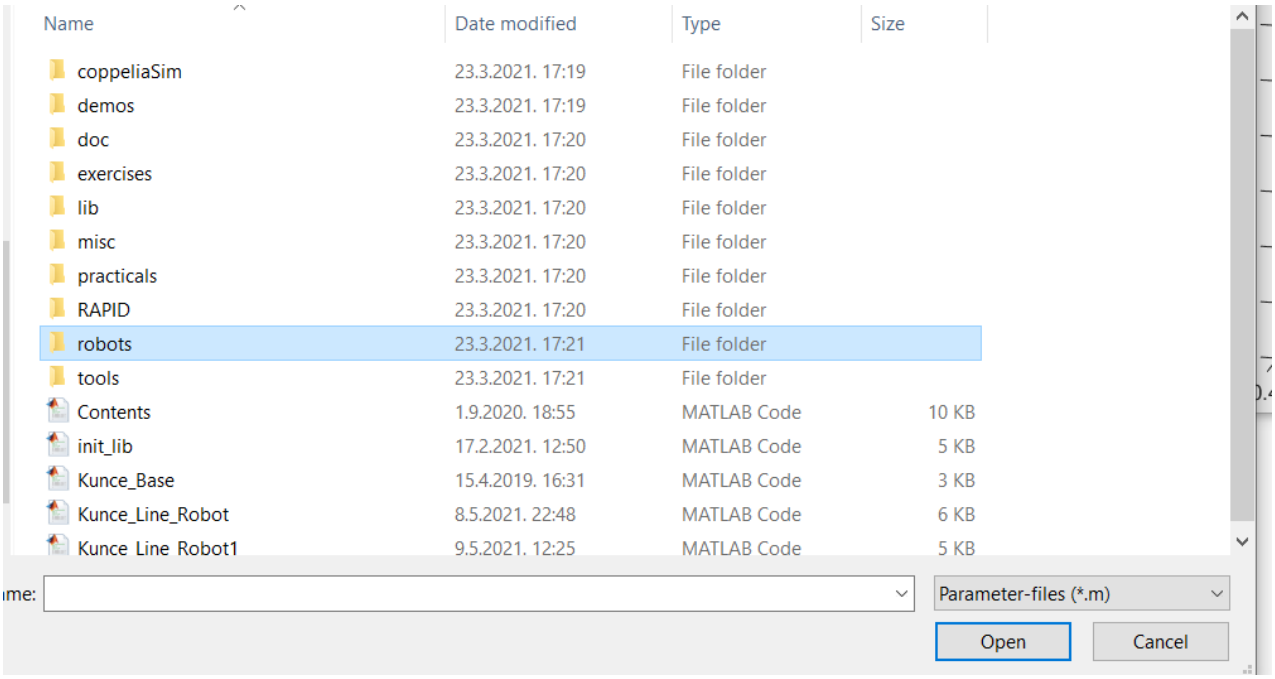
8.2 Dinamika robota s alatom

Izbor alata robota ostavruje se putem „teach“ panela izborom opcije *„Load end tool“* kako je prikazano na slici 1.88.



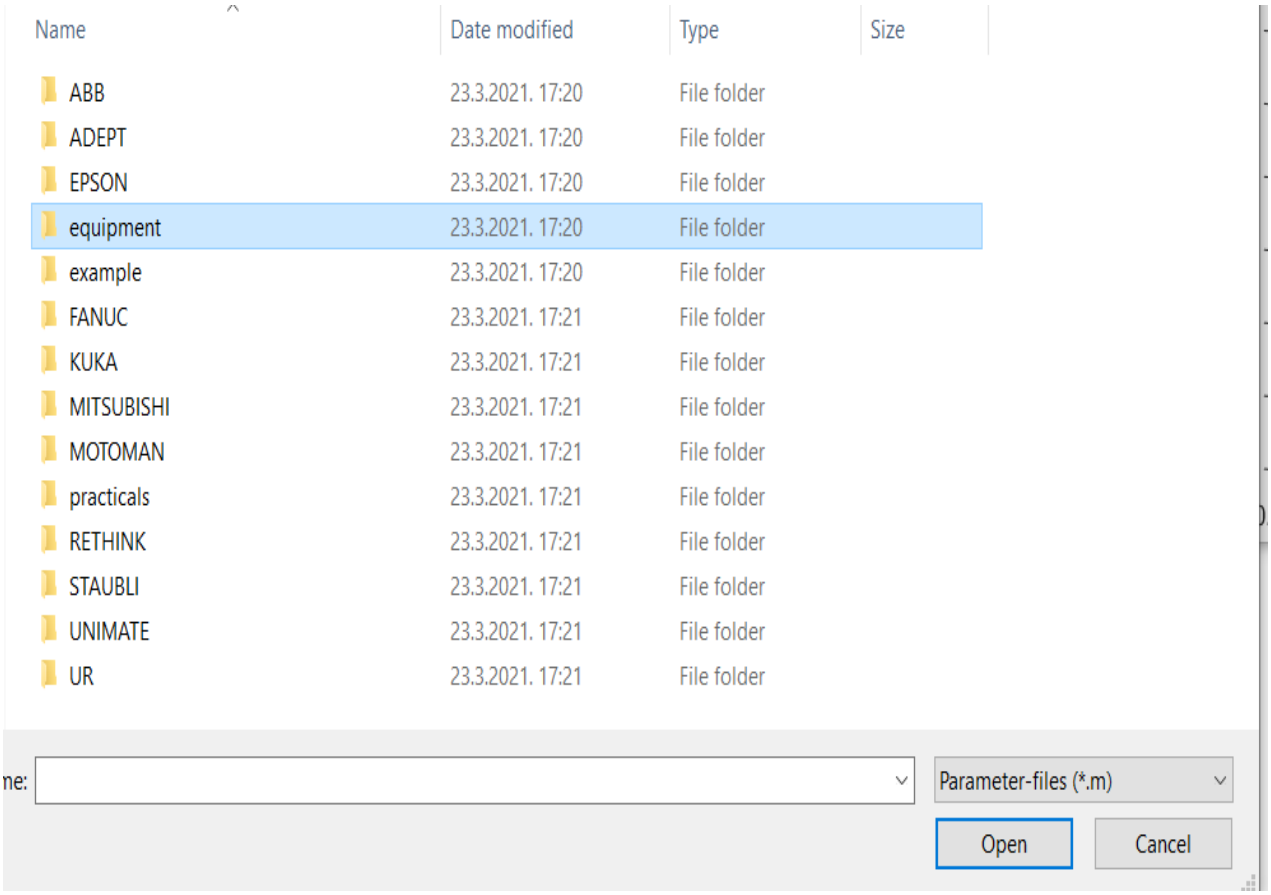
Sl. 1.88 – Izbor opcije *„Load end tool“*

Prilikom korištenja ove opcije, ali drugih ponuđenih opcija prikazanih na „teach“ panelu, uvjek je potrebno MatLab držati (ili ako je potrebno prebaciti) na „Current Folder“ u kojem su prikazane sve pod rutine na način kako je prikazano na slici 1.73. Prilikom aktiviranja opcije *„Load end tool“* pojavljuje se sljedeće mogućnosti prikazane na slici 1.74 od kojih je potrebno izabrati folder „robots“ i naredbu „Open“.



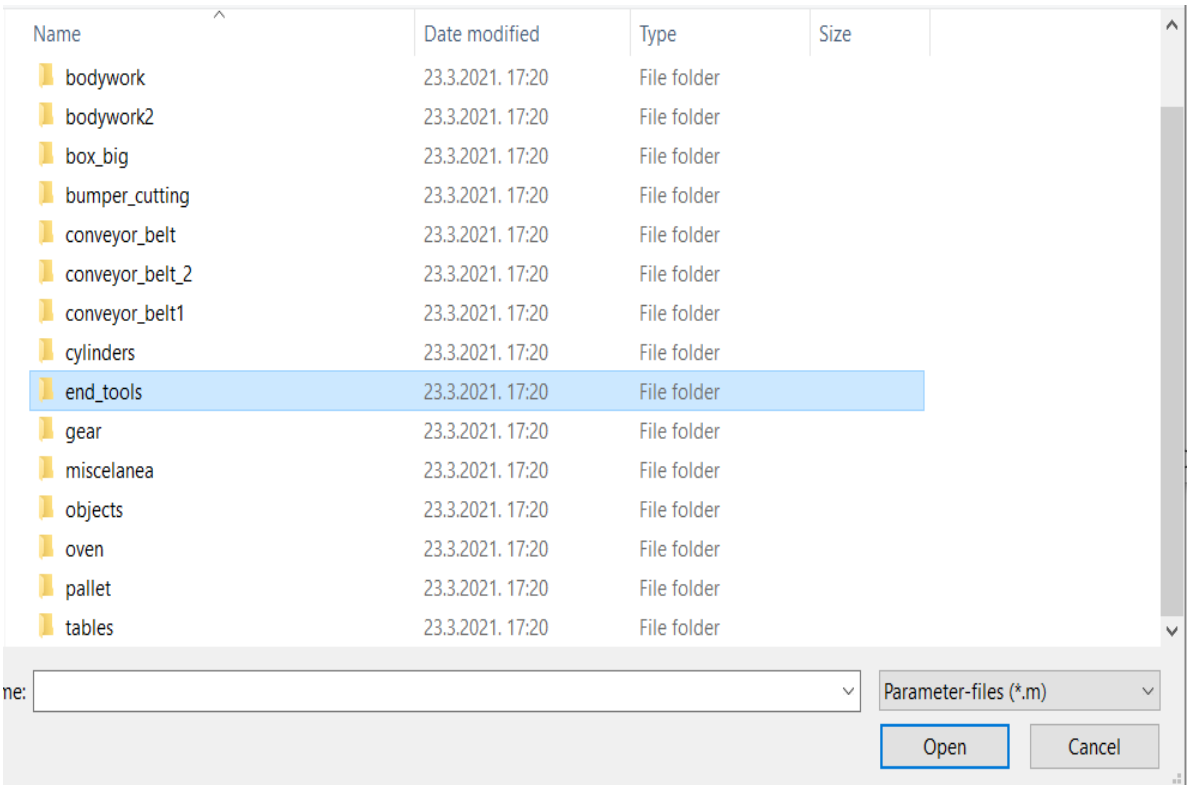
Sl. 1.74 – Izbor foldera „robots“

Zatim je potrebno izabrati folder „equipment“ i naredbu „Open“, kako je prikazano na slici 1.75.



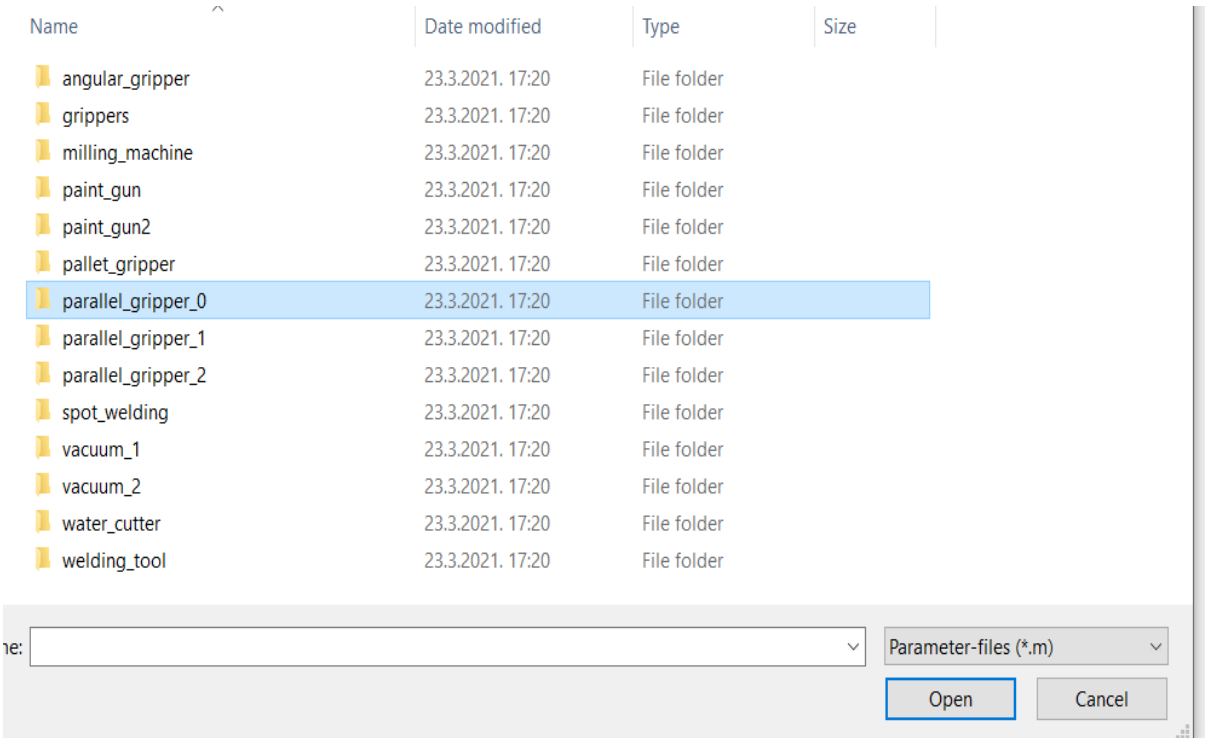
Sl. 1.75 – Izbor foldera „equipment“

Nakon što je izabran folder „equipment“ potrebno je izabrati folder „end_tools“ i naredbu „Open“ kako je prikazano na slici 1.76.



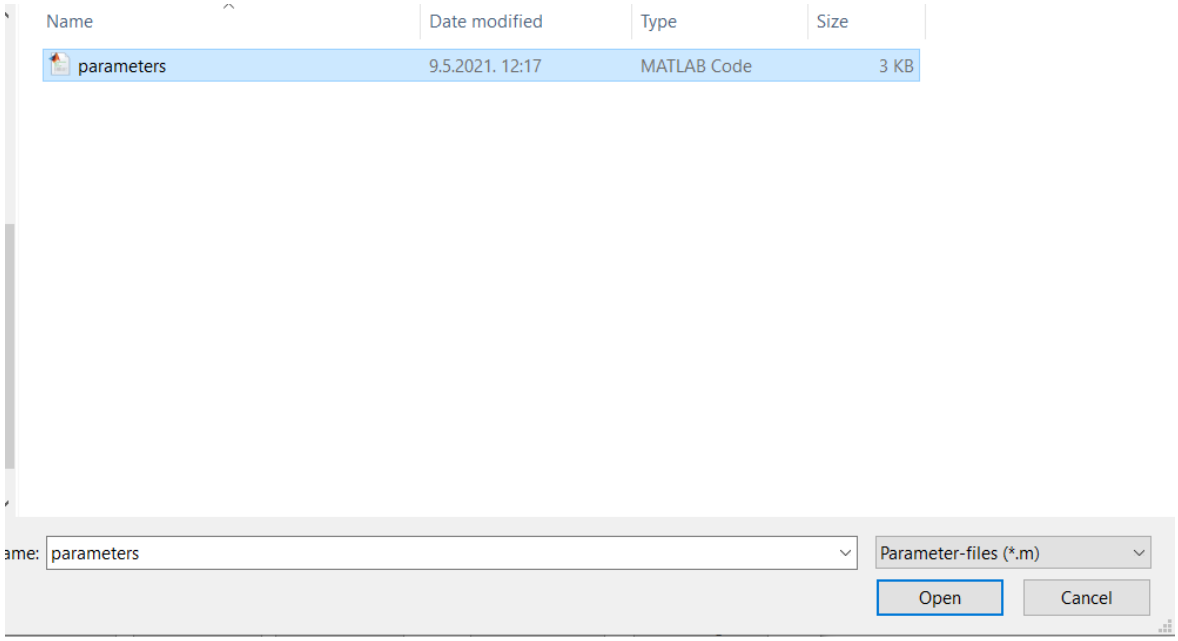
Sl. 1.76 – Izbor foldera „end_tools“

Izborom foldera „end_tools“ pojavljuju se različite mogućnosti izbora alata, a u konkretnom slučaju izabran je folder „parallel_gripper_0“ kako je prikazano na slici 1.77



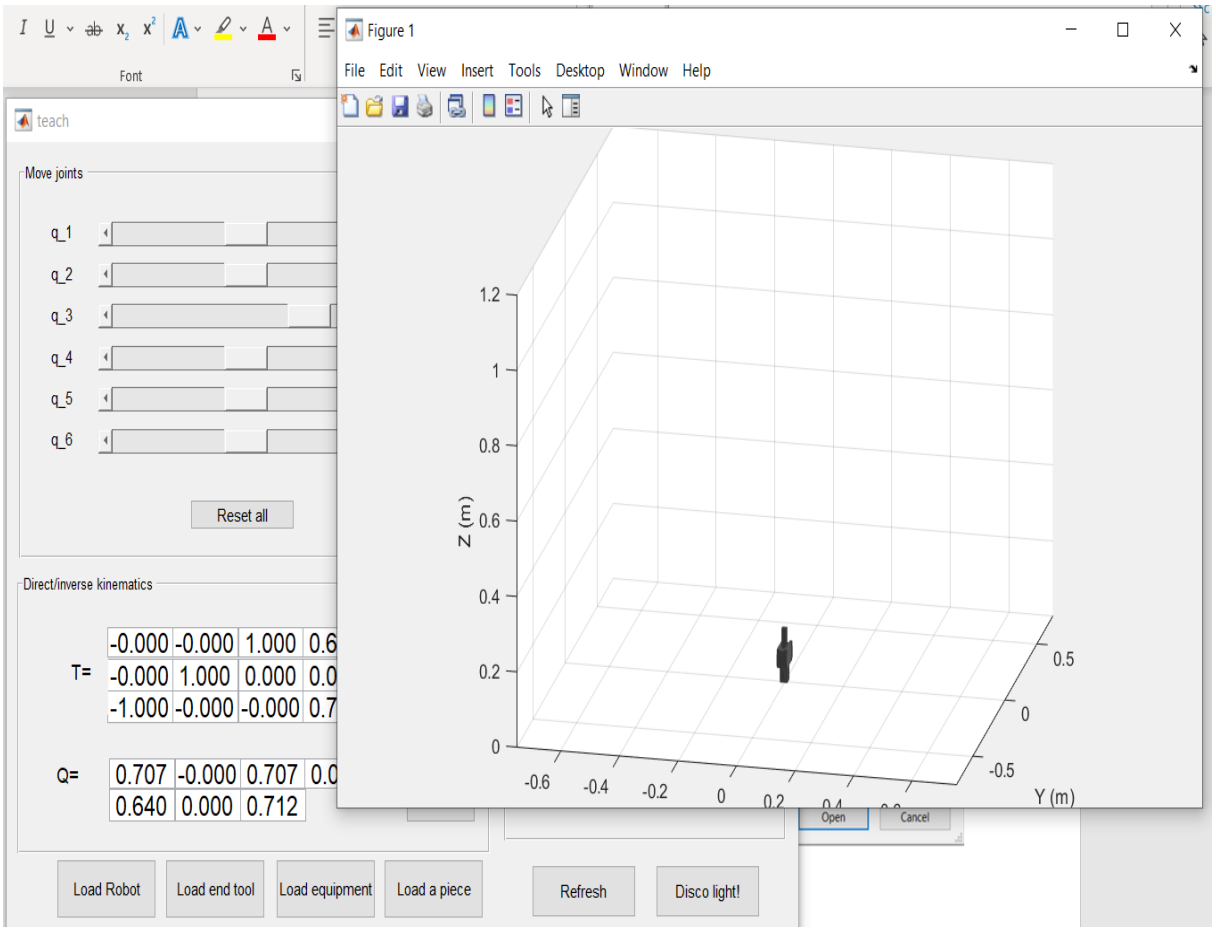
Sl. 1.77 – Izbor foldera „parallel_gripper_0“

Na slici 1.78 prikazan je folder „parametars“ i naredba „Open“.



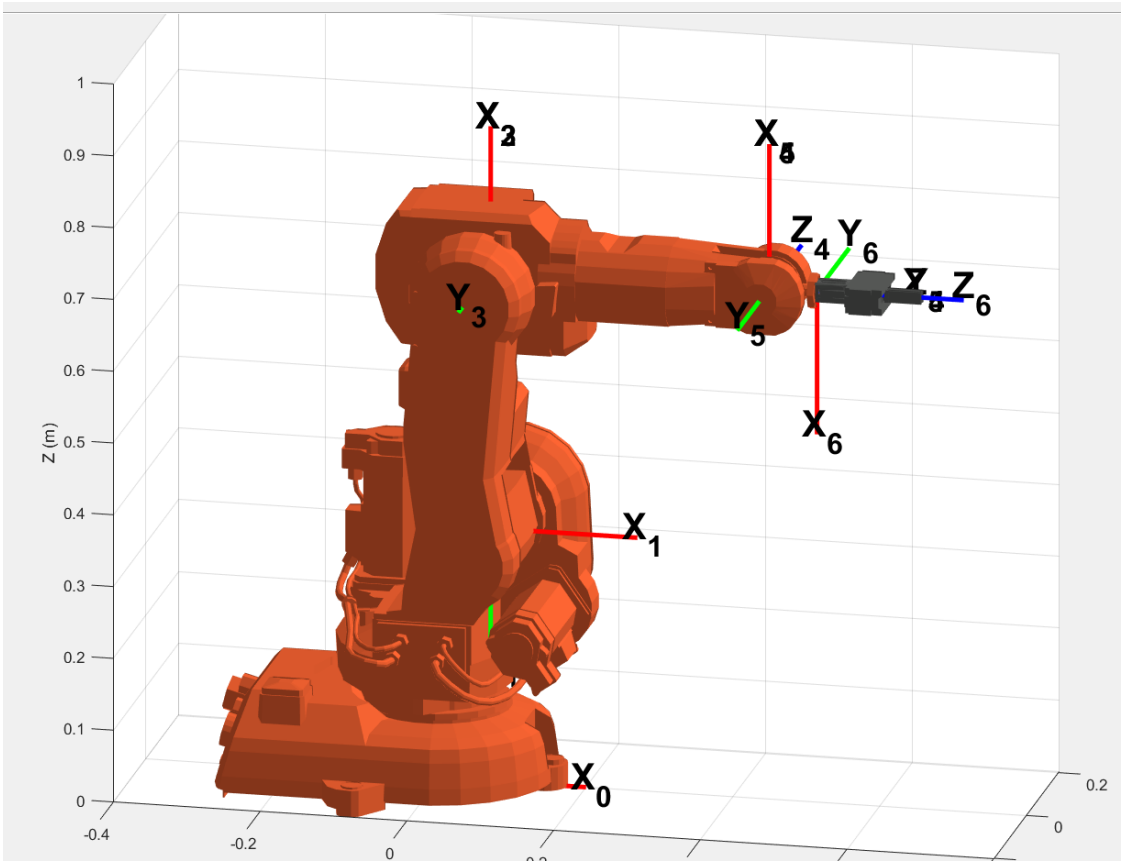
Sl. 1.78 – Izbor foldera „parametars“

Nakon otvaranja pojavljuje se slika 1.79 na kojoj se uočava alat, te je na „teach“ panelu potrebno uključiti naredbu „Refresh“.



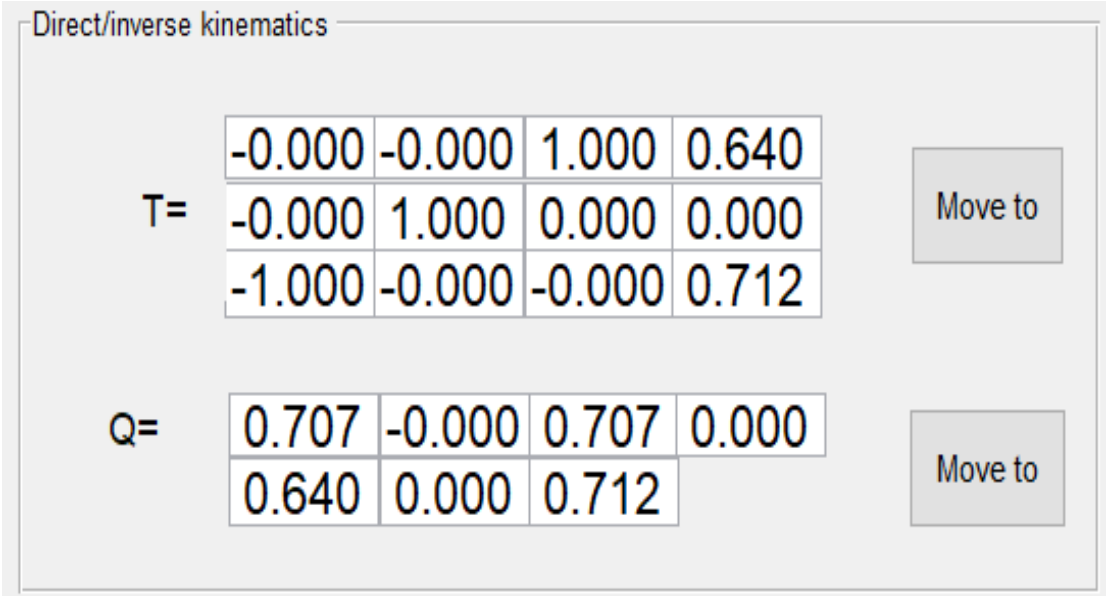
Sl. 1.79 – Izabrani alat

Zvaršno slijedi simulacija robota ABB IRB140 M2000 s alatom kako je prikazano na slici 1.80.



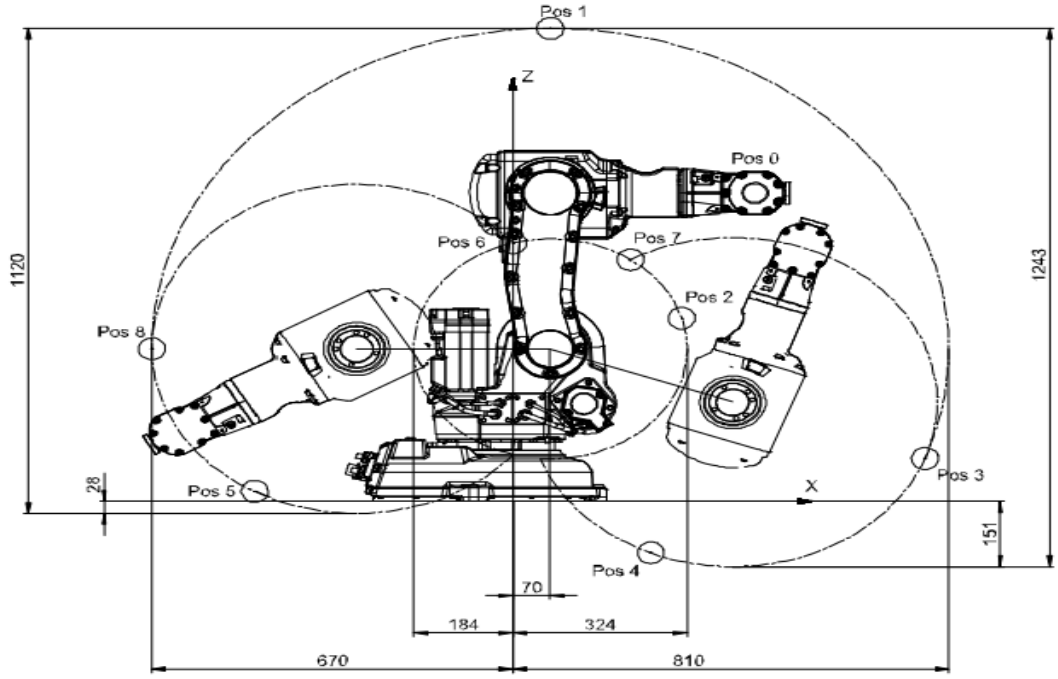
Sl. 1.80 – Simulacija robota ABB IRB140 M2000 s alatom

Dodavanjem alata mijenja se i dinamika robota, kako je prikazano na slici 1.81, odnonso mjenja se položaj geometrije robota koja više nije u hvatištu već u vrhu alata tj. vrijednost 0,515 mjenja se u 0,640.



Sl. 1.81 – Geometrija robota u težištu alata

Na slici 1.82 prikazane su pozicije hvatišta alat (engl. *position of wirst center*) i 8 pozicija radnih točaka s podacima graničnih kuteva za osi 2 i 3, kako je vidljivo u Tablici 1.5, jer o njima ovisi siguran način rada robota.



Sl. 1.82 – Pozicija hvatišta alata robota (Product Manual IRB 140)[14]

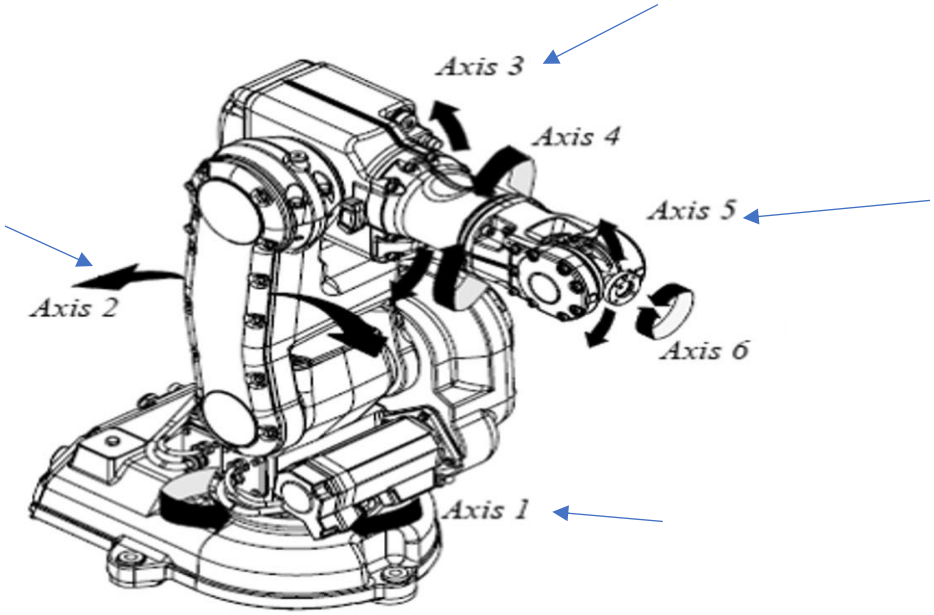
Tablica 1.5 – Pozicije hvatišta alata i kutna ograničenja osi 2 i 3 (ibidem)

Pos.	Position at wrist centre		Angle (degrees)	
	X	Z	Axis 2	Axis 3
0	450	712	0°	0°
1	70	1092	0°	-90°
2	314	421	0°	+50°
3	765	99	+110°	-90°
4	255	-119	+110°	+4°
5	-480	23	-90°	-150°
6	1	596	-90°	+50°
7	218	558	+110°	-230°
8	-670	352	-90°	-90°

[14]https://library.e.abb.com/public/81a35b138c2342b5b9455e5696a09484/3HAC027400%20PM%20IRB%20140-en.pdf

8.3 Indirektna kinematika robota ABB IRB 140 M2000

Indirektna kinematika robota utemeljena je na troosnom robotu, kako je prethodno obrađeno u poglavlju 5. Problem indirektne kinematike glasi: *kako na temelju zadane pozicija i orijentacija vrha manipulatora (alata) u odnosu na koordinatni sustav pridružen bazi robota odrediti vektor varijabli zglobova robotskog manipulatora?* Prema slici 1.83 za proračun indirektne kinematike važne su osi 1, 2, 3 i 5.



Sl. 1.83 – Osi važne za indirektnu kinematiku (ibidem)

Proračun indirektne kinematike provest će se s robotom koji u hvatištu ima montirani alat, kako pokazuje slika 1.80. Slijedom navedenog zadana pozicija vrha alata iznosi:

$$\boldsymbol{Poz_{alat}} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

dok pozicija hvatišta alata iznosi:

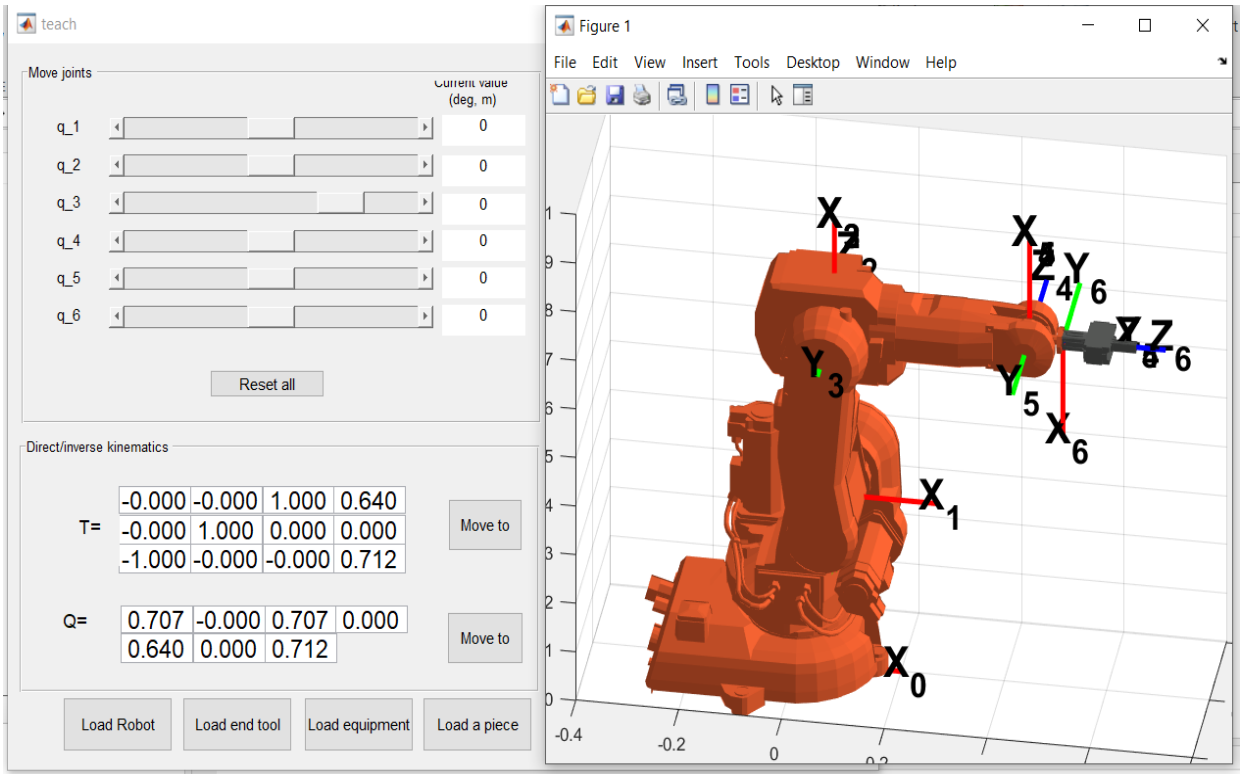
$$\boldsymbol{Poz_{hvatište}} = \begin{bmatrix} p_{w_x} \\ p_{w_y} \\ p_{w_z} \end{bmatrix}$$

Konfiguracija zglobova robota glasi:

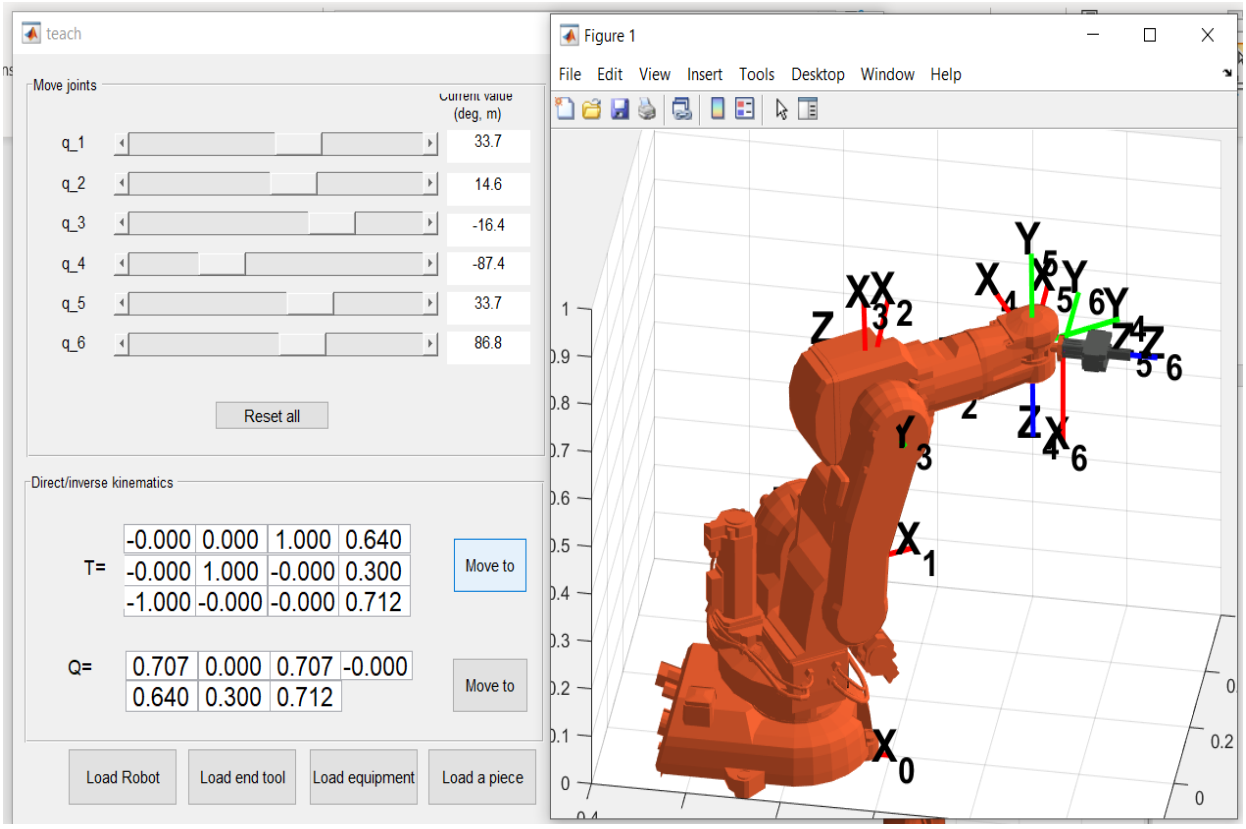
$$q = q[\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad \theta_4 \quad \theta_5 \quad \theta_6\,]$$

Kutevi θ_4 i θ_6 povezani s orijentacijom alata, dok su kutevi θ_1 , θ_2, θ_3 i θ_5 povezani s pozicijom alata. U slučaju pomaka robota u bazi za kut θ_1 do izražaja dolazi orijentacija robota alata uz zadržavanja istog guateriona Q.

Na slici 1.84 a) prikazana je početna pozicija, dok je na slici 1.48 b) prikazana završna pozicija kretanja robota.

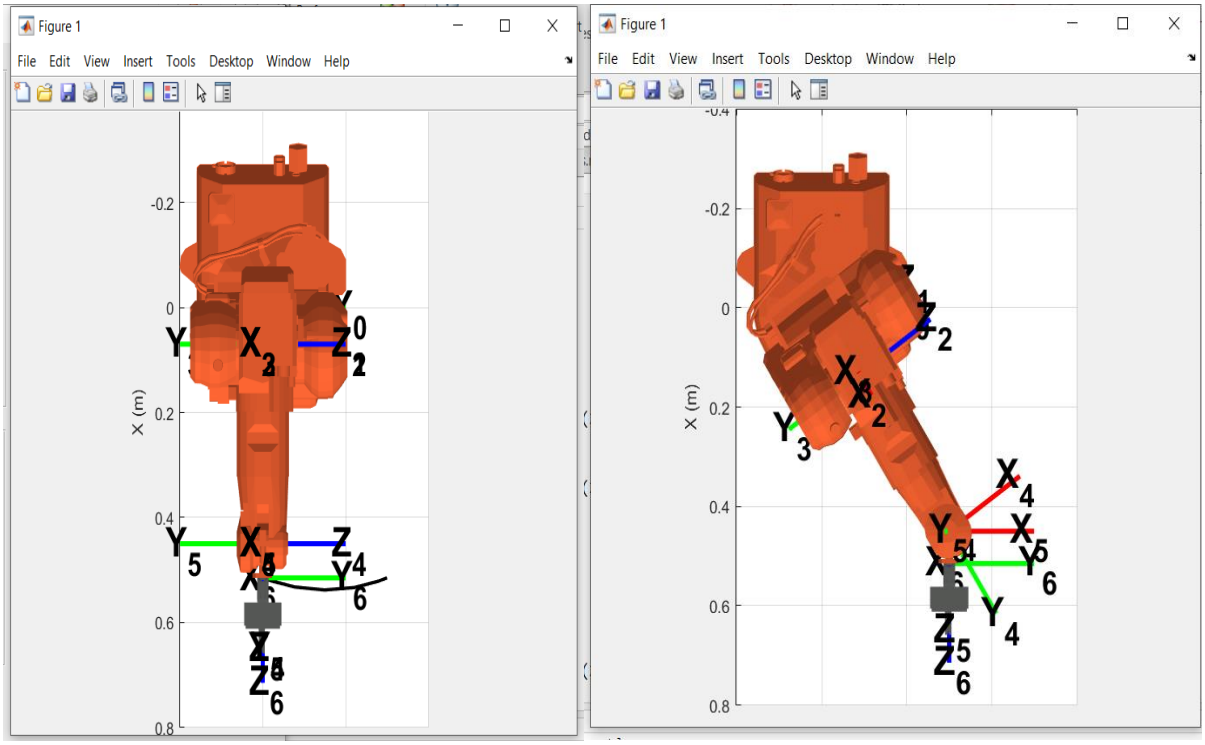


Sl. 1.84 a) Početna pozicija



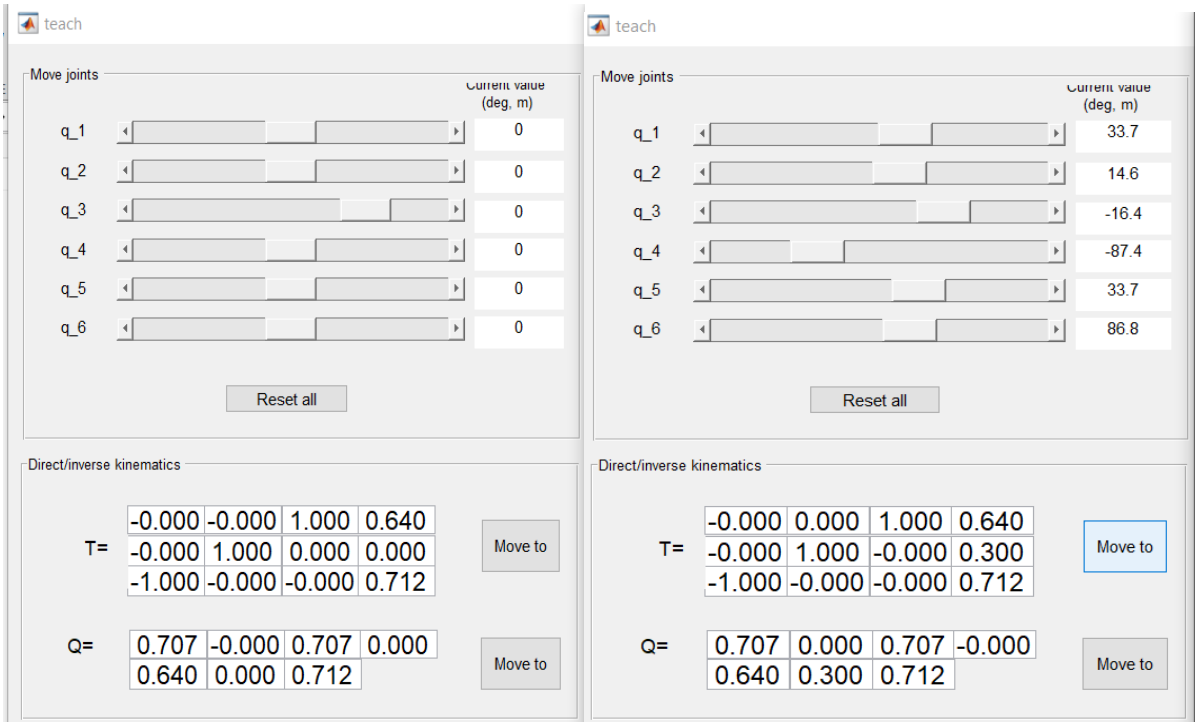
Sl. 1.84 b) Završna pozicija

Na slici 1.84 c) prikazan je usporadba početne i završne pozicije.



Sl. 1.84 c) – Usporedba početne i završne pozicije

Uočljivo je sa slike 1.84 c) kako je došlo do rotacije po kutu θ_4 i θ_6 kako bi se održao zadani kvarternion. Na slici 1.84 d) prikazani su podaci vektora konfiguracije zglobova robota $\boldsymbol{q}$.



Sl. 1.84 d) – Vektor konfiguracije zglobova robota

Prema slici 1.84 d) početna i završna konfiguracija pozicije alata bila je:

$$\boldsymbol{Poz_{početna}} = \begin{bmatrix} 0{,}64 \\ 0 \\ 0{,}712 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Poz_{završnaa}} = \begin{bmatrix} 0{,}64 \\ 0{,}3 \\ 0{,}712 \end{bmatrix}$$

Dok je početna i završna konfiguracija vektora zglobova robota bila:

$$q_{početna} = q[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\,]$$

$$q_{završna} = q[33{,}7^{\circ} \quad 14{,}6^{\circ} \quad -16{,}4^{\circ} \quad -87{,}4^{\circ} \quad 33{,}7^{\circ} \quad 86{,}8^{\circ}\,]$$

Pri čemu je kvarternion Q ostao isti i iznosi:

$$Q = [0{,}707;\ 0;\ j \cdot 0{,}707;\ 0]$$

8.4 Programiranje robota

Programiranje i simulacija rada robota ABB IRB140 M2000 u paketu ARTE provodi se na temelju nekoliko programskih rutine. Prva je rutina *„parametri“* koja će se u nastavku pobliže pojasniti.

8.4.1 Rutina *„parameters“*

Na slici 1.85a) prikazan je uvodni dio rutune i uvjeti primjene iste

```
%%%
```

Na slici 1.85 b) prikazani kinematički parameri robota odnosno indirektna i direktna kinematika za robot sa 6 stupnjeva slobode (DOF) konfiguracije RRRRRR.

```
robot.name= 'ABB_IRB140_M2000';
robot.DH.theta= '[q(1) q(2)-pi/2 q(3) q(4) q(5) q(6)+pi]';
robot.DH.d='[0.352 0 0 0.380 0 0.065]';
robot.DH.a='[0.070 0.360 0 0 0 0]';
robot.DH.alpha= '[-pi/2 0 -pi/2 pi/2 -pi/2 0]';
robot.J=[];


robot.inversekinematic_fn = 'inversekinematic_irb140(robot, T)';
robot.directkinematic_fn = 'directkinematic(robot, q)';


%number of degrees of freedom
robot.DOF = 6;

%rotational: 0, translational: 1
robot.kind=['R' 'R' 'R' 'R' 'R' 'R'];
```

Matrica konfiguracije robota

Inverzna kinematika robota

Direktna kinematika robota

Sl. 1.85 b) – Kinematički parametri robota i njegova konfiguracija

Na slici 1.85 c) prikazani su granični kutevi zaglobova robota po osima (od osi 1 do 6), zatim maksimalne kutne brzine osi robota , maksimalno kutno ubrzanje i maksimalna linearna brzina alata robota.

```
%minimum and maximum rotation angle in rad
robot.maxangle =[-pi pi; %Axis 1, minimum, maximum
                 deg2rad(-100) deg2rad(100); %Axis 2, minimum, maximum
                 deg2rad(-220) deg2rad(60); %Axis 3
                 deg2rad(-200) deg2rad(200); %Axis 4: Unlimited (400□ default)
                 deg2rad(-120) deg2rad(120); %Axis 5
                 deg2rad(-400) deg2rad(400)]; %Axis 6: Really Unlimited to (800□ default)

%maximum absolute speed of each joint rad/s or m/s
robot.velmax = [deg2rad(200); %Axis 1, rad/s
                deg2rad(200); %Axis 2, rad/s
                deg2rad(260); %Axis 3, rad/s
                deg2rad(360); %Axis 4, rad/s
                deg2rad(360); %Axis 5, rad/s
                deg2rad(450)];%Axis 6, rad/s

% robot.velmax = [deg2rad(200); %Axis 1, rad/s
%                 deg2rad(200); %Axis 2, rad/s
%                 deg2rad(200); %Axis 3, rad/s
%                 deg2rad(400); %Axis 4, rad/s
%                 deg2rad(400); %Axis 5, rad/s
%                 deg2rad(400)];%Axis 6, rad/s


robot.accelmax=robot.velmax/0.1; % 0.1 is here an acceleration time

% end effectors maximum velocity
robot.linear_velmax = 1; %m/s
```

Dopušteni raspon kuteva po osima

Maksimalna kutna brzina

Maksimalno ubrzanje – akceleracijsko vrijeme

Maksimalna linearna brzina

Sl. 1.85 c) – Kinematička ograničenja robota

Na slici 1.85 d) prikazani su parametri vezani za inicijalizaciju i grafički prikaz rada robota putem „teach“ panela.

```
%base reference system
robot.T0 = eye(4);
% robot.T0 = [1 0 0 0;
%             0 -1 0 0;
%             0 0 -1 1;
%             0   0   0   1];


%INITIALIZATION OF VARIABLES REQUIRED FOR THE SIMULATION
%position, velocity and acceleration
robot=init_sim_variables(robot);
robot.path = pwd;


% GRAPHICS
robot.graphical.has_graphics=1;
robot.graphical.color = [255 102 51]./255;
%for transparency
robot.graphical.draw_transparent=0;
%draw DH systems
robot.graphical.draw_axes=0;
%DH system length and Font size, standard is 1/10. Select 2/20, 3/30 for
%bigger robots
robot.graphical.axes_scale=1;
%adjust for a default view of the robot
robot.axis=[-0.5 0.75 -0.75 0.75 0 1.1];
%read graphics files
robot = read_graphics(robot);
```

Referentni sustav baze

Inicijalizacija simulacijskih varijabli

Crtanje koordinatnih osi u DH sustavu

- **0 – ne crtaju se osi u pojedinom zglobu**
- **1 – crtaju se osi u pohedinom zglobu**

Sl. 1.85 d) – Incijalizacija i grafički prikaza rada robota

U pogledu dinamike robota, u programskoj rutini „parameters“ nisu dani originalni podaci robota IRB 140 već podaci koji su dovoljni za demonstraciju rada robota kako pokazuje sljedeća napomena na slici 1.85 e).

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% DYNAMIC PARAMETERS
%   WARNING! These parameters do not correspond to the actual IRB 140
%   robot. They have been introduced to demonstrate the necessity of
%   simulating the robot and should be used only for educational purposes
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
robot.has_dynamics=1;
```

Sl. 1.85 e) – Parametri dinamike za demonstraciju rada robota

Na slici 1.85 f) prikazani su prametri dinamike robota koji uključuju dinamičko trenje, mase robota i dužine linkova centara masa (COM) kao i podaci vezani inerciju u D-H referentnom sustavu. Jednako tako dati su podaci za tip elektromotora kao i podaci o reduktoru.

```
robot.dynamics.friction=0;

%link masses (kg)
robot.dynamics.masses=[25 27 15 10 2.5 1.5];

%COM of each link with respect to own reference system
robot.dynamics.r_com=[0       0          0; %(rx, ry, rz) link 1
                     -0.05    0.006    0.1; %(rx, ry, rz) link 2
                     -0.0203 -0.0141  0.070;  %(rx, ry, rz) link 3
                      0       0.019       0;%(rx, ry, rz) link 4
                      0       0           0;%(rx, ry, rz) link 5
                      0       0         0.032];%(rx, ry, rz) link 6

%Inertia matrices of each link with respect to its D-H reference system.
% Ixx   Iyy Izz Ixy Iyz Ixz, for each row
robot.dynamics.Inertia=[0      0.35 0       0   0   0;
    .13     .524    .539    0   0   0;
    .066    .086    .0125   0   0   0;
    1.8e-3  1.3e-3  1.8e-3  0   0   0;
    .3e-3   .4e-3   .3e-3   0   0   0;
    .15e-3  .15e-3  .04e-3  0   0   0];


robot.motors=load_motors([5 5 5 4 4 4]);
%Speed reductor at each joint
robot.motors.G=[300 300 300 300 300 300];
```

Viskozno trenje

Mase

Centri mase

Momenti ineracije

Motor

Reduktor

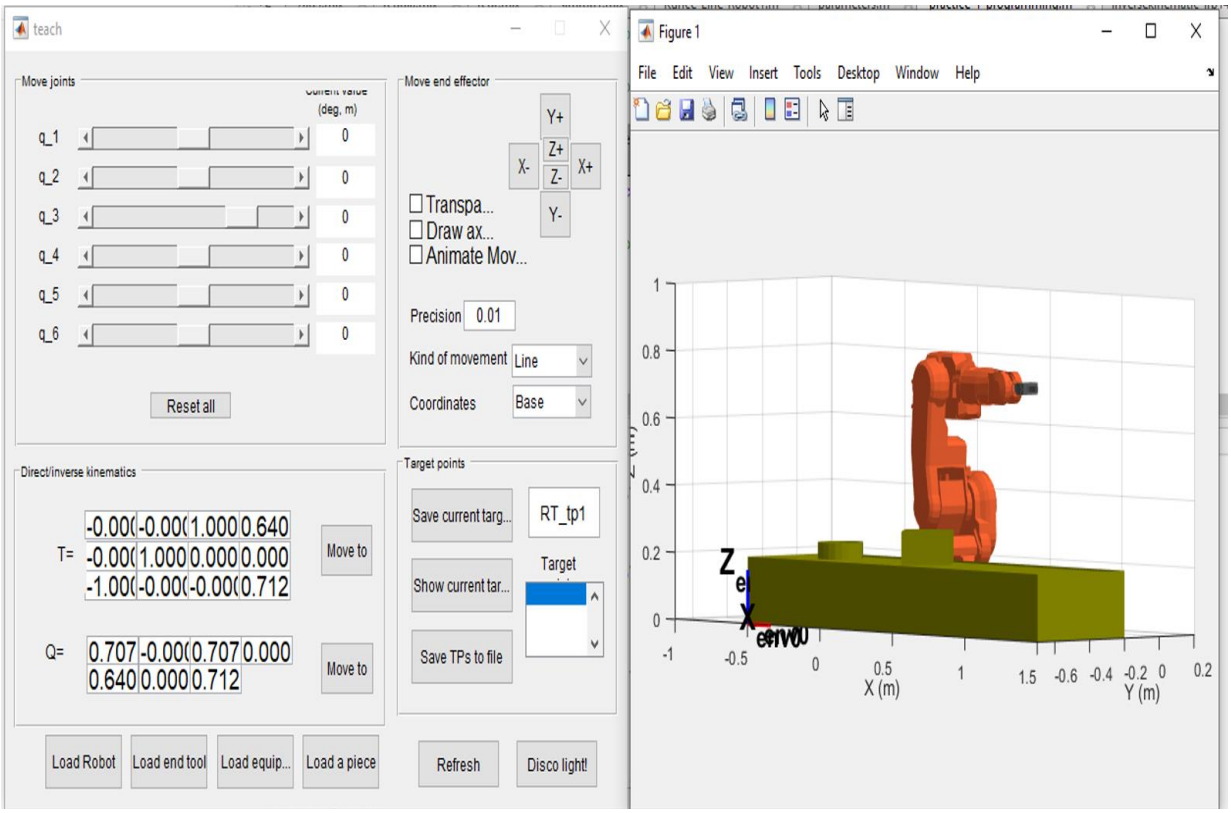
Sl. 1.85 f) – Parametri dinamike robota

Nakon što su određeni kinematički i dinamički parametri robota, potrebno je bilo odrediti rutinu za pozivanje radnog modela na temelju kojeg će se provesti simulacija rada robota u zadanoj okolini.

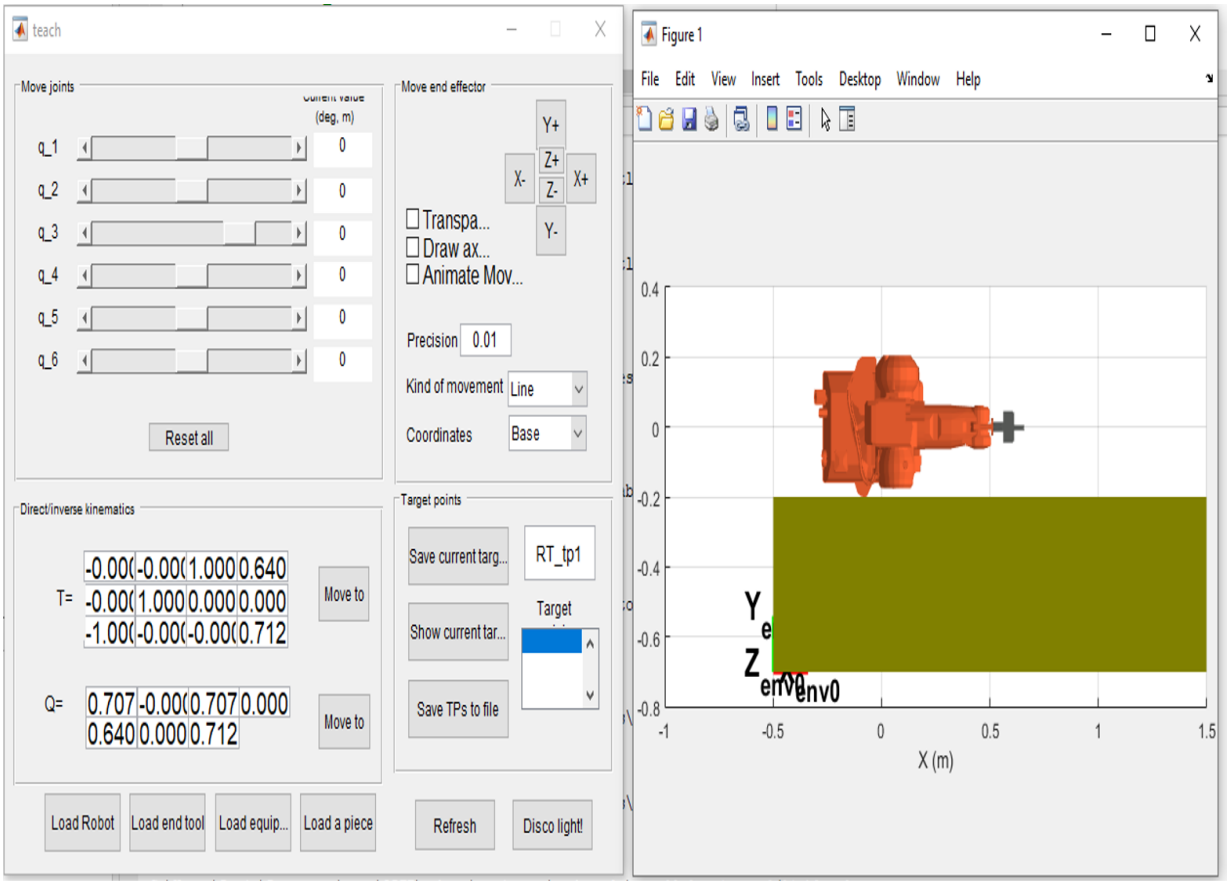
Programska rutina kojom se zadaje robot, alat i radna okolina robota je sljedeća:

```
>> robot = load_robot('ABB','IRB140');
robot.equipment{1} = load_robot('equipment','tables/table_two_areas');
robot.tool= load_robot('equipment','end_tools/parallel_gripper_0');
```

Pokretanjem prije spomenute rutine slijedi kako je prikazano na sljedećim slikama 1.86 a) i b).



Sl. 1.86 a) - Robot s alatom u radnoj okolni (nacrt)



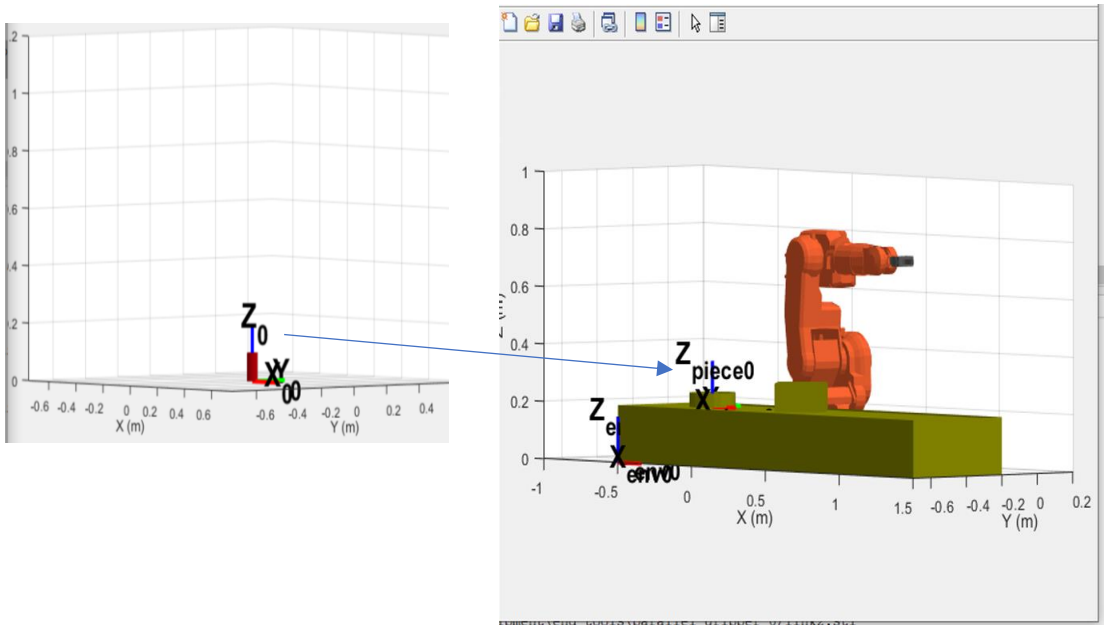
Sl. 1.86 b) - Robot s alatom u radnoj okolni (tlocrt)

U radnu oklinu potrebno je dodati predmet obrade robota uz pomoć sljedeće nardebe u zadanoj inicijalnoj poziciji:

```
EndOfFile found... >>
>> robot.piece{1}=load_robot('equipment','cylinders/cylinder_tiny');

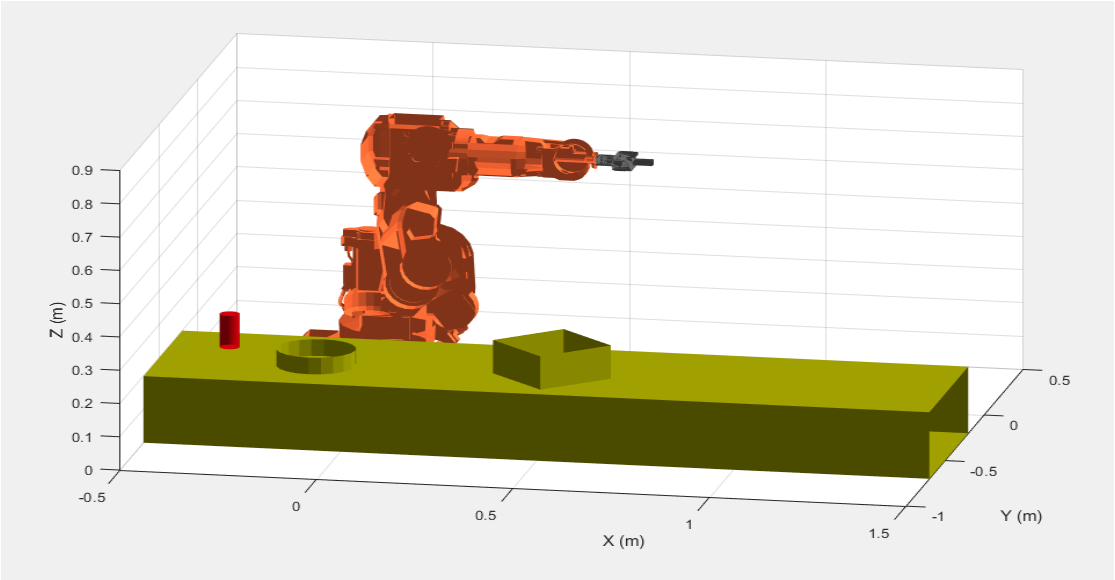
%init the position of the piece at the beginning of the simulation
robot.piece{1}.T0(1:3,4)=[-0.1 -0.5 0.2]';
```

Slijedom istoga dobija se kako je prikazano na slici 1.86 c).



Sl. 1.86 c) – Predmet obrade u radnoj okolini na inicijalnoj poziciji

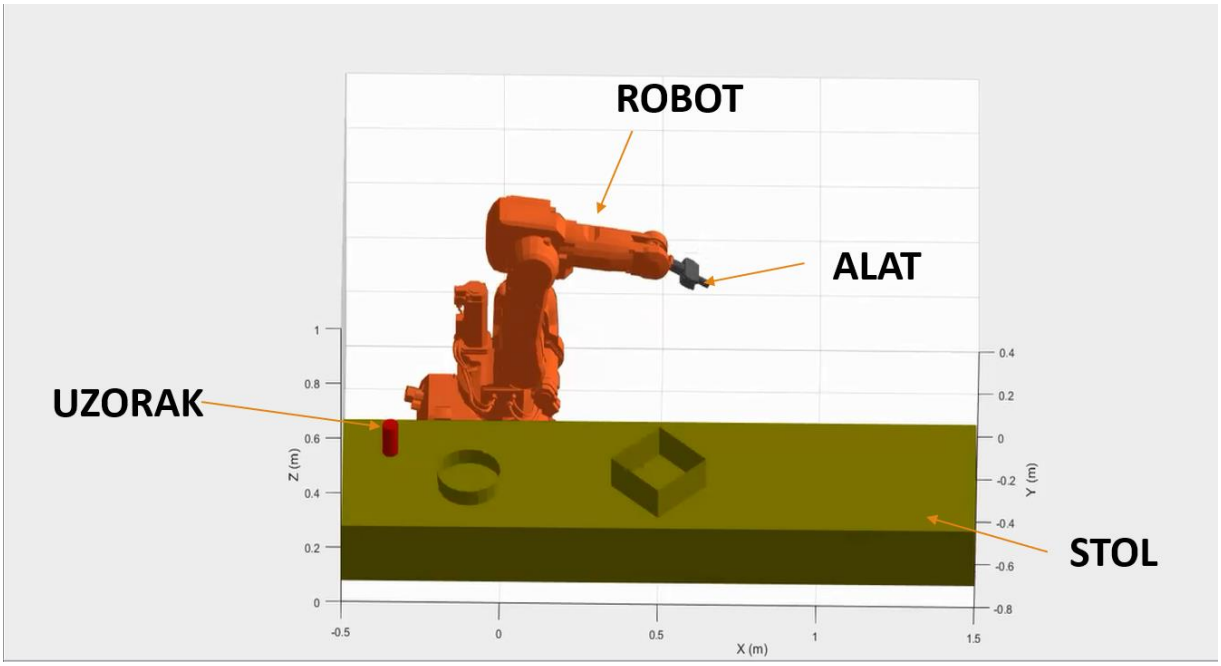
Završno na slici 1.86 d) prikazano radno stanje u opretativnom prostoru u kojem je potrebno programirati rad robota sa zadanim alatom i predmetom obrade.



Sl. 1.86 d) – Radno stanje robota u operativnom prostoru

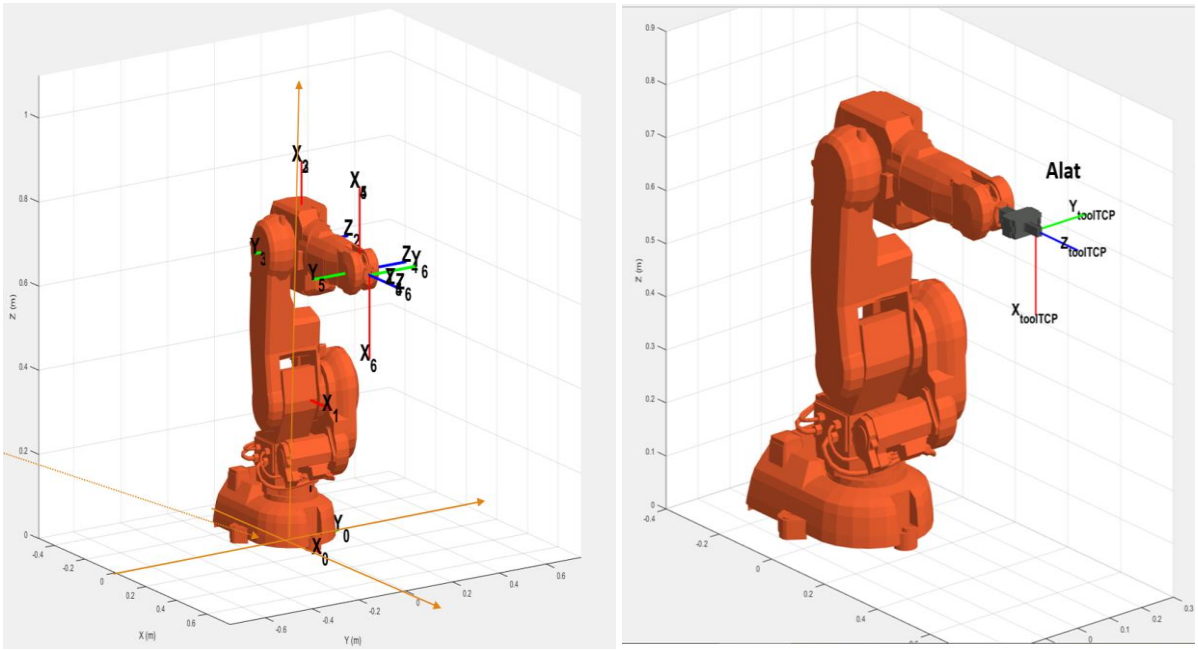
8.4.2 Točke putanje robota

U određivanje točka putanje robota kako bi se obavile određene (zadane) radnje s objektom (uzorkom) početna pozcija prikazana je na slici 1.87. Ona se još naziva i *„reset“* pozicija ili „HOME“ u kojoj vrijedi $q_{početna} = q[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\,]$ i $Q = [0{,}707;\ 0;\ j \cdot 0{,}707\ 0]$.



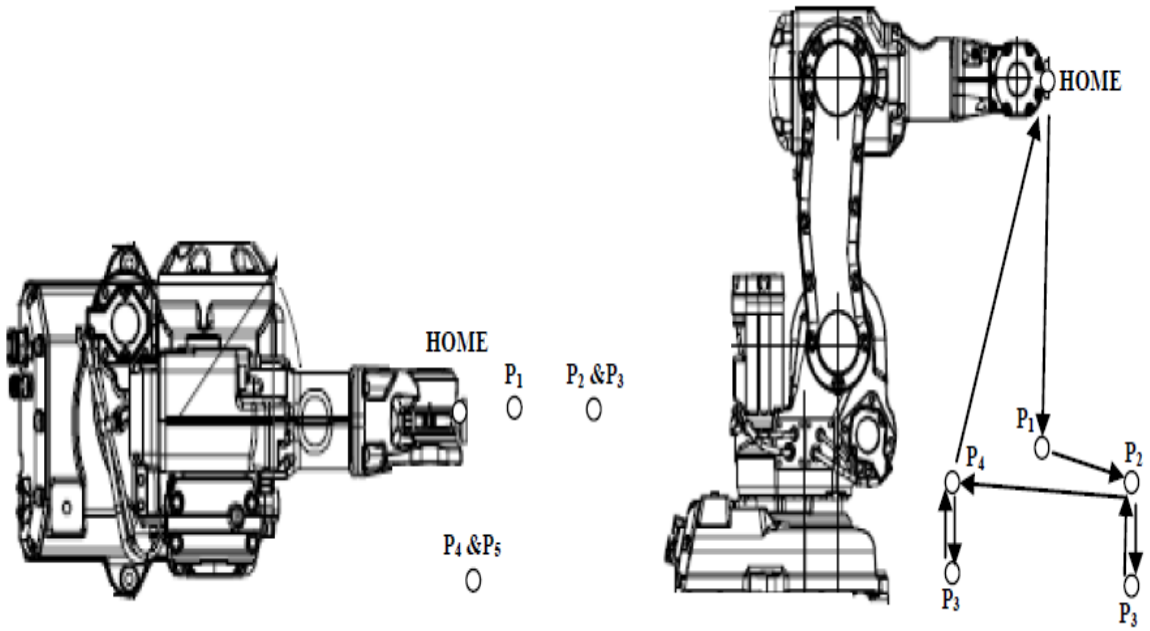
Sl. 1.87 – Početna pozicija programiranja rada robota

Slijedom navedenoga potregno još jednom naglasiti koordinatne sustave baze robota i alata, kako je prikazano na slici 1.88 a) i b).



Sl. 1.88 a) i b) – Koordinatni sustav baze robota i alata

Princip određivanja točaka putanje robota temelji se na „pet točaka“ kako prikazuje slika 1.89



Sl. 1.89 – Pet točaka programiranja robota na putanji (ibidem)

U tu svrhu koristi se sljedeća rutina *„practice_1_pprogramming“* gdje se na samom početku definiraju globalne varijable kako prikazuje slika 1.90. U nastavku će se prezentirati ukupna rutina po djelovima.

```
function practice_1_programming
global robot TD_gripper RT_initial RT_approach1 RT_grip RT_approach2 RT_release

%Comment the following lines to avoid loading the robot at every simulation
robot = load_robot('ABB','IRB140');
robot.equipment{1} = load_robot('equipment','tables/table_two_areas');
robot.tool= load_robot('equipment','end_tools/parallel_gripper_0');
robot.piece{1}=load_robot('equipment','cylinders/cylinder_tiny');

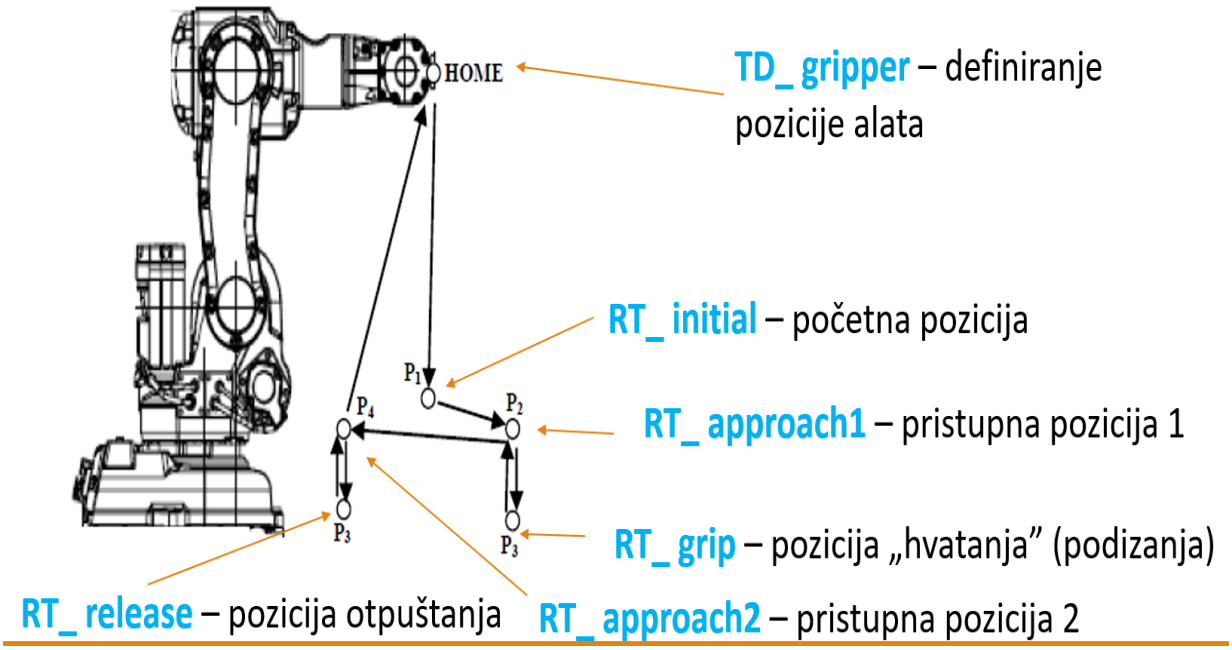
%init the position of the piece at the beginning of the simulation
robot.piece{1}.T0(1:3,4)=[-0.1 -0.5 0.2]';

%robot.tool.piece_gripped=0;
drawrobot3d(robot, robot.q);


%define the tool
%In RAPID this is done by means of the tooldata structure
TD_gripper=[1,[[0,0,0.125],[1,0,0,0]],[0.1,[0,0,0.100],[1,0,0,0],0,0,0]];
```

Sl. 1.90 – Prvi dio rutine *„practice_1_pprogramming“*

Povezanost pet točaka programiranja robota na putanji i gloalnih varijabli prikazana je na slici 1.91.



Sl. 1.91 – Povezanost pet točaka programiranja i globalnih varijabli (ibidem)

Prva pozicija „TD_gripper“ određuje strukturu alata kako je prikazano na slici 1.92.

```
function robot = parameters()

robot.name= 'PARALLEL GRIPPER 0';

robot.DH.theta= '[pi/2 0]';
robot.DH.d='[0.1 0]';
%robot.DH.a='[-0.03*robot.tool_activated-0.03 0.06*robot.tool_activated+0.06]';
robot.DH.a='[-q(1)*0.04-0.005 q(2)*0.08+0.005]';
robot.DH.alpha= '[pi/2 0]';
robot.J=[];


robot.inversekinematic_fn = '';

%number of degrees of freedom
robot.DOF = 2;

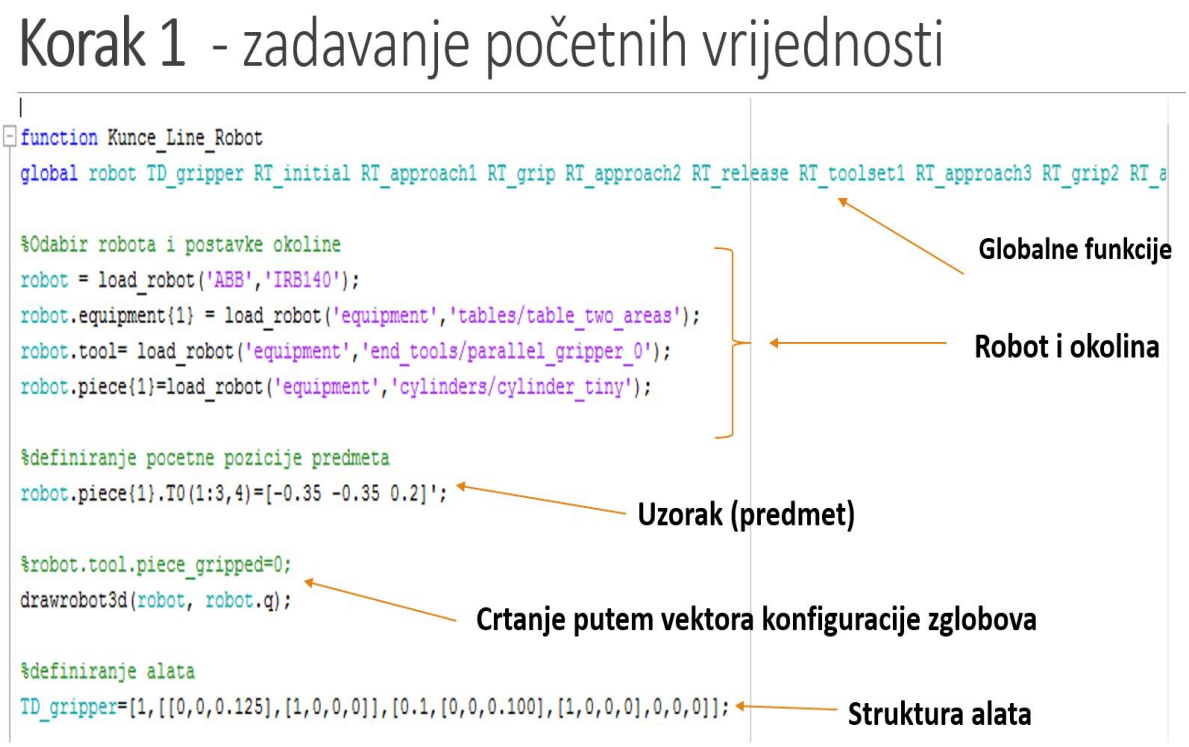
%rotational: 0, translational: 1
robot.kind=[];

%minimum and maximum rotation angle in rad
robot.maxangle =[]; %Axis 6: Unlimited (800□ default)

%maximum absolute speed of each joint rad/s or m/s
robot.velmax = [];%Axis 6, rad/s
% end effectors maximum velocity
```

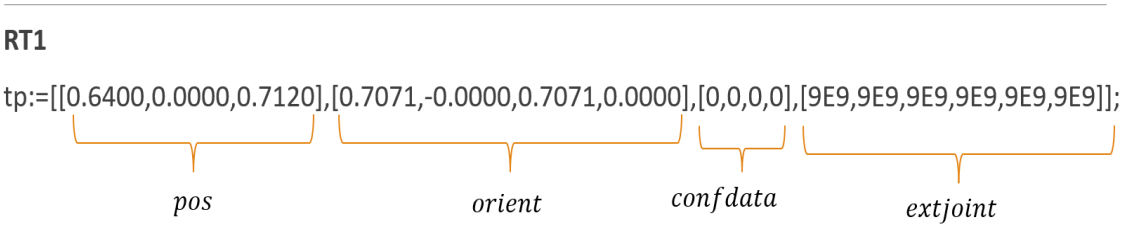
Sl. 1.92 – Parametri alata (Parallel Gripper 0)

Prema tome prvi korak u programiranju rada robota je zadavanje početnih vrijednosti, kako je prikazano na slici 1.93.



Sl. 1.93 – Zadavanje početnih vrijednosti

Programiranje pozicija provodi se pomoću robotskih ciljanih točaka (engl. *robots targt points*) u koje sustav upravljanja robotom dovodi alat. Zapis tih točaka bio bi sljedeći, kako je prikazano na slici 1.94.



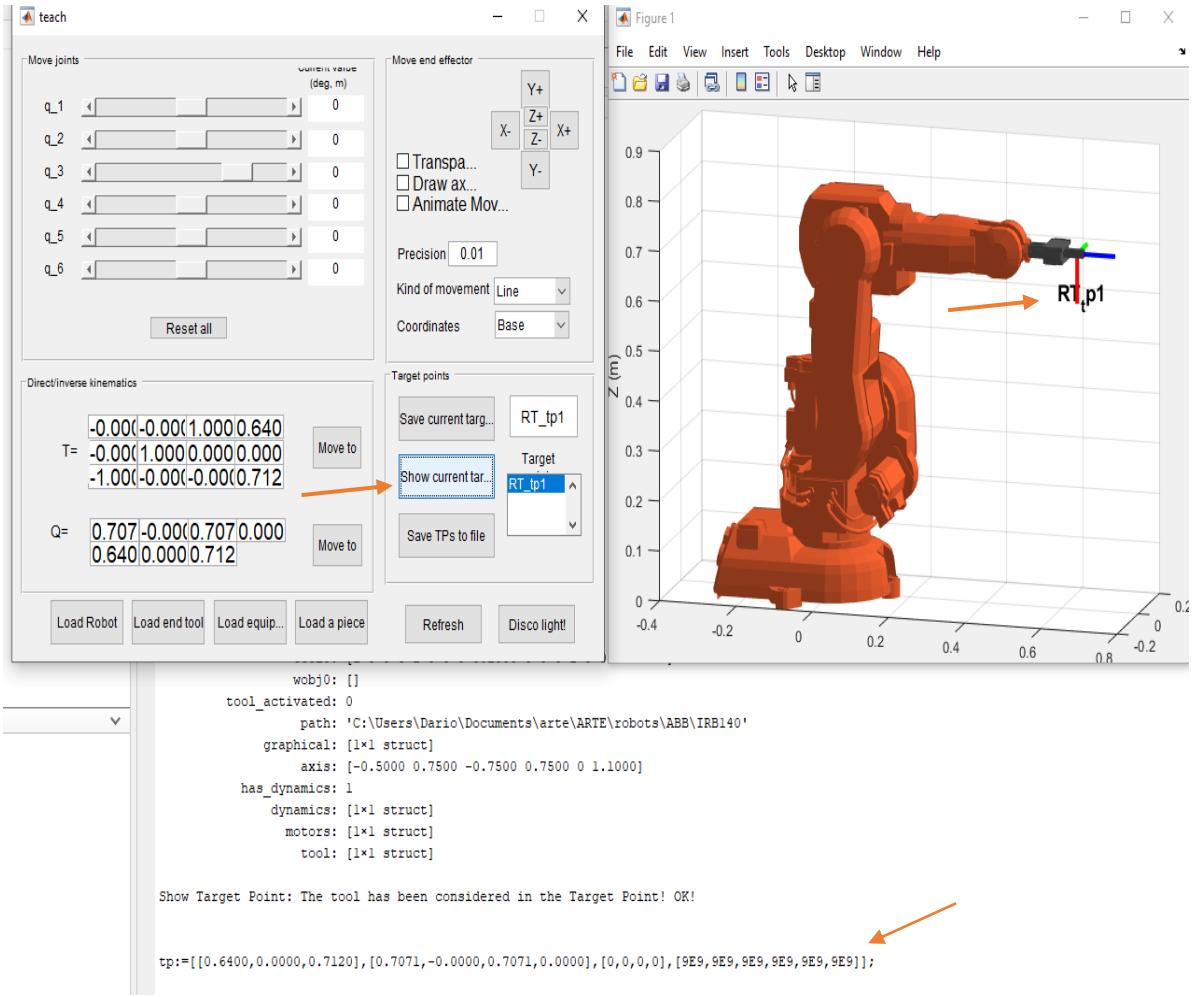
Sl. 1.94 – Zapis robotske ciljane točke

Značenje

`robtarget` consists of four parts:

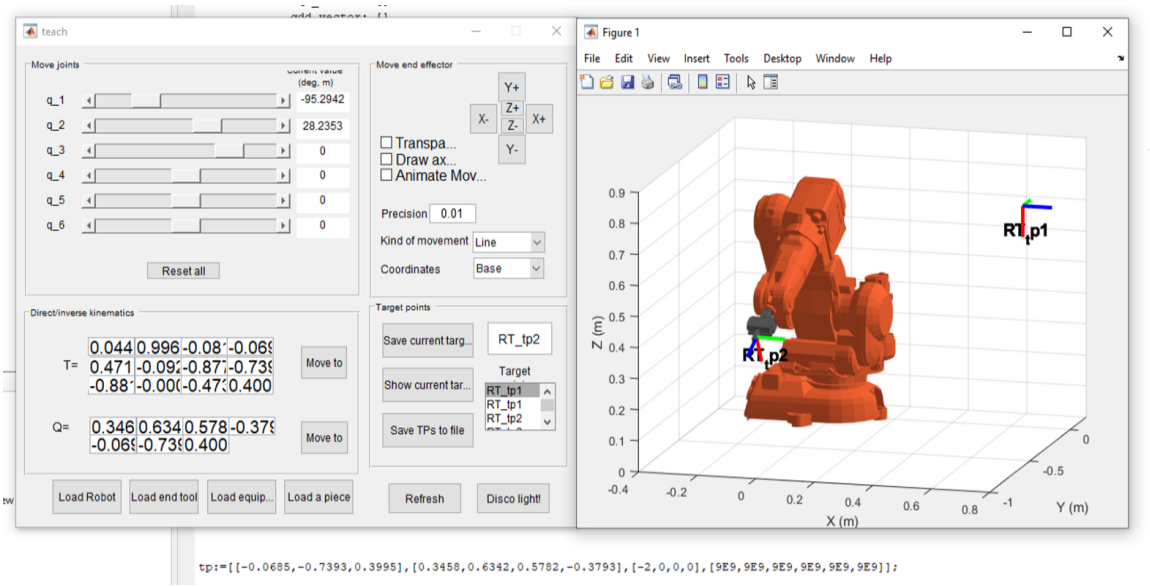
Data type	Name	Description
pos	trans	x, y and z coordinates
orient	rot	Orientation
confdata	robconf	Specifies robot axes angles
extjoint	extax	Specifies positions for up to 6 additional axes. The value is set to 9E9 where no additional axis is used.

Robotska ciljana točka određuje se na „teach“ panelu pomoću naredbe *„Show current target point“*, kako je prikazano na slici 1.95 a).



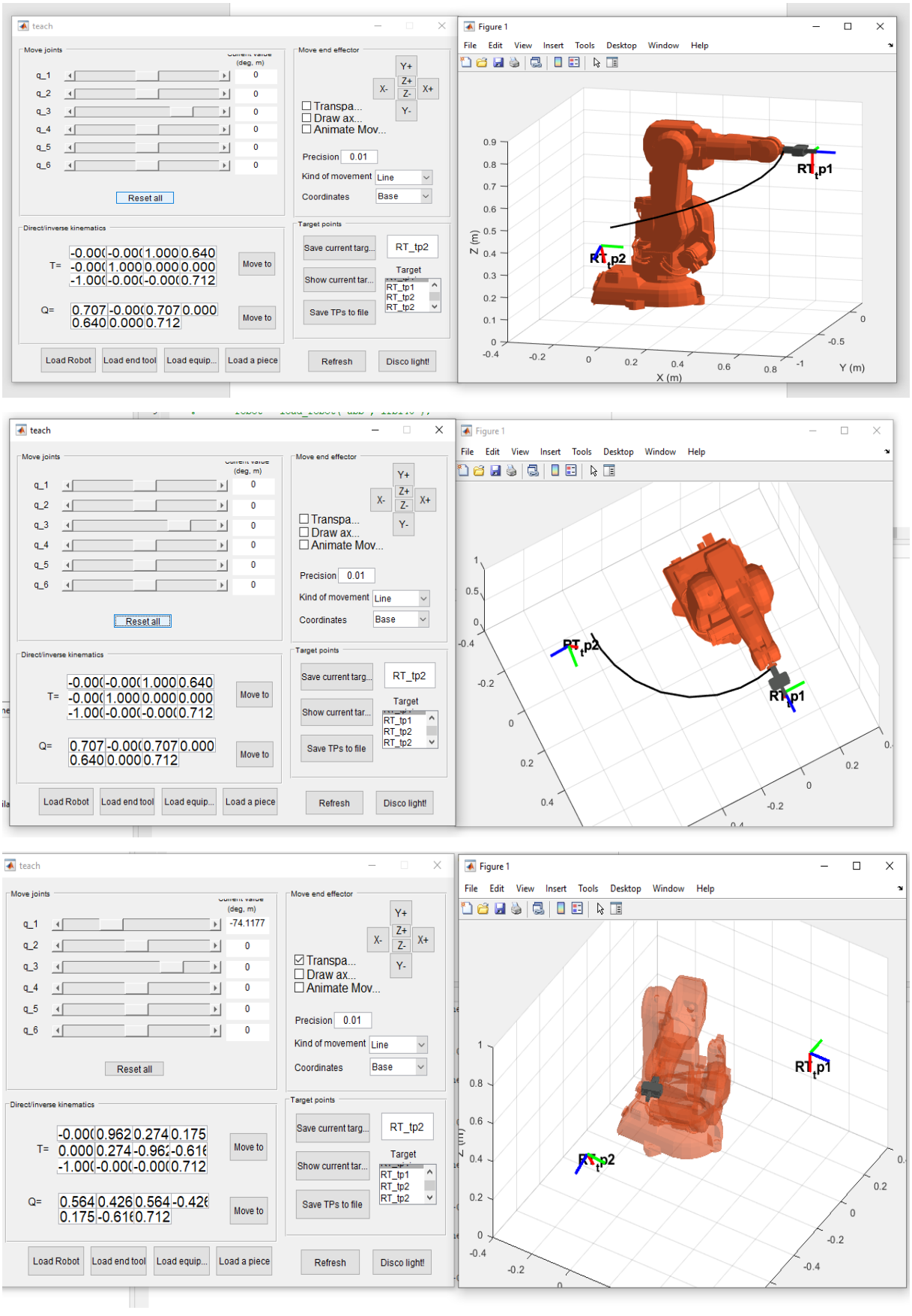
Sl. 1.94 a) – Izbor ciljane radne točke robota

Na slici 1.94 b) prikazan je izbor druge radne točke.



Sl. 1.94 b) – Izbor druge radne točke

Na slikama 1.94 c) uočava se putanja iz jedne u drugu ciljanu radnu točku.



Sl. 1.94 – Kretanje robota iz jedne u drugu ciljanu radnu točku

Prema tome, drugi korak je određivanje ciljanih radnih točaka robota i povezivanje s globalnim varijablama kako je vidljivo na slici 1.95.

Korak 2 - Određivanje ciljanih radnih točaka robota

```
%definiranje svih pozicija kao globalne varijable
RT_initial=[[0.4950, 0.0000, 0.3700],[0.0000, -0.0000, 1.0000, -0.0000], [0, -1, 0, 0], [9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09
RT_approach1=[[-0.3500, -0.3500, 0.3700],[0.0150, 0.9240, 0.3820, 0.0000], [-2, 0, -1, 0], [9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E
RT_grip=[[-0.3500, -0.3500, 0.2750],[0.0150, 0.9240, 0.3820, -0.0000], [-2, 0, -1, 0], [9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,
RT_approach2=[[-0.1000, -0.5000, 0.3700],[0.0139, 0.7136, 0.7003, -0.0056], [-2, 0, -1, 0], [9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9
RT_release=[[-0.1000, -0.5000, 0.2750],[0.0140, 0.7140, 0.7000, -0.0060], [-2, 0, -1, 0], [9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+

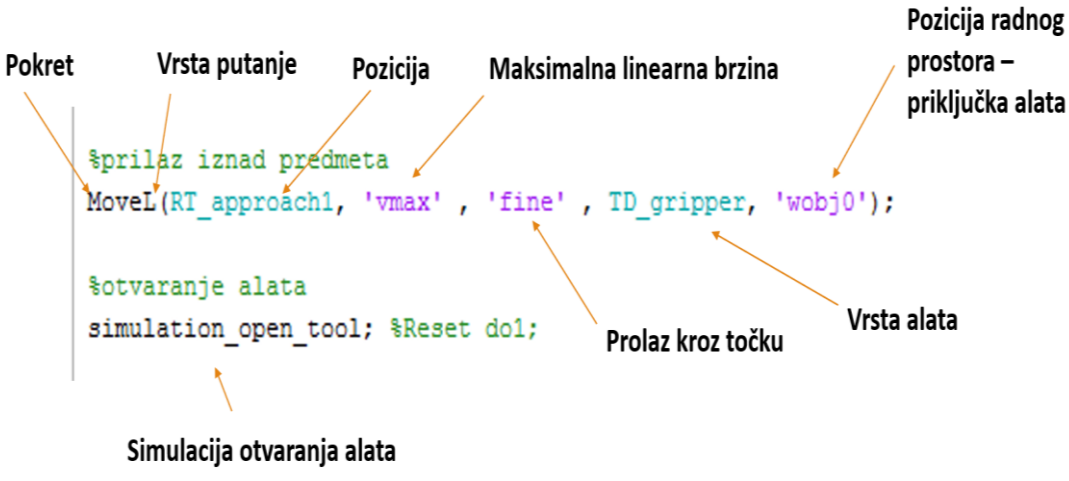
RT_toolset1=[[-0.0496, -0.4727, 0.5309],[0.1691, 0.7007, 0.1616, -0.6741], [-1, -2, 1, 0], [9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E
RT_approach3=[[-0.0500, -0.4730, 0.2750],[0.1690, 0.7008, 0.1620, -0.6738], [-1, -2, 1, 0], [9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9
RT_grip2=[[-0.1000, -0.5000, 0.2750],[0.1690, 0.7008, 0.1620, -0.6738], [-2, 0, -1, 1], [9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09
RT_approach4=[[-0.1000, -0.5000, 0.4500],[0.1690, 0.7008, 0.1620, -0.6738], [-2, -2, 1, 0], [9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9
RT_toolset2=[[0.0927, -0.5625, 0.3411],[0.4395, 0.8960, 0.0345, 0.0525], [-1, 0, 1, 1], [9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09
RT_approach5=[[0.4530, -0.4860, 0.3500],[0.0170, 0.9260, 0.3770, 0.0060], [-1, -1, 0, 0], [9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+
RT_release2=[[0.4530, -0.4860, 0.2250],[0.0170, 0.9260, 0.3770, 0.0060], [-1, -1, 0, 0], [9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+0

RT_approach6=[[-0.3500, -0.3500, 0.5000],[0.0117, 0.7304, -0.0236, -0.6825], [-2, 0, -1, 1], [9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,
RT_release3=[[-0.3500, -0.3500, 0.2750],[0.0120, 0.7300, -0.0240, -0.6830], [-2, 0, -1, 1], [9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9
RT_approach7=[[-0.3500, -0.3500, 0.3750],[0.0120, 0.7300, -0.0240, -0.6830], [-2, 0, -1, 1], [9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,
RT_initial_help=[[-0.0024, -0.5410, 0.4000],[0.0280, 0.7140, 0.6990, -0.0060], [-2, 0, -1, 1], [9E+09,9E+09,9E+09,9E+0
main
end
```

Sl. 1.95 – Određivanje ciljanih radnih točaka

Sljedeći, treći korak je određivanje putanje (trajektorije) od pozicije do pozicije, linearne brzine kretanja i drugih parametara važnih za kretanje robota kako je prikazano na slici 1.96 a).

Korak 3 – Putanja(trajektorija)



Sl. 1.96 a) – Određivanje prametara putanje robota

Elemeti programa bili bi npr. kako je prikazano na slici 1.96 b):

```
function main()

global TD_gripper RT_initial RT_approach1 RT_grip RT_approach2 RT_release RT_toolset1 RT_approach3 RT_grip2 RT_approac
%pocetak simulacije s zatvorenim alatom
simulation_close_tool; %Set do1;

%pocetna tocka
MoveJ(RT_initial, 'vmax' , 'fine' , TD_gripper, 'wobj0');

%prilaz iznad predmeta
MoveL(RT_approach1, 'vmax' , 'fine' , TD_gripper, 'wobj0');

%otvaranje alata
simulation_open_tool; %Reset do1;

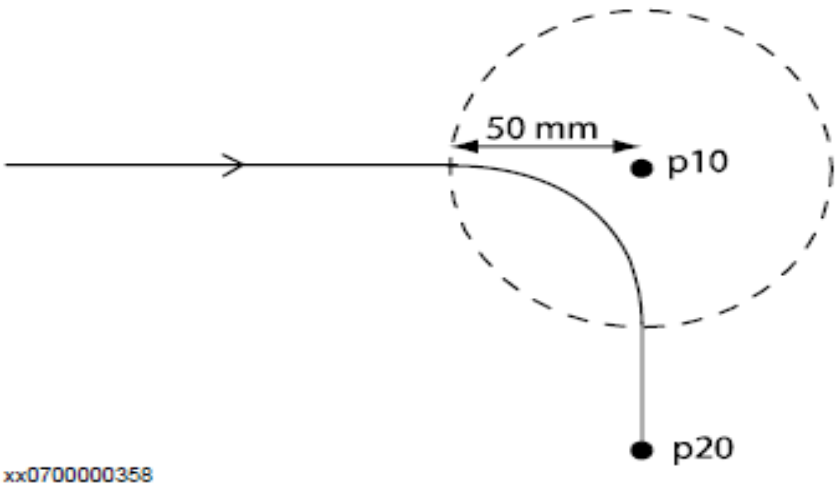
%spustanje alata do predmeta
MoveL(RT_grip, 'vmax' , 'fine' , TD_gripper, 'wobj0');

%zatvaranje alata i hvatanje predmeta
simulation_close_tool; %Set do1;
simulation_grip_piece;
```

Sl. 1.96 b) – Elementi programa

Naredba za kretanje označava se sa *„Move“*, dok oznake J (Joint), L (Line) i C(Circular) označavaju vrstu putanje, dok oznaka *'fine'* govori da će alat proći kroz zadanu ciljanu točku. Na slici 1.97 prikazan je primjer 'z50' koji pokazuje kako će doći do skretanja vrha alata na 50mm od zadane ciljane radne točke p_{10} . Putanja je bila linijska L s maksimalnom linearnom brzinom od 100, a vrsta alata određena je sa „tool10“.

```
MoveL p10, v1000, z50, tool0;
MoveL p20, v1000, fine, tool0;
```



Sl. 1.97 – Kretanje robota po zadanoj putanji (ibidem)

Primjer programa bio biljedeći (autor student Kunce)

```
function Kunce_Line_Robot
global robot TD_gripper RT_initial RT_approach1 RT_grip
RT_approach2 RT_release RT_toolset1 RT_approach3 RT_grip2
RT_approach4 RT_toolset2 RT_approach5 RT_release2 RT_approach6
RT_release3 RT_approach7 RT_initial_help

%Odabir robota i postavke okoline
robot = load_robot('ABB','IRB140');
robot.equipment{1}                                          =
load_robot('equipment','tables/table_two_areas');
robot.tool=
load_robot('equipment','end_tools/parallel_gripper_0');
robot.piece{1}=load_robot('equipment','cylinders/cylinder_tiny
');

%definiranje pocetne pozicije predmeta
robot.piece{1}.T0(1:3,4)=[-0.35 -0.35 0.2]';

%robot.tool.piece_gripped=0;
drawrobot3d(robot, robot.q);

%definiranje alata
TD_gripper=[1,[[0,0,0.125],[1,0,0,0]],[0.1,[0,0,0.100],[1,0,0,
0],0,0,0]];

%definiranje svih pozicija kao globalne varijable
RT_initial=[[0.4950, 0.0000, 0.3700],[0.0000, -0.0000, 1.0000,
-0.0000], [0, -1, 0, 0], [9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09]];
RT_approach1=[[-0.3500,   -0.3500,   0.3700],[0.0150,   0.9240,
0.3820,       0.0000],       [-2,       0,       -1,       0],
[9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09]];
RT_grip=[[-0.3500, -0.3500, 0.2750],[0.0150, 0.9240, 0.3820, -
0.0000], [-2, 0, -1, 0], [9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09]];
RT_approach2=[[-0.1000,   -0.5000,   0.3700],[0.0139,   0.7136,
0.7003,       -0.0056],       [-2,       0,       -1,       0],
[9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09]];
RT_release=[[-0.1000, -0.5000, 0.2750],[0.0140, 0.7140, 0.7000,
-0.0060],          [-2,          0,          -1,          0],
[9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09]];

RT_toolset1=[[-0.0496,   -0.4727,   0.5309],[0.1691,   0.7007,
0.1616,       -0.6741],       [-1,       -2,       1,       0],
[9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09]];
RT_approach3=[[-0.0500,   -0.4730,   0.2750],[0.1690,   0.7008,
0.1620,       -0.6738],       [-1,       -2,       1,       0],
[9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09]];
RT_grip2=[[-0.1000, -0.5000, 0.2750],[0.1690, 0.7008, 0.1620, -
0.6738], [-2, 0, -1, 1], [9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09]];
```

```
RT_approach4=[[-0.1000,   -0.5000,   0.4500],[0.1690,   0.7008,
0.1620,       -0.6738],       [-2,       -2,       1,       0],
[9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09]];
RT_toolset2=[[0.0927, -0.5625, 0.3411],[0.4395, 0.8960, 0.0345,
0.0525], [-1, 0, 1, 1], [9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09]];
RT_approach5=[[0.4530,   -0.4860,   0.3500],[0.0170,   0.9260,
0.3770,       0.0060],       [-1,       -1,       0,       0],
[9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09]];
RT_release2=[[0.4530, -0.4860, 0.2250],[0.0170, 0.9260, 0.3770,
0.0060], [-1, -1, 0, 0], [9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09]];

RT_approach6=[[-0.3500,  -0.3500,  0.5000],[0.0117,  0.7304,  -
0.0236,       -0.6825],       [-2,       0,       -1,       1],
[9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09]];
RT_release3=[[-0.3500,  -0.3500,  0.2750],[0.0120,  0.7300,  -
0.0240,       -0.6830],       [-2,       0,       -1,       1],
[9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09]];
RT_approach7=[[-0.3500,  -0.3500,  0.3750],[0.0120,  0.7300,  -
0.0240,       -0.6830],       [-2,       0,       -1,       1],
[9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09]];
RT_initial_help=[[-0.0024,  -0.5410,  0.4000],[0.0280,  0.7140,
0.6990,       -0.0060],       [-2,       0,       -1,       1],
[9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09]];
main
end

function main()

global TD_gripper RT_initial RT_approach1 RT_grip RT_approach2
RT_release  RT_toolset1  RT_approach3  RT_grip2  RT_approach4
RT_toolset2 RT_approach5 RT_release2 RT_approach6 RT_release3
RT_approach7 RT_initial_help
%pocetak simulacije s zatvorenim alatom
simulation_close_tool; %Set do1;

%pocetna tocka
MoveJ(RT_initial, 'vmax' , 'fine' , TD_gripper, 'wobj0');

%prilaz iznad predmeta
MoveL(RT_approach1, 'vmax' , 'fine' , TD_gripper, 'wobj0');

%otvaranje alata
simulation_open_tool; %Reset do1;

%spustanje alata do predmeta
MoveL(RT_grip, 'vmax' , 'fine' , TD_gripper, 'wobj0');

%zatvaranje alata i hvatanje predmeta
simulation_close_tool; %Set do1;
simulation_grip_piece;
```

```
%prilazna tocka 1,
MoveL(RT_approach1, 'vmax' , 'fine' , TD_gripper, 'wobj0');

%prilazna tocka 2
MoveJ(RT_approach2, 'vmax' , 'fine' , TD_gripper, 'wobj0');

%predmet u okruglom spremniku
MoveL(RT_release, 'vmax' , 'fine' , TD_gripper, 'wobj0');

%otvaranje alat i otpustanje predmeta
simulation_open_tool; %Reset do1;
simulation_release_piece; %Reset do1;

%odmicanje
MoveL(RT_approach2, 'vmax' , 'fine' , TD_gripper, 'wobj0');

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%

%druga radnja, pocetna tocka je RT_approach2, namjestanje alata
MoveL(RT_toolset1, 'vmax' , 'fine' , TD_gripper, 'wobj0');

%spustanje na visinu predmeta
MoveL(RT_approach3, 'vmax' , 'fine' , TD_gripper, 'wobj0');

%položaj hvatanja predmeta
MoveL(RT_grip2, 'vmax' , 'fine' , TD_gripper, 'wobj0');
simulation_close_tool; %Reset do1;
simulation_grip_piece; %Reset do1;

%podizanje predmeta
MoveL(RT_approach4, 'vmax' , 'fine' , TD_gripper, 'wobj0');

%rotacija alata
MoveL(RT_toolset2, 'vmax' , 'fine' , TD_gripper, 'wobj0');

%prilaz
MoveL(RT_approach5, 'vmax' , 'fine' , TD_gripper, 'wobj0');

MoveL(RT_release2, 'vmax' , 'fine' , TD_gripper, 'wobj0');

%otvaranje alat i otpustanje predmeta
simulation_open_tool; %Reset do1;
simulation_release_piece; %Reset do1;

%odmicanje
MoveL(RT_approach5, 'vmax' , 'fine' , TD_gripper, 'wobj0');

%ponovno hvatanje predmeta
```

```
MoveL(RT_release2, 'vmax' , 'fine' , TD_gripper, 'wobj0');
simulation_close_tool; %Reset do1;
simulation_grip_piece; %Reset do1;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%

%odmicanje
MoveL(RT_approach5, 'vmax' , 'fine' , TD_gripper, 'wobj0');

%povratak predmeta
MoveL(RT_approach6, 'vmax' , 'fine' , TD_gripper, 'wobj0');

%otpustanje predmeta
MoveL(RT_release3, 'vmax' , 'fine' , TD_gripper, 'wobj0');
simulation_open_tool; %Reset do1;
simulation_release_piece; %Reset do1;

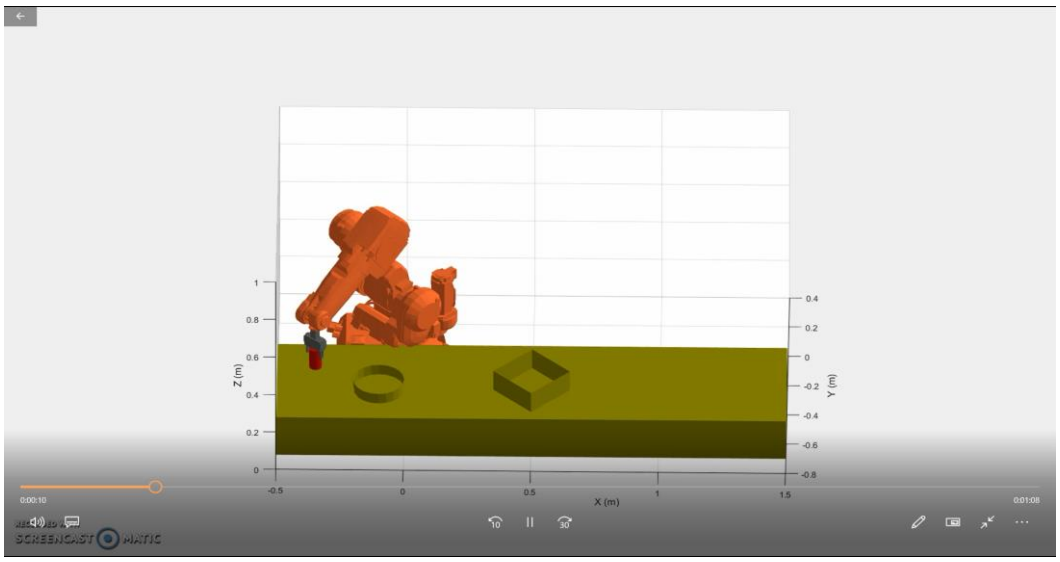
%odmicanje
MoveL(RT_approach7, 'vmax' , 'fine' , TD_gripper, 'wobj0');

%pomocna rotacija
MoveL(RT_initial_help, 'vmax' , 'fine' , TD_gripper, 'wobj0');

%pocetna tocka
MoveL(RT_initial, 'vmax' , 'fine' , TD_gripper, 'wobj0');

end
```

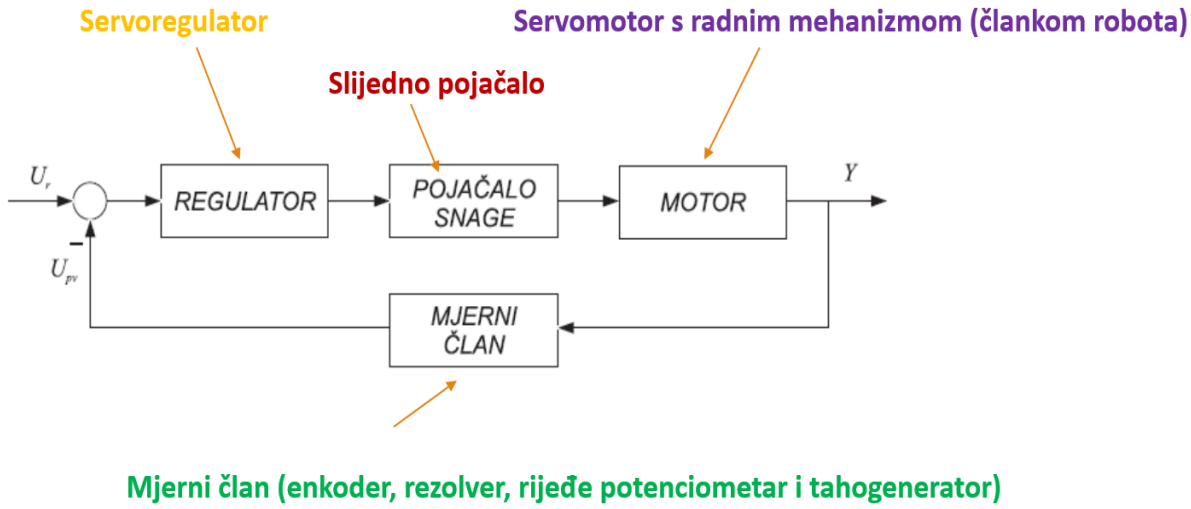
Na video materijalu prikazana je realizacija programske rutine, a isti je sastavni dio ovog udžbenika (v. slika 1.98)



Slika 1.98 – Video materijal

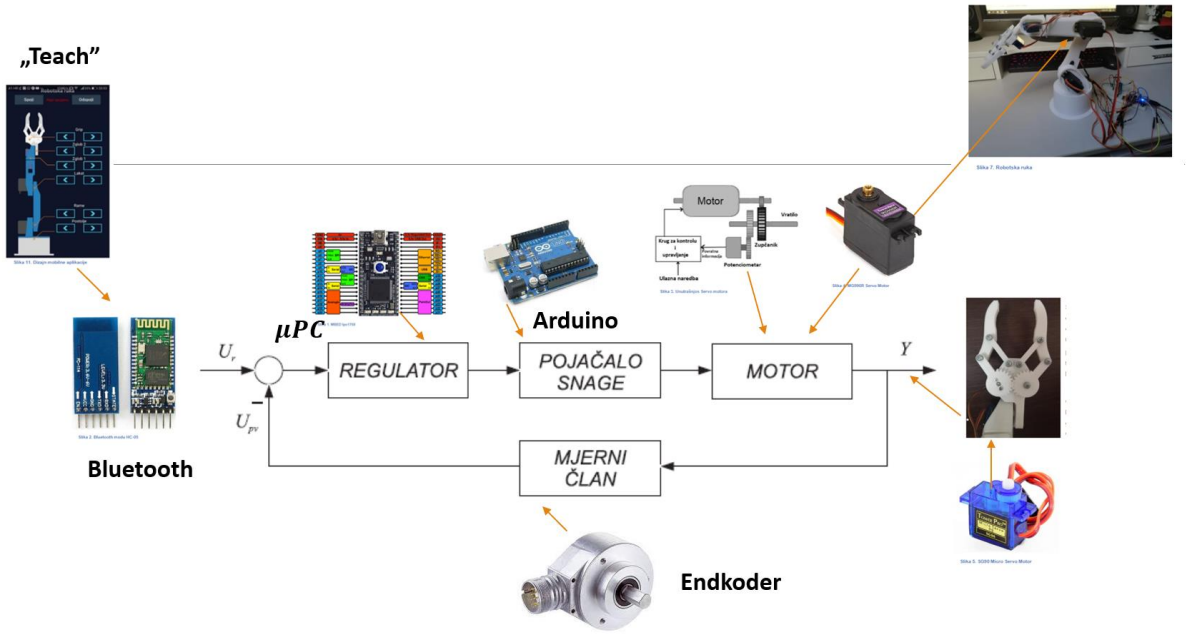
9. POGON ROBOTA

Gibanje robota u operacijskom prostoru postiže se pomoću pogona. Izbor pogona ovisi o konfiguraciji robota i njegovim dinamičkim svojstvima, a u općem slučaju na slici 1.99 prikazan je blokovski prikaz pogona zgloba robota s elementima pogona.



Sl. 1.99 – Blokovski prikaza pogona zgloba robota s elementima pogona

Na slici 1.100 prikazani su konkretni elementi pogona zgloba robota u regulacijskom krugu na primjeru troosnog robota.



Sl. 1.100 – Elementi pogona robota u regulacijskom krugu (Završni rad, TVZ)

Kao što j eprikazano na slikama 1.99 i 1.100 pogon robota sastoji se od slijednog regulatora (položaj, brzina vrtnje, zakretni moment, sila dodira i sl.), pojačala snage, aktuatora (izvršnog

elementa) i mjernog člana koji može biti analognog karaktera (potenciometar, tahogenerator i sl.) ili diskretnog karaktera (apolutni i inkrementalni davač impulasa – endkoder). Aktuator (izvršni element) je motor koji je izveden sa pneumatskim, hidrauličkim, ili električnim pogonom. Na slici 1.101 prikazane su temeljne značajke pneumatskih i hidrauličkih pogona u robotici.

Pneumatski pogoni

- ugrađuju u translacijski zglob
- primjenjuju se kada postoji mogućnost eksplozije
- zahtijevaju stalno održavanja
- pod djelovanjem tereta ne drže položaj (razlog je u tlačivost zraka),
- razmjerno su male snage

Hidraulički pogoni

- ugrađuju se u translacijski zglob
- velike su snage (manipulacija s težim predmetima)
- brzi su (brzina vrha alata oko 1m/s)
- zahtjevaju stalno održavanje
- prisutni su problemi s brtvljenjem (curenjem ulja)
- javlja se buka (ponekad i vrlo jaka)

Sl. 1.101 – Temeljne značajke pneumatskih i hidrauličkih pogona u robotici

Pozornost će se u nastavku usmjeriti na elektromotorne pogone u robotici.

9.1 Elektromotorni pogoni u robotici

Elektromotorni pogoni u robotici su slijedni sustavi koji ostvaruju mehaničko gibanje u reguliranom sustavu s negativnom povratnom vezom. Imaju relativno nisku cijenu, veliku brzinu odziva na pobudu, visoku točnost i mogu se primjeniti složeniji algoritmi upravljanja. No jednako tako imaju i određenih nedostataka u koje treba ubrojiti neželjene učinke pri prijenosu snage koji nastaju zbog djelovanja zazora među zupčanicima kao i ograničenja snage pri teškim teretima kada prednost imaju snažniji hidraulički pogoni. Kao elektromotorni pogoni u robotici koriste se sljedeći električni motori:

- Istosmjerni motor s permanentnim magnetima,
- Sinhroni motor s permanentnim magnetima,
- Inducijski asinkroni motor, i
- Koračni motor

Jednako tako razvijeni su i specijalni električni motori koji imaju bolje dinamičke karatkteristike i veći koeficijent iskoristivosti u odnosu na klasične električne motore. U nastavku će se pobliže objasniti značajke istosmjernog i sinkronog motora s permenentnim magnetima kao elektromotornog reguliranog pogona u robotici.

9.1.1 Istosmjerni motor s permanentnim magnetima

Istosmjerni motori s permanentnim magnetima pogodni su za pogon robota manjih i srednjih veličina, omogućavaju kvalitetnu regulaciju električnog momenta M_{el} i kutne brzine okretanja zglobova ω.

Električni moment M_{el} istosmjernog motora (DC motor) proporcionalan je mehaničkoj konstanti motora k_m, magnetskom toku statora Φ i struji armature rotora I_a te se može napisati sljedeća relacija.

$$M_{el} = k_m \cdot \Phi \cdot I_a$$

gdje je:

$$k_m = \frac{p \cdot z}{2\pi \cdot a}$$

odnosno:

p – broj pari polova statora

z – broj pari vodiča rotora

a – broj pari pararelnih grana rotora

Kako motor ima u statoru permanentne magnete tada je magnetski tok konstantan i nepromjenljiv relacija:

$$k = k_m \cdot \Phi$$

Gdje je: k – konstanta motora

Tada vrijedi da je električni moment jednak:

$$M_{el} = k \cdot I_a$$

Mehanički moment motora M_{meh} proporcionalan je momentima određenima jednadžbom kretanja robota. Za slučaj troosnog robota vrijedi:

$$\boldsymbol{M_{meh}} = \boldsymbol{M}(\ddot{\boldsymbol{q}}, \dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q}) = \boldsymbol{M_{inercije}}(\boldsymbol{q}) \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \boldsymbol{M_{cor}}(\boldsymbol{q}) \cdot \dot{\varphi}_1 \cdot \dot{\varphi}_2 + \boldsymbol{M_{cp}}(\boldsymbol{q}) \cdot \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1^2 \\ \dot{\varphi}_2^2 \end{bmatrix} + \boldsymbol{M_q}(\boldsymbol{q}) \cdot g$$

Dinamička komponenta

Statička komponenta

Stoga vrijedi:

$$\boldsymbol{M_{meh}} = \boldsymbol{M_{din}} + \boldsymbol{M_{sta}}$$

U slučaju da trenje nije zanemarivo, vrijedit će:

$$\boldsymbol{M_{meh}} = \boldsymbol{M_{din}} + \boldsymbol{M_{sta}} + \boldsymbol{M_{trenja}}$$

Slijedom zakona o očuvanju energije vrijedi jednadžba ravnoteže momenata stroja koja glasi:

$$M_{el}(t) = M_{meh}(t)$$

Ako je $M_{el}(t) = M_{meh}(t)$ tada je motor u stacionarnom stanju i zglob robota se okreće konstantnom brzinom, pri ćemu je $M_{din}(t) = 0$. Za razliku od toga ako je $M_{el}(t) > M_{meh}(t)$ tada motor ubrzava, a ako je $M_{el}(t) < M_{meh}(t)$ motor usporava, i motor se u oba slučaja nalazi u prijelaznoj pojavi. Prijelazna pojava motora opisuje se njegovom dinamičkom karakteristikom koja se naziva prijezna funkcija (engl. *Transient Response*).

Kako je prethodno navedeno mehanički moment motora sastoji se od statičke i dinamičke komponente. No, ako trenje nije zanemarivo tada se statički moment može povećati zbog trenja u reduktoru motora, pužnih vijaka i ostalih prijenosnih mehanizama M_{tr}. Jednako tako mogu se javiti i neki vanjski momenti koji doprinose momentu opterećenja odnosno čine moment tereta robotskog zgloba M_t. Stoga se može pisati:

$$M_{meh} = M_{din} + M_{opt} = M_{din} + M_{sta} + M_{tr} + M_t$$

Statička komponeta mehaničkog momenta javlja se u zglobu robota kao posljedica djelovanja sile teže i proporcionalna je okomitoj komponenti sile teže, dok se dinamička komponeta mehaničkog momenta javlja uslijed inercije koja je proporcionalna ubrzanju, Coriolisovog momenta koji je proporcionalan produktu kutnih brzina dvaju zglobova i centripetalnog momenta koji je proporcionalan kvadratu kutne brzine zglobova, a nastaje uslijed rotacije članaka oko jedne točke. Polazeći od prije navedenoga za troosni robot vrijedile bi na temelju jednadžbe kretanja robota bez trenja i tereta:

$$\boldsymbol{M}(\ddot{\boldsymbol{\varphi}}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}, \boldsymbol{\varphi}) = \begin{bmatrix} 0{,}4757 + 0{,}175 \cdot cos\,\varphi_2 & 0{,}025 + 0{,}0875 \cdot cos\,\varphi_2 \\ 0{,}025 + 0{,}0875 \cdot cos\,\varphi_2 & 0{,}025 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} -0{,}175 \cdot sin\,\varphi_2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 + \begin{bmatrix} 0 & -0.0875 \cdot sin\,\varphi_2 \\ 0{,}0875 \cdot sin\,\varphi_2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} -(1{,}725 \cdot sin\varphi_1 + 0{,}25 \cdot sin(\varphi_1 + \varphi_2) \\ -0{,}25 \cdot sin(\varphi_1 + \varphi_2) \end{bmatrix} \cdot 9{,}81$$

Sljedeće jednadžbe mehaničkih momenata:

$$M_{meh_1}(t) = J_{u_1} \cdot \dot{\omega}_1(t) + J_{c_1} \cdot \dot{\omega}_2(t) + C_1 \cdot \omega_2(t) \cdot \omega_1(t) + D_1 \cdot \omega_2^2(t) + M_{g_1}$$

Gdje je:

$$J_{u_1} = J_{m_1} + M_{iner_1} = J_{m_1} + 0{,}4757 + 0{,}175 \cdot cos\,\varphi_2$$

$$J_{c_1} = 0{,}025 + 0{,}0875 \cdot cos\,\varphi_2$$

$$C_1 = -0{,}175 \cdot sin\,\varphi_2$$

$$D_1 = -0.0875 \cdot sin\,\varphi_2$$

$$M_{g_1} = -[1{,}725 \cdot sin\varphi_1 + 0{,}25 \cdot sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \cdot 9{,}81$$

$$M_{meh_2}(t) = J_{u_2} \cdot \dot{\omega}_2(t) + J_{c_2} \cdot \dot{\omega}_1(t) + D_2 \cdot \omega_1^2(t) + M_{g_2}$$

Gdje je:

$$J_{u_2} = J_{m_2} + M_{iner_2} = J_{m_2} + 0{,}025$$

$$J_{c_2} = 0{,}025 + 0{,}0875 \cdot cos\,\varphi_2$$

$$C_2 = 0$$

$$D_2 = 0.0875 \cdot sin\,\varphi_2$$

$$M_{g_2} = -0{,}25 \cdot sin(\varphi_1 + \varphi_2) \cdot 9{,}81$$

Pri čemu je:

J_{u_i} – ukupni moment inercije motora s *i*-tim člankom robota

J_{m_i} – moment inercije *i* -tog električnog motora

J_{c_i} – međuzglobni moment inercije

$M_{cor} = C_1 \cdot \omega_2 \cdot \omega_1$ – moment djelovanja Coriolisove sile

$M_{cp_1} = D_1 \cdot \omega_2^2$ i $M_{cp_2} = D_2 \cdot \omega_1^2$ – momenti djelovanja centripetalne sile

M_{g_1} i M_{g_2} – momenti gravitacije

Jednadžba mehaničkog momenata M_{meh_1} može se napisati u sljedećem obliku:

$$M_{meh_1}(t) - M_{s_1}(t) = J_{u_1} \cdot \dot{\omega}_1(t) + B_1(t) \cdot \omega_1(t)$$

Gdje je:

$$M_{s_1}(t) = J_{c_1} \cdot \dot{\omega}_2(t) + D_1 \cdot \omega_2^2(t) + M_{g_1}$$

$$J_{u_1} = J_{m_1} + 0{,}4757 + 0{,}175 \cdot cos\,\varphi_2$$

$$B_1(t) = C_1 \cdot \omega_2(t) = -0{,}175 \cdot sin\,\varphi_2 \cdot \omega_2(t)$$

Pri čemu je:

$$J_{c_1} = 0{,}025 + 0{,}0875 \cdot cos\,\varphi_2$$

$$D_1 = -0.0875 \cdot sin\,\varphi_2$$

$$M_{g_1} = -[1{,}725 \cdot sin\varphi_1 + 0{,}25 \cdot sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \cdot 9{,}81$$

Laplasova transformacija bila bi:

$$G_1(s) = \frac{\Omega_1(s)}{M_{meh_1}(s) - M_{s_1}(s)} = \frac{1}{J_{u_1} \cdot s + B_1(s)}$$

Jednadžba mehaničkog momenata M_{meh_2} može se napisati u sljedećem obliku:

$$M_{meh_2}(t) - M_{s_2}(t) = J_{u_2} \cdot \dot{\omega}_2(\mathrm{t})$$

Gdje je:

$$M_{s_2}(t) = J_{c_2} \cdot \dot{\omega}_1(t) + D_2 \cdot \omega_1^2(t) + M_{g_2}$$

$$J_{u_2} = J_{m_2} + 0{,}025$$

Pri čemu je:

$$J_{c_2} = 0{,}025 + 0{,}0875 \cdot cos\,\varphi_2$$

$$C_2 = 0$$

$$D_2 = 0.0875 \cdot sin\,\varphi_2$$

$$M_{g_2} = -0{,}25 \cdot sin(\varphi_1 + \varphi_2) \cdot 9{,}81$$

Laplasova transformacija bila bi:

$$G_2(s) = \frac{\Omega_2(s)}{M_{meh_2}(s) - M_{s_2}(s)} = \frac{1}{J_{u_2} \cdot s}$$

U konkretnom slučaju može se zanemariti utjecaj Coriolisove i centripetalne sile i tada momenti glase:

$$M_{meh_1}(t) \cong J_{u_1} \cdot \dot{\omega}_1(t) + M_{g_1}$$

$$M_{meh_2}(t) \cong J_{u_2} \cdot \dot{\omega}_2(t) + M_{g_2}$$

Tada vrijedi:

$$G_1(s) = \frac{\Omega_1(s)}{M_{meh_1}(s) - M_{g_1}} = \frac{1}{J_{u_1} \cdot s}$$

$$G_2(s) = \frac{\Omega_2(s)}{M_{meh_2}(s) - M_{g_2}} = \frac{1}{J_{u_2} \cdot s}$$

Električni moment motora M_{el} određuje se na temelju jednadžbi električne ravnoteže i vrijedi:

$$R_a \cdot I(t) + \dot{I}(t) \cdot L_a = U_m(t) - EMS(t)$$

$$EMS(t) = k \cdot \omega(t)$$

$$M_{el}(t) = k \cdot I(t)$$

Gdje je:

R_a – otpor aramature rotora motora

$I(t)$ – struja motora

L_a – induktivitet armature rotora

$U_m(t)$ – napon motora

k – konstanta motora

$EMS(t)$ - elektromotorna sila

$\omega(t)$ – kutna brzina motora

Slijedom prije napisanog vrijedi Laplasova transformacija:

$$R_a \cdot I(s) + s \cdot I(s) \cdot L_a = U_m(s) - EMS(s)$$

$$EMS(s) = k \cdot \Omega(s)$$

$$M_{el}(s) = k \cdot I(s)$$

Odnosno vrijedi:

$$G(s) = \frac{I(s)}{U_m(s) - k \cdot \Omega(s)} = \frac{1}{s \cdot L_a + R_a} = \frac{k_a}{s \cdot T_a + 1}$$

Gdje je:

$k_a = \frac{1}{R_a}$ - koeficijent pojačanja armaturnog kruga

$T_a = \frac{L_a}{R_a}$ – vremenska konstanta armaturnog kruga

Uzimajući u obzir prethodno napisano prijenosna funkcija elektromotora $G_m(s)$ bila bi:

$$G_m(s) = \frac{k_m}{T_m \cdot T_a \cdot s^2 + T_m \cdot s + 1}$$

Gdje je:

$k_m = \frac{1}{k}$ – pojačanje motora

$T_m = \frac{J_{u_i} \cdot R_a}{k^2}$ – mehanička vremenska konstanta motora

Kako bi se ostvario potreban moment tj. kako bi vrijedilo $M_{el}(t) = M_{meh}(t)$ u svakom zglobu robota i time svaladali svi pojedini momenti prethodno opisani (na automatski način) koristi se strujno pojačalo kao ekvivalent regulacijskoj petlji struje i proporcionalno – derivantni regulator. Prijenosna funkcija strujnog pojačala bila bi:

$$G_{poj}(s) = \frac{k_{poj}}{1 + s \cdot T_{poj}}$$

Gdje je:

k_{poj} – koeficijent pojačnja pojačala

T_{poj} – vremenska konstanta pojačala

Prijenosna funkcija idealnog PD regulatora bila bi:

$$G_{PD}(s) = K_p + K_d \cdot s = K_p \cdot (1 + \frac{K_d}{K_p} \cdot s)$$

Prijenosna funkcija realnog PD regulatora bila bi:

$$G_{PD}(s) = K_p + \frac{K_d \cdot s}{T_f \cdot s + 1} = K_p + K_d \cdot \frac{N}{1 + N \cdot \frac{1}{s}}$$

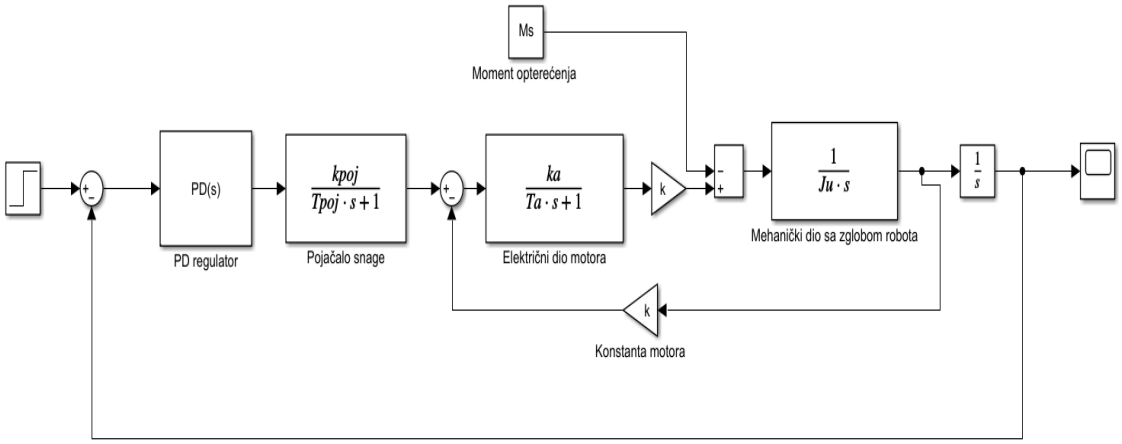
Gdje su:

K_p i K_d – koeficijenti regulatora

$T_f = \frac{1}{N}$ – kratka vremenska konstanta

$N \geq 50$

Na slici 1.101 prikazana je blokovska shema regulacijskog kruga upravljanja momentom zgloba robota.



Sl. 1.101 Blok shema regulacijskog kruga upravljanja momentom zgloba robota

Prijenosna funkcija otvorenog kruga $G_0(s)$ bila bi prema slici 1.101 jednaka:

$$G_0(s) = G_{PD}(s) \cdot G_{poj}(s) \cdot G_m(s) \cdot \frac{1}{s}$$

Prijenosna funkcija zatvorenog kruga $T(s)$ bila bi:

$$T(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)}$$

U određivanju parametara PD regulatora uobičajeno se koriste kriteriji robusne regulacije u otvorenom krugu koji se odnose na vrijednosti amplitudnog $L_{A.O.} = -G_m$ i faznog $\varphi_{F.O.} = P_m$ osiguranja, a trebali bi biti u sljedećim intervalima:

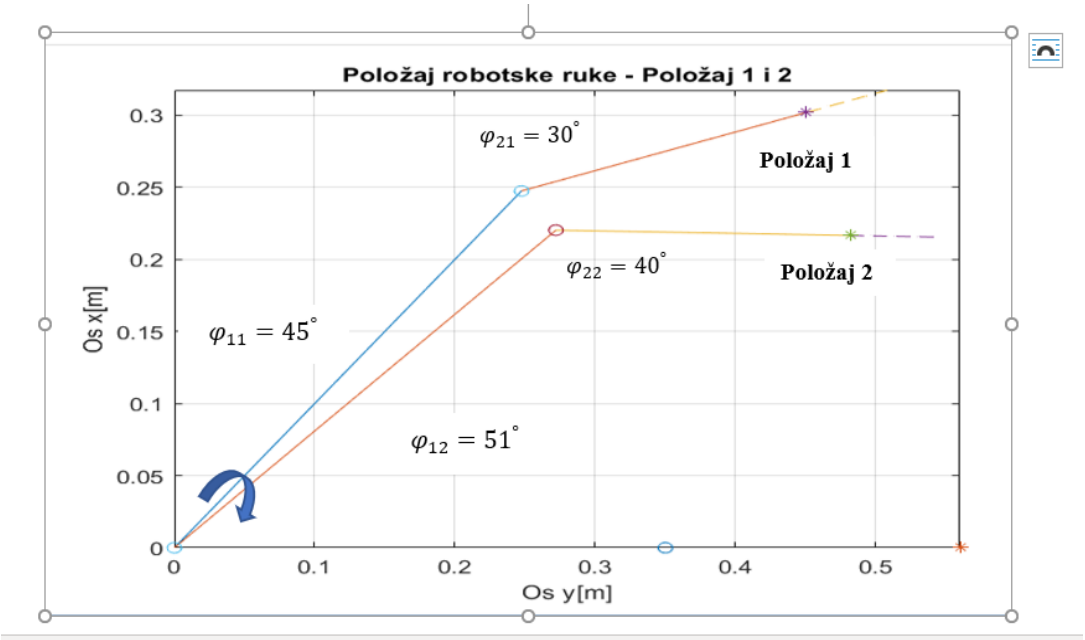
$$6dB \leq G_m \leq 20\ dB$$

$$30^\circ \leq P_m \leq 60^\circ$$

Prilikom korištenja MatLaba u proračunu pramaetra regulatora uobičajeno se koristi algoritam pri kojem je fazno osiguranje jednako $\varphi_{F.O.} = P_m = 60^\circ$, dok se amplitudno osiguranje određuje u prije definiranom intervalu. Za izračun parametara PDF regulatora koristit će se MatLab naredbe *pidtune* i *pidTuner*.

Primjer br. 8

Zadan je troosni robot u položajima prikazanim na slici 1.102 čiji se zglobovi rotiraju pomoću istosmjernog motora.



Sl. 1.102 – Položaj članaka troosnog robota

Zadani su sljedeći parametri pojačala snage i istosmjernog elektromotora:

a) Pojačalo snage

$k_{poj} = 0.2$ – koeficijent pojačanja

$T_{poj} = 10ms$ – vremenska konstanta

b) Istosmjerni elektromotor

$k = 1{,}1$ – konstanta motora

$T_a = 25ms$ – električna konstanta motora

$R_a = 0{,}55\Omega$ – otpor aramture

$J_m = 0{,}15\ kgm^2$ – moment inercije motora

Potrebno je odrediti parametre PDF regulatora:

$$G_{PDF}(s) = K_p + \frac{K_d \cdot s}{T_f \cdot s + 1}$$

na temelju kriterija robusne regulacije i nacrtati dijagram prijenosne funkcije zatvorenog kruga:

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{T(s)}{s}\right\}$$

Zadan je položaj 1. robotske ruke.

Prvi korak u rješavanju zadatka je određivanje ukupnog momenta inercije polazeći od prethodno definiranih relacija. Vrijednosti iznose

$$J_{u_1} = J_m + 0{,}4757 + 0{,}175 \cdot cos\,\varphi_2 = 0{,}15 + 0{,}4757 + 0{,}175 \cdot cos\,45^\circ = 0{,}7773\ kgm^2$$

$$J_{u_2} = J_m + 0{,}025 = 0{,}15 + 0{,}025 = 0{,}175\ kgm^2$$

Mehanička vremenska konstanta pojedinog istosmjernog motora sada iznosi:

$$T_{m_1} = \frac{J_{u_1} \cdot R_a}{k^2} = \frac{0{,}7773 \cdot 0{,}55}{1{,}1^2} = 0{,}3533sek$$

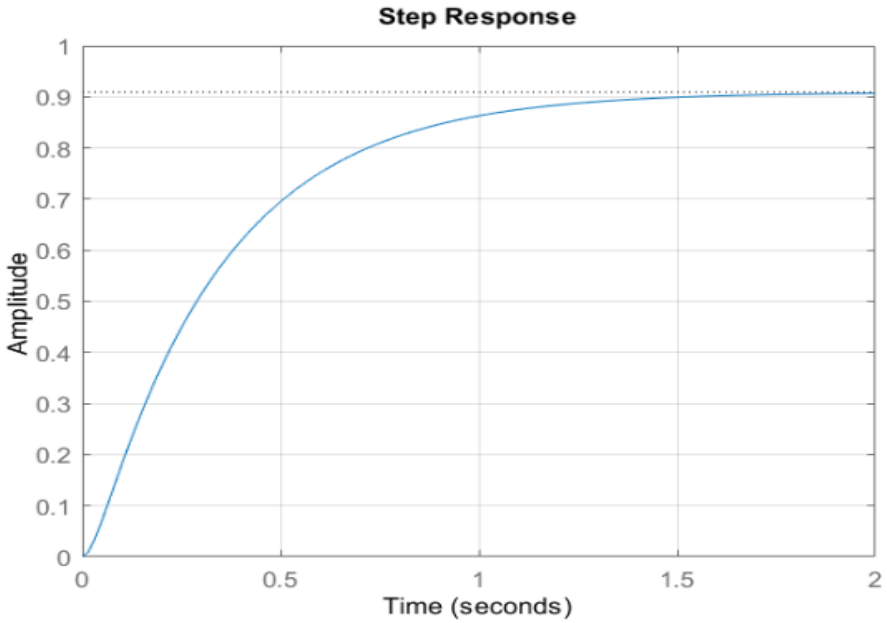
$$T_{m_2} = \frac{J_{u_2} \cdot R_a}{k^2} = \frac{0{,}175 \cdot 0{,}55}{1{,}1^2} = 0{,}0795sek$$

Prijenosna funcija istosmjernog motora prvog zgloba glasi:

$$G_{m_1}(s) = \frac{k_m}{T_{m_1} \cdot T_a \cdot s^2 + T_{m_1} \cdot s + 1} = \frac{\frac{1}{1{,}1}}{0{,}3533 \cdot 0{,}025 \cdot s^2 + 0{,}3533 \cdot s + 1}$$

$$= \frac{102{,}93}{(s + 3{,}065) \cdot (s + 36{,}93)}$$

Prijelazna karakteristika je monotonog oblika i prikazana je na slici 1.103.



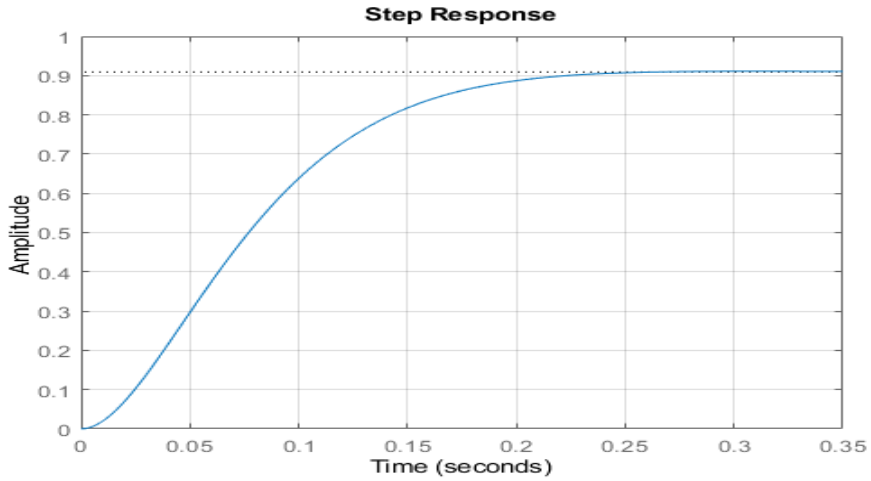
Sl. 1.103 – Prijelazna karakteristika istosmjernog motora prvog zgloba

Prijenosna funkcija istosmjernog motora drugog zgloba glasi:

$$G_{m_2}(s) = \frac{k_m}{T_{m_2} \cdot T_a \cdot s^2 + T_{m_2} \cdot s + 1} = \frac{\frac{1}{1{,}1}}{0{,}0795 \cdot 0{,}025 \cdot s^2 + 0{,}0795 \cdot s + 1}$$

$$= \frac{457{,}14}{s^2 + 40 \cdot s + 502{,}9}$$

Na slici 1.104 prikazana je prijelazna karakteristika istosmjernog motora drugog zgloba.



Sl. 1.104 - Prijelazna karakteristika istosmjernog motora drugog zgloba

Prvi zglob

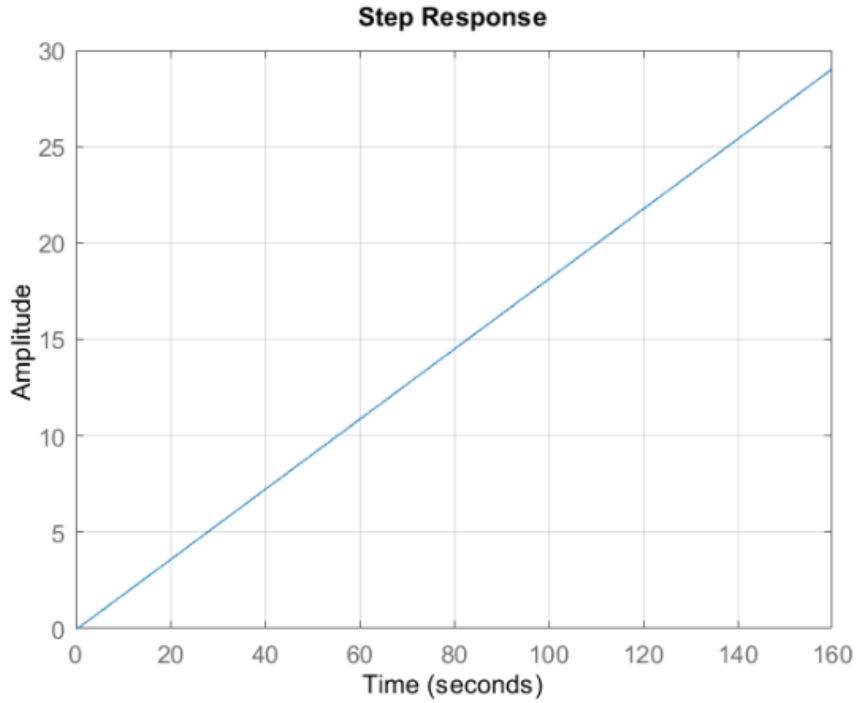
Prijenosna funkcija otvorenog kruga $G_{0_1}(s)$ bez regulatora za slučaj prvog zgloba je sljedeća:

$$G_{0_1}(s) = G_{poj}(s) \cdot G_{m_1}(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{0.2}{1 + 0.01 \cdot s} \cdot \frac{102{,}93}{(s + 3{,}065) \cdot (s + 36{,}93)} \cdot \frac{1}{s}$$

U nastavku je prikazana rutina kojom se određuje prijenosna funkcija $G_{0_1}(s)$

```
'Zadani kutevi'
fi11=45*pi/180;
fi21=30*pi/180;
'Parametri pojačala'
kpoj=0.2
Tpoj=0.01
'Pramateri motora'
k=1.1
Ta=0.025
Jm=0.15
Ra=0.55
ka=1/Ra
'Ukupni moment inercije motora i zgloba'
Ju=Jm+0.4757+0.175*cos(fi21)
'Prijenosna funkcija motora'
Tm=Ju*Ra/k^2
Gm=tf(1/k,[Tm*Ta Tm 1])
Gm=zpk(Gm)
step(Gm)
grid
'Prijenosna funkcija pojačala'
Gp=tf(kpoj,[Tpoj 1])
'Integralni član'
Gs=tf(1,[1 0])
'Prijenosna funkcija otvorenog kruga bez regulatora'
G01=Gp*Gm*Gs
step(G01)
grid
```

Prijelazna karakteristika prijenosne funkcije $G_{0_1}(s)$ prikazana je na slici 1.105.



Sl. 1.105 – Prijelazna karakteristika prijenosne funkcije $G_{0_1}(s)$

U cilju određivanja parametara PDF regulatora koristi se sljedeća naredba:

```
'PDF regulator'
C=pidtune(G01,'PDF')
```

Rezultat je sljedeći:

```
C =

                 s
Kp + Kd * --------
           Tf*s+1

with Kp = 41.8, Kd = 8.41, Tf = 0.0016
```

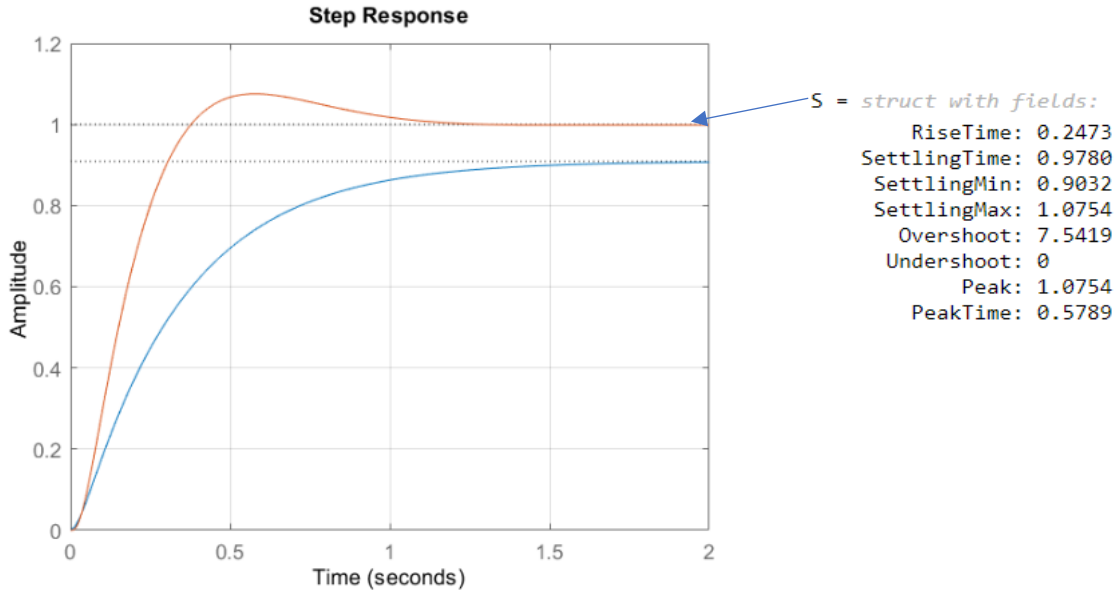
U cilju određivanje prijenosne funkcija zatvorenog kruga s regulatorom $T(s)$ i parametara prijelazne karakteristike dodaju se sljedeće naredbe:

```
'Prijenosna funkcija zatvorenog kruga'
T=feedback(C*G01,1)
step(Gm,T)
grid
S=stepinfo(T)
```

Kako bi se utvrdilo jesu li ostavreni kriteriji robusne regulacije regulacije potrebno je nacrtati Bodeov dijagram i odrediti amplitudnu i faznu pričuvu. U tom sklopu dodaju se sljede naredbe:

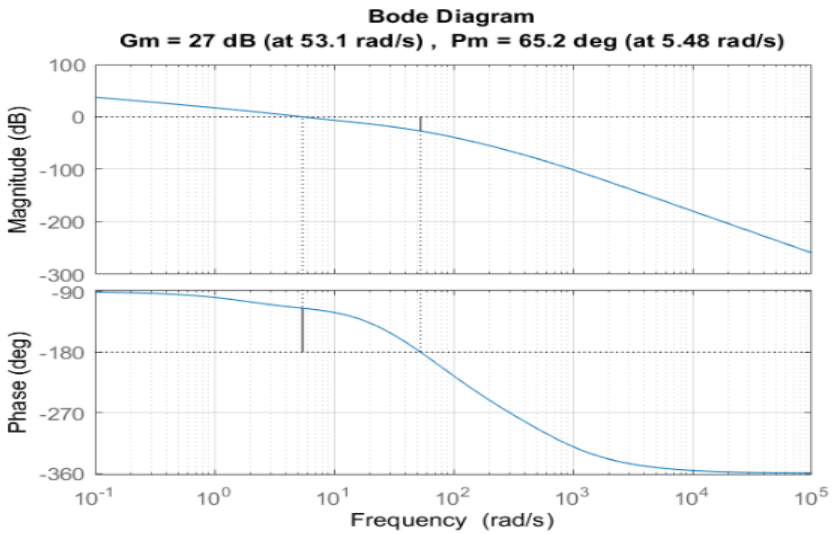
```
'Bodeov dijagram otvorenog kruga s regulatorom'
margin(C*G01)
grid
```

Prijelazna karakteristika zatvorenog kruga s regulatorom i prijelazna karakteristika istosmjernog motora (usporedne prijelazne karakteristike) prikazane su na slici 1.106.



Sl. 1.106 – Usporedne prijelazne karakteristike zatvorenog kruga i motora

Regulirani odziv prijenosne funkcije je aperiodski s nadvišenjem od 7,542% i vremenom smirivanja signala od 0,978 sek. Na slici 1.107 prikazan je Bodeov dijagram s podacima o amplitudnoj i faznoj pričuvi.

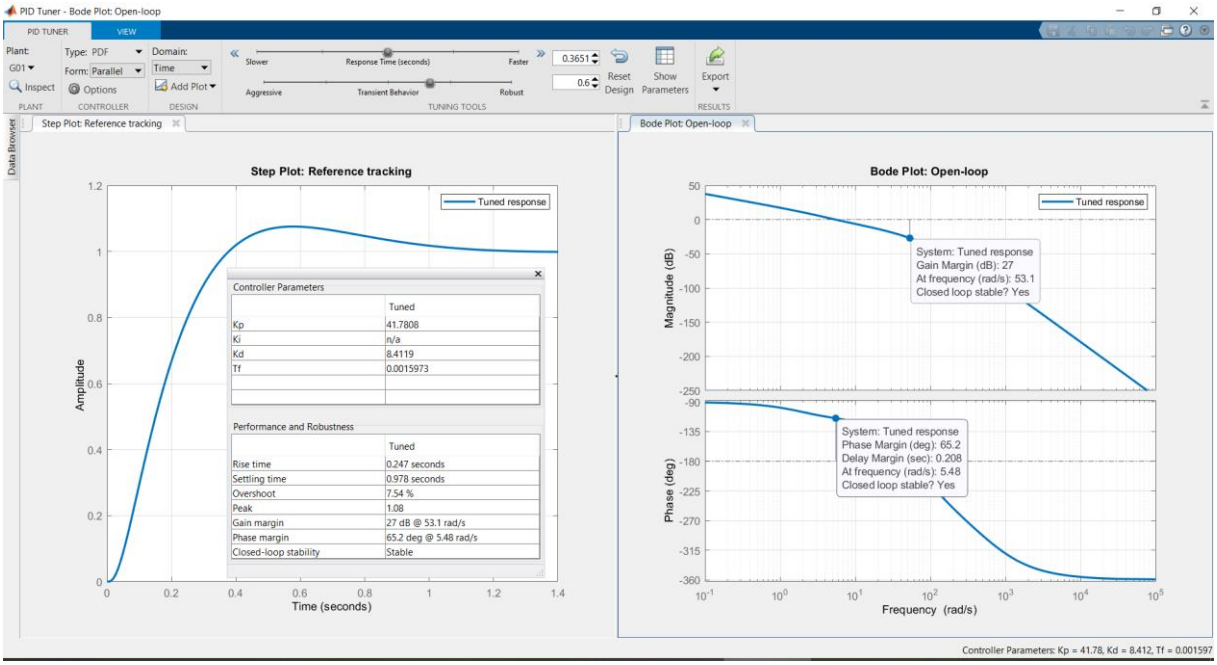


Sl. 1.107 – Bodeov dijagram otvorenog kruga s PDF regulatorom

Ostvareni su sljedeći parametri $\varphi_{F.O.} = P_m = 65{,}2^{\circ}$ i $L_{A.O.} = -G_m = -27dB$. Isti se rezultati mogu postići i pomoću naredbe:

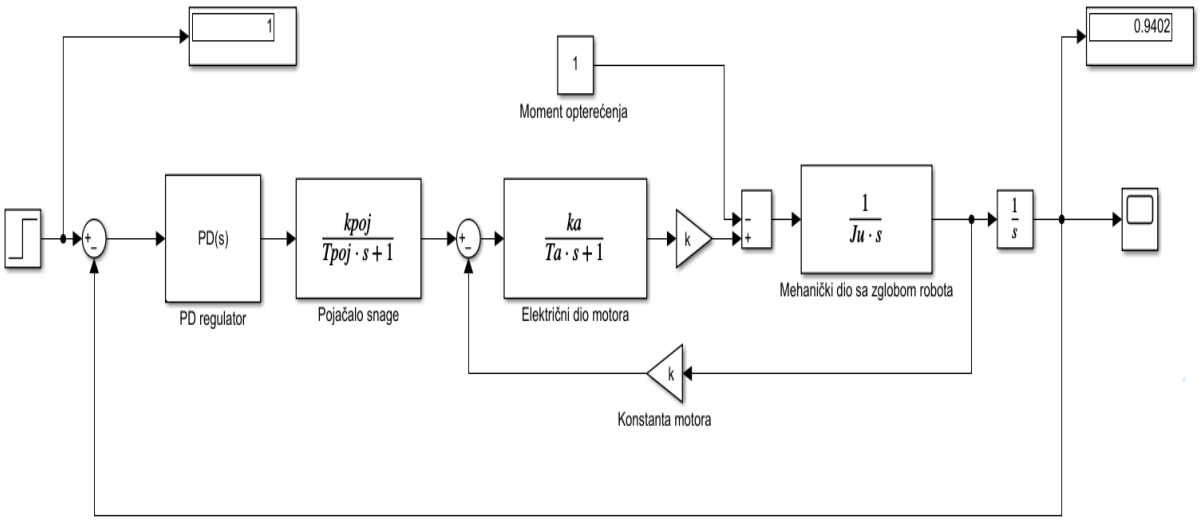
```
'PDF regulator'
C=pidTuner(G01,'PDF')
```

Na slici 1.108 prikazani su rezultati sinteze regulacije na temelju kriterija robusne regulacije. Prikazani su parametri regulatora, prijelazna karakteristika zatvorenog reguliranog kruga i Bodeov dijagram otvorenog kruga s regulatorom PDF.



Sl. 1.108 – Rezultati sinteze PDF regulatora

Na slici 1.109 prikazan je simulacijski model u Simulinku na step pobudu i jedinično opterećenje (moment opterećenja).

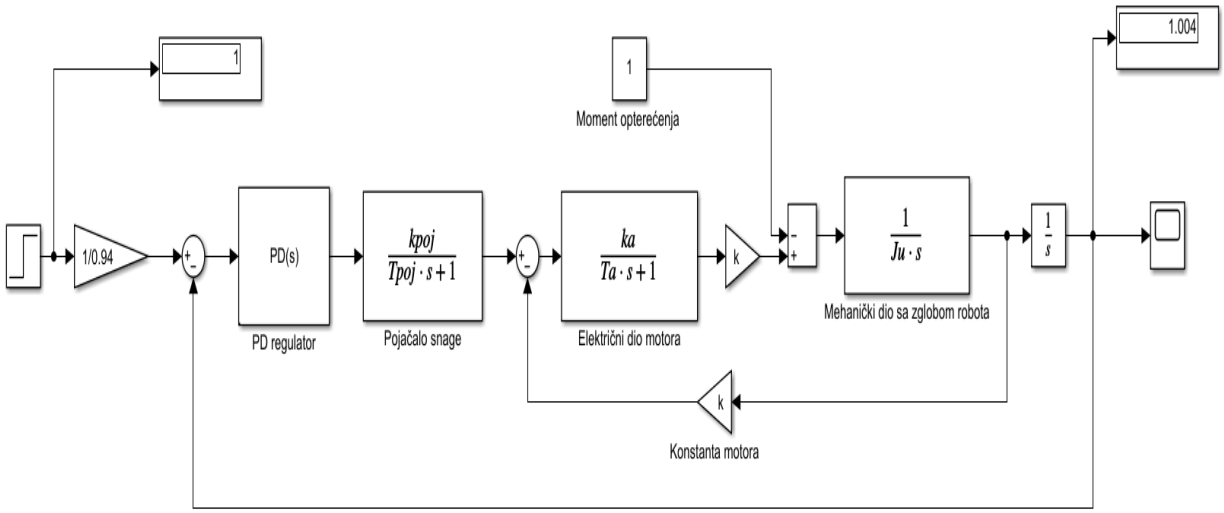


Sl. 1.109 a) – Simulacijski model u Simulinku

Sa slike 1.109 a) uočava se pogreške sustava koja iznosi:

$$e_s = 1 - 0{,}9402 = 0{,}0598 \cong 0{,}06$$

Dodavanjem pretvarača, kako je prikazno na slici 1.109 b), dobivena je zadovoljavajuća točnost sustava.



Sl. 1.109 b) – Dopuna simulacijskog modela u Simulinku

Drugi zglob

Prijenosna funkcija otvorenog kruga $G_{0_2}(s)$ bez regulatora za slučaj drugog zgloba je sljedeća:

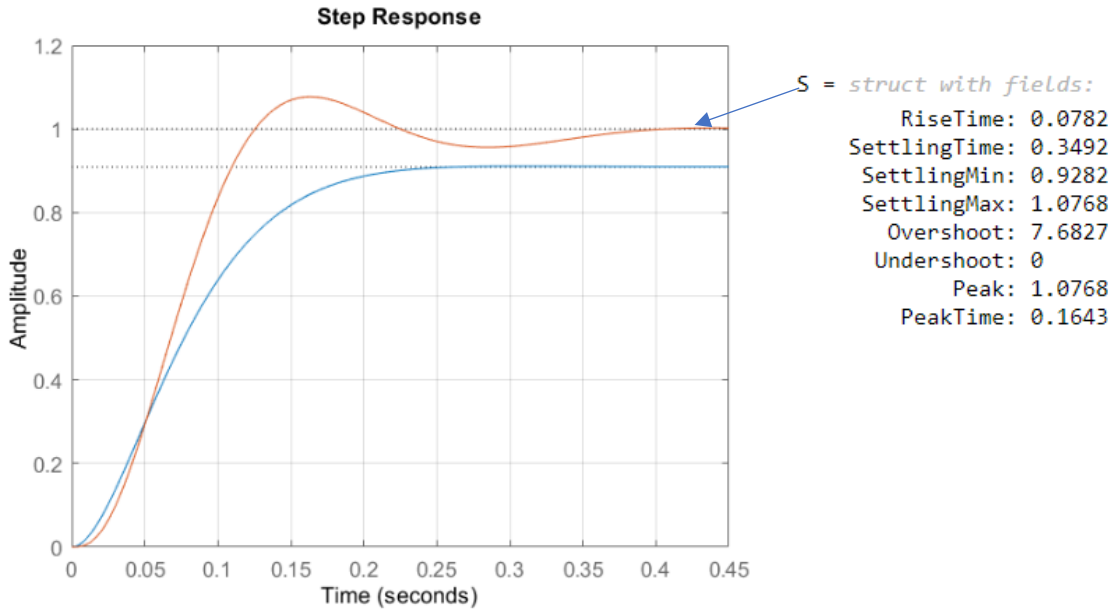
$$G_{0_2}(s) = G_{poj}(s) \cdot G_{m_2}(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{0.2}{1 + 0.01 \cdot s} \cdot \frac{457{,}14}{s^2 + 40 \cdot s + 502{,}9} \cdot \frac{1}{s}$$

U nastavku je prikazana rutina ukupna rutina kojom se određuju parametri PDF regulatora za drugi zglob.

```
'Zadano'
fi11=45*pi/180;
fi21=30*pi/180;
'Pojačalo'
kpoj=0.2
Tpoj=0.01
'Motor'
k=1.1
Ta=0.025
Jm=0.15
Ra=0.55
ka=1/Ra
'Ukupni moment inercije motora i zgloba'
Ju=Jm+0.025
'Prijenosna funkcija motora'
Tm=Ju*Ra/k^2
Gm2=tf(1/k,[Tm*Ta Tm 1])
Gm=zpk(Gm2)
```

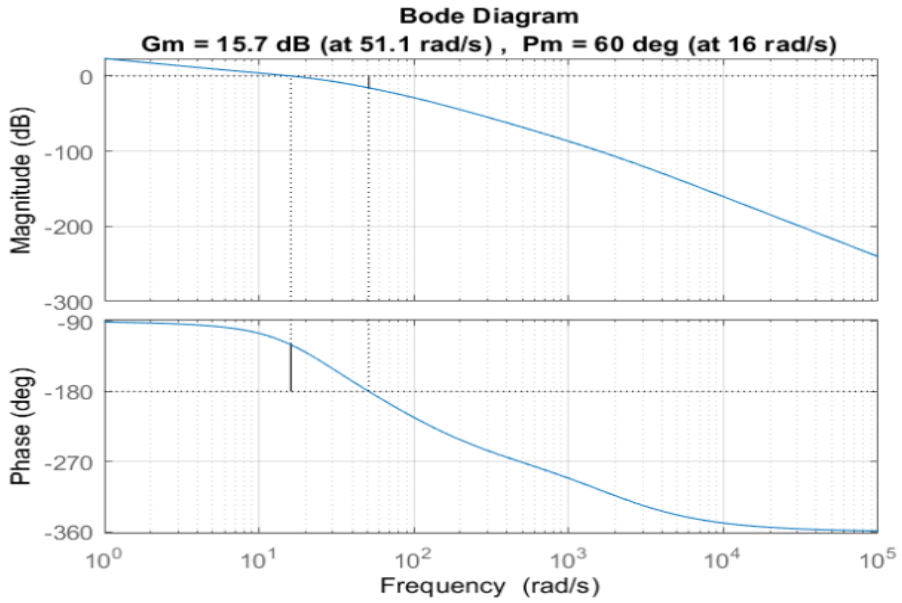
```
step(Gm2)
grid
stepinfo(Gm2)
'Prijenosna funkcija pojačala'
Gp=tf(kpoj,[Tpoj 1])
'Integralni član'
Gs=tf(1,[1 0])
'Prijenosna funkcija otvorenog kruga bez regulatora'
G02=Gp*Gm2*Gs
step(G02)
grid
'PDF regulator'
C=pidtune(G02,'PDF')
'Prijenosna funkcija zatvorenog kruga'
T=feedback(C*G02,1)
step(Gm,T)
grid
S=stepinfo(T)
'Bodeov dijagram otvorenog kruga s regulatorom'
margin(C*G02)
grid
'PDF regulator'
C=pidTuner(G02,'PDF')
```

Prijelazna karakteristika zatvorenog kruga s regulatorom i prijelazna karakteristika istosmjernog motora (usporedne prijelazne karakteristike) prikazane su na slici 1.110.



Sl. 1.110 – Usporedne prijelazne karakteristike zatvorenog kruga i motora

Regulirani odziv prijenosne funkcije je aperiodski s nadvišenjem od 7,682% i vremenom smirivanja signala od 0,349sek. Na slici 1.111 prikazan je Bodeov dijagram s podacima o amplitudnoj i faznoj pričuvi.

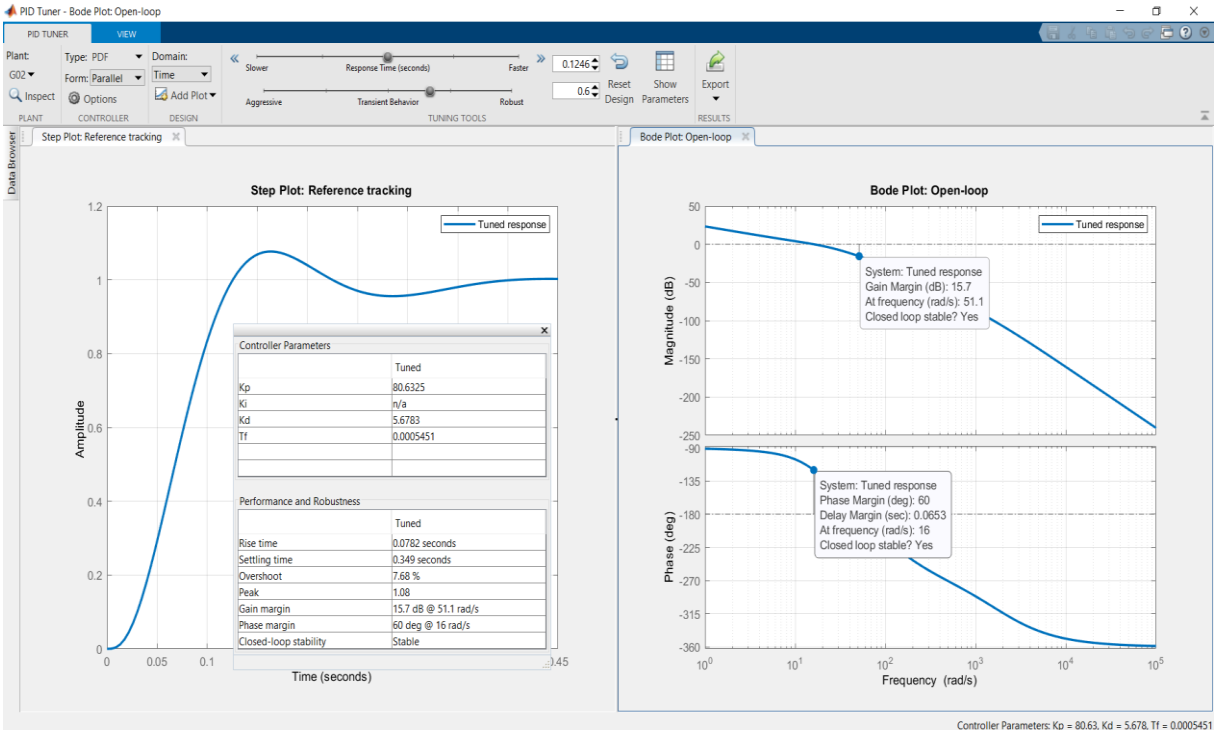


Sl. 1.111 – Bodeov dijagram otvorenog kruga s PDF regulatorom

Ostvareni su sljedeći parametri $\varphi_{F.O.} = P_m = 60^{\circ}$ i $L_{A.O.} = -G_m = -15{,}7dB$. Isti se rezultati mogu postići i pomoću naredbe:

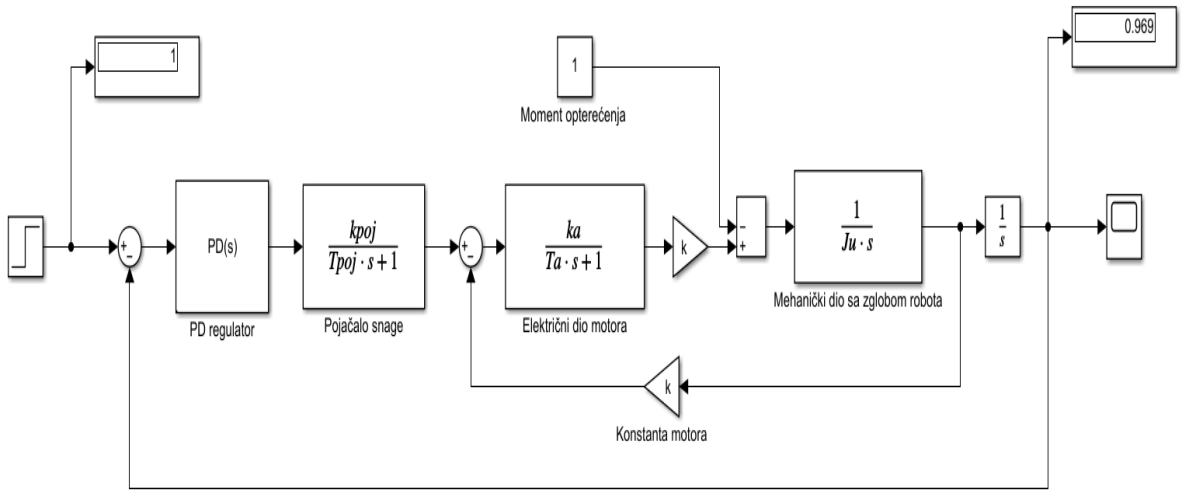
```
'PDF regulator'
C=pidTuner(G02,'PDF')
```

Na slici 1.112 prikazani su rezultati sinteze regulacije na temelju kriterija robusne regulacije. Prikazani su parametri regulatora, prijelazna karakteristika zatvorenog reguliranog kruga i Bodeov dijagram otvorenog kruga s regulatorom PDF.



Sl. 1.112 – Rezultati sinteze PDF regulatora

Na slici 1.113 a) prikazan je simulacijski model u Simulinku na step pobudu i jedinično opterećenje (moment opterećenja).

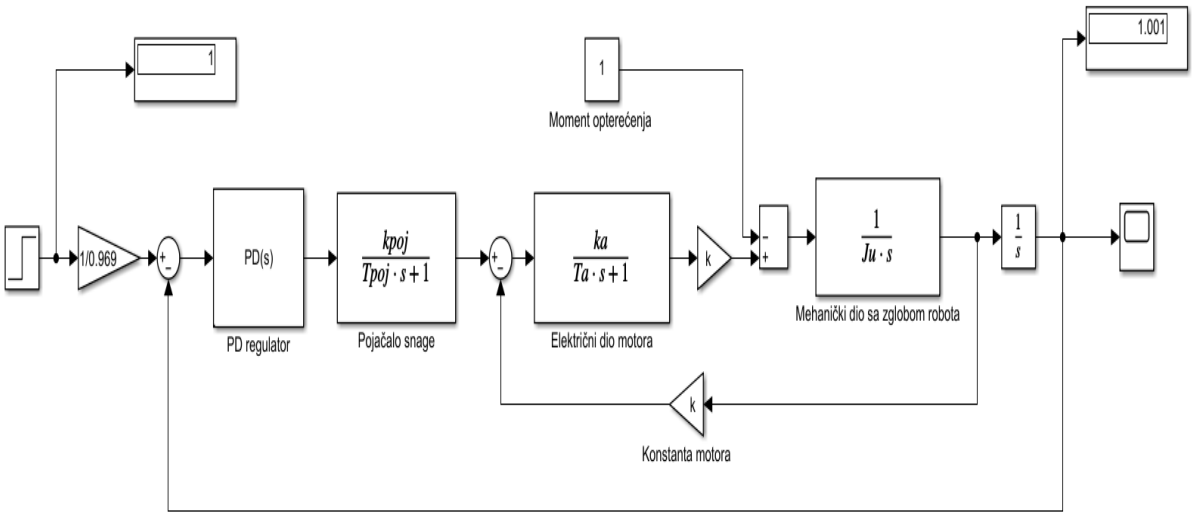


Sl. 1.113 a) – Simulacijski model u Simulinku

Sa slike 1.113 a) uočava se pogreške sustava koja iznosi:

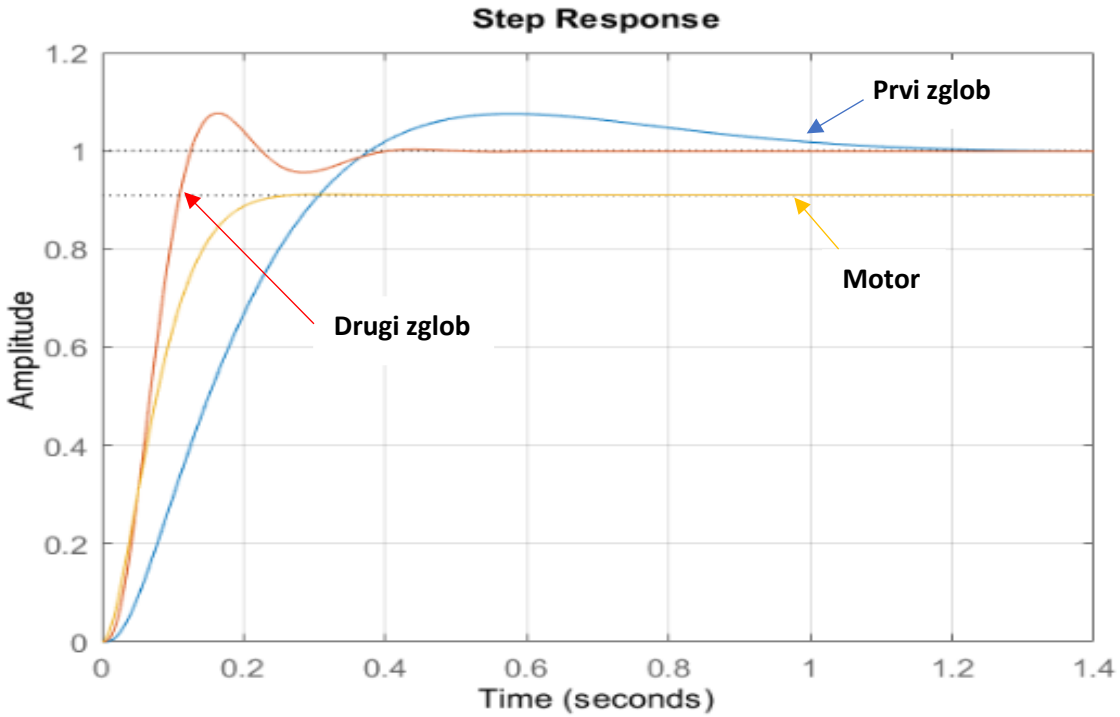
$$e_s = 1 - 0{,}969 = 0{,}031$$

Dodavanjem pretvarača, kako je prikazno na slici 1.113 b), dobivena je zadovoljavajuća točnost sustava.

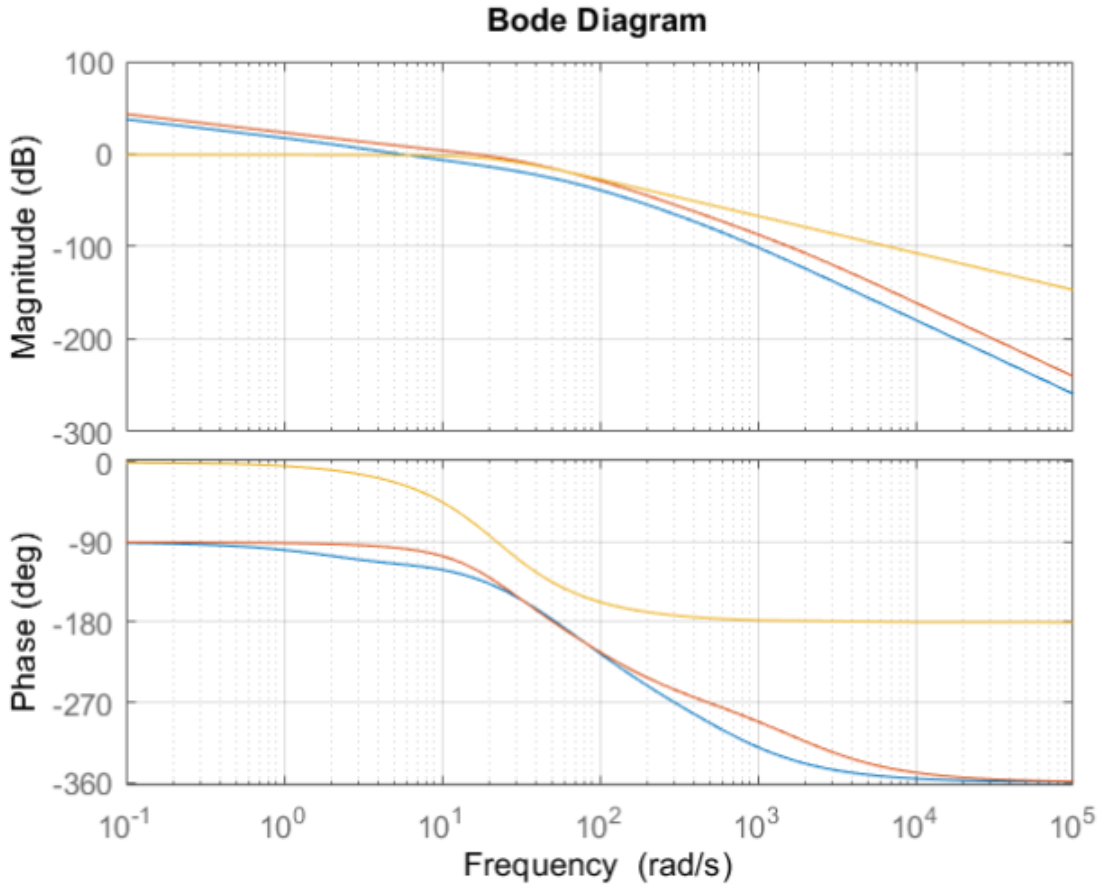


Sl. 1.113 b) - Dopuna simulacijskog modela u Simulinku

Na slici 1.114 prikazane su prijelazne karakteristike reguliranih sustava upravljanja prvog i drugog zgloba, kao i prijelazna karakteristika istosmjernog motora. Jednako tako na slici 1.115 prikazani su odgovarajući Bodeovi dijagrami.



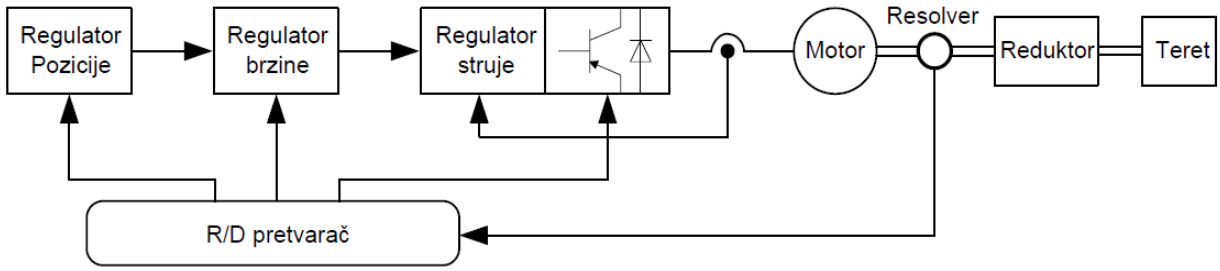
Sl. 1.114 – Prijelazne karakteristike



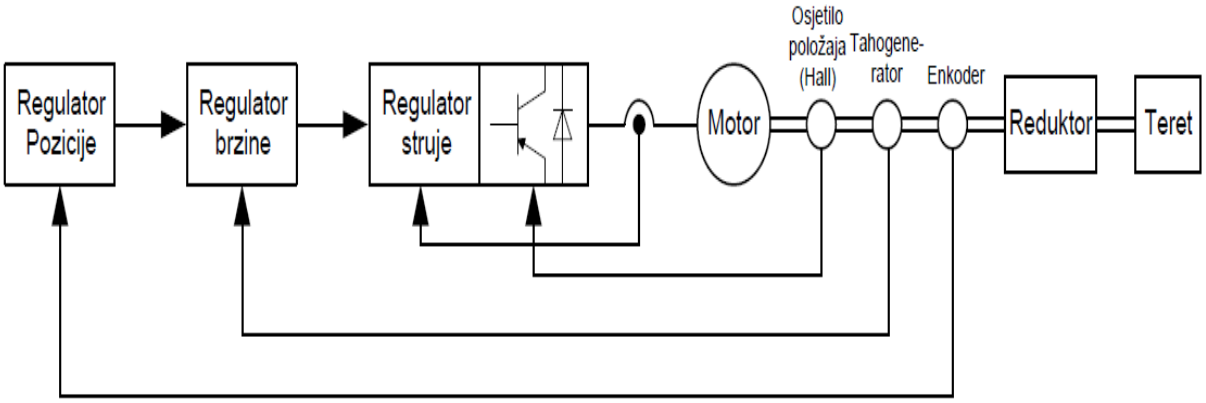
Sl. 1.115 – Bodeovi dijagrami

9.1.2 Sinhroni motor s permanentnim magnetima

Sinkroni motor s permanentnim magnetima pripada skupini elektroničkih komutiranih istosmjernih motora čiji je princip upravljanja prikazan na slikama 1.116 a) i b).

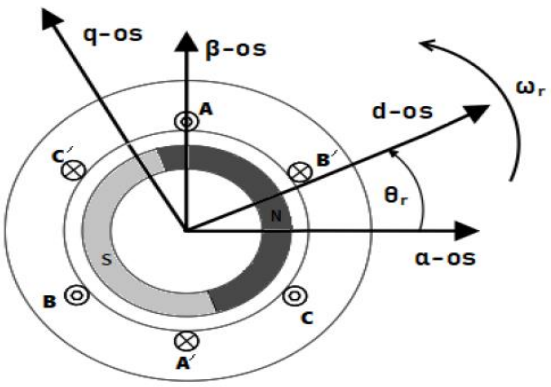


Sl. 1.116 a) – Regulacija sinhronog motora s permanentnim magnetima [Izvor: ZEA FER]



Sl. 1.116 b) – Regulacija elektronički komutiranog motora [Izvor: ZEA FER]

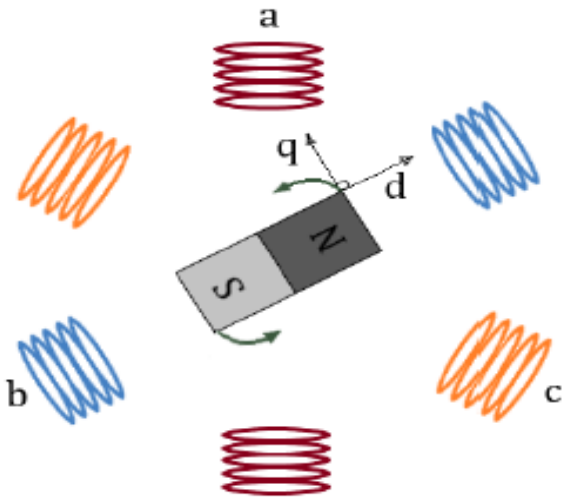
Općenito se motori s permanentnim magnetima mogu podjeliti na istosmjerne i izmjenične. Kod istosmjernih motora uzbudni namot na statoru zamjenjen je permanentnim magnetima, dok je kod izmjeničnih uzbudni namot na rotoru zamjenjen permanentnim magnetom. Permanentni magnet na rotoru sinhronog stroja osigurava konstantnu uzbudu, dok se u ostalim elementima takav motor ne razlikuje od klasičnog trofaznog sinhronog motora. Krug statora stoga se može matematički opisati naponskim jednadžbama u rotirajućem *d,q* koordinatnom sustavu koji je vezan uz položaj rotora kako je prikazano na slici 1.117 a).



Sl. 1.117 a) – Koordinatni sustav sinhronog motora[15]

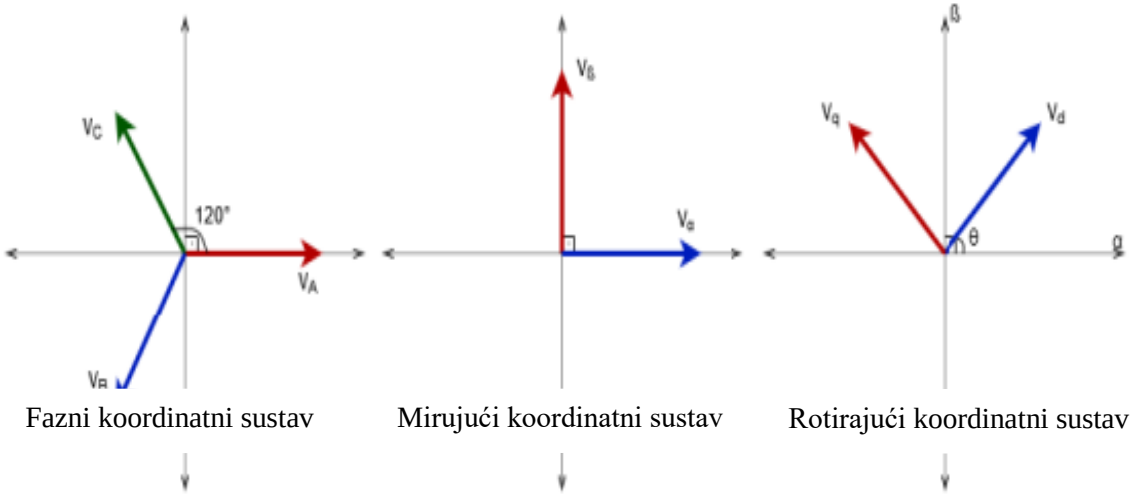
[15] https://repozitorij.etfos.hr/islandora/object/etfos%3A1872/datastream/PDF/view

Na slici 1.117 b) prikazane su zavojnice trofaznog napajanja statora međusobno pomaknute za 120° , rotor s permanatnim magnetom (S-N) i položaj koordinatnih osi d,q koordinatnom sustava.



sl. 1.117 b) – Zavojnice sinhronog motora[16]

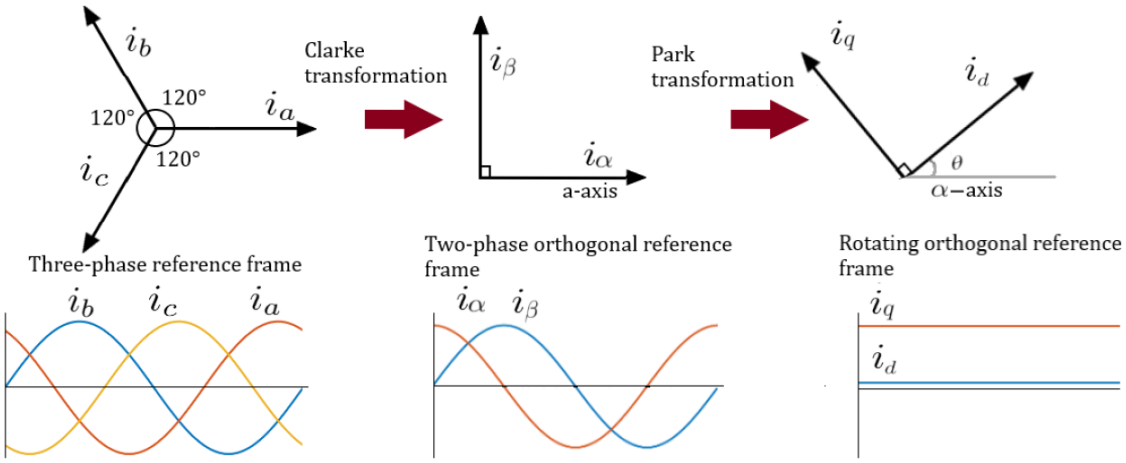
Rotirajući koordinatni sustav d, q postavljen je u smjeru pola (N) premenentnog magneta u osi d, a os q prethodi za 90° pri čemu je smjer rotacije suprotan smjeru kazaljke na satu. Vektor rotorskog magnetskog toka motora Ψ_m nalazi se na osi d, dok je na osi q jednak nuli. Magnetski tok Ψ_m je konstantan i radi se o ulančanom magnetskom toku statora i rotora koji je rezultat umnoška međuindukcije i struje. Prevođenje naponskih jednadžbi iz faznog koordinatnog sustava (A,B,C) u dvodimenzionalni d, q sustav provodi se pomoću Clark - Parkove transformacije, kako prikazuje slika 1.118.



Sl. 1.118 – Koordinatni sustavi (ibidem)

[16] Rosenbecker L, Vibration Attenuation for Satellite Reaction Wheels through the use of Field-Oriented Control, Lund University, 2020

Na slici 1.119 prikazana je Clarke – Park transformacija struje iz faznog oblika u roturajući oblik.



Sl. 1.119 – Prikaz Clarke – Park transformacije struje statora sinhrog motora (ibidem)

Clarke – Park transfromacija struje statora zadana je sljedećpm relacijom:

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta - 120^\circ) & \cos(\theta + 120^\circ) \\ \sin\theta & \sin(\theta - 120^\circ) & \sin(\theta + 120^\circ) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix}$$

Gdje je:

$\theta = 2\pi f \cdot t$ – kut rotacije magnetskog polja

f - frekvencija mreže

i_a, i_b, i_c –fazne struje statora

i_d, i_q – struje rotirajućeg dvoosnog koordinatnog sustava

Fazne struje zadane su sljedećom relacijom

$$i_{abc} = \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = I_m \begin{bmatrix} \cos(\theta + \varphi) \\ \cos(\theta - 120^\circ + \varphi) \\ \cos(\theta + 120^\circ + \varphi) \end{bmatrix}$$

Gdje je:

I_m – maksimalna struja

$\varphi = -90^\circ$ – kašnjenje struje u krugu zavojnice

Slijedom prije navedenoga vrijedi:

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta - 120^\circ) & \cos(\theta + 120^\circ) \\ \sin\theta & \sin(\theta - 120^\circ) & \sin(\theta + 120^\circ) \end{bmatrix} \cdot I_m \begin{bmatrix} \cos(\theta + \varphi) \\ \cos(\theta - 120^\circ + \varphi) \\ \cos(\theta + 120^\circ + \varphi) \end{bmatrix}$$

Odnosno:

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \cdot I_m \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta - 120^\circ) & \cos(\theta + 120^\circ) \\ \sin\theta & \sin(\theta - 120^\circ) & \sin(\theta + 120^\circ) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta - 90^\circ) \\ \cos(\theta - 120^\circ - 90^\circ) \\ \cos(\theta + 120^\circ - 90^\circ) \end{bmatrix}$$

Može se pisati:

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \cdot I_m \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta - 120^\circ) & \cos(\theta + 120^\circ) \\ \sin\theta & \sin(\theta - 120^\circ) & \sin(\theta + 120^\circ) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta - 90^\circ) \\ \cos(\theta - 210^\circ) \\ \cos(\theta + 30^\circ) \end{bmatrix}$$

Sada vrijedi:

$$i_d = \frac{2}{3} \cdot I_m \cdot [\cos\theta \cdot \cos(\theta - 90^\circ) + \cos(\theta - 120^\circ) \cdot \cos(\theta - 210^\circ) + \cos(\theta + 120^\circ) \cdot \cos(\theta + 30^\circ)] \cong 0$$

$$i_q = \frac{2}{3} \cdot I_m \cdot [\sin\theta \cdot \cos(\theta - 90^\circ) + \sin(\theta - 120^\circ) \cdot \cos(\theta - 210^\circ) + \sin(\theta + 120^\circ) \cdot \cos(\theta + 30^\circ)] = I_m$$

Električna brzina vrtnje rotora ω_r određena je izrazom:

$$\omega_r = \frac{d}{dt}\theta_r = \dot{\theta}_r$$

Mehanička brzina vrtnje rotoraω_m određena je izrazom:

$$\omega_m = \frac{\omega_r}{p}$$

Gdje je:

p – broj pari polova statora

Statorske naponske jednadžbe glase:

$$u_d = R_a \cdot i_d + \frac{d}{dt}\Psi_d - \omega_r \cdot \Psi_q$$

$$u_q = R_a \cdot i_q + \frac{d}{dt}\Psi_q + \omega_r \cdot \Psi_d$$

Gdje je:

$$\Psi_d = L_d \cdot i_d + \Psi_m$$

$$\Psi_q = L_q \cdot i_q$$

Pri čemu je:

$$L_d = L_q = \frac{3}{2} \cdot L_a$$

Odnosno:

R_a- otpor armature statora

L_a – induktivitet armature statora

L_d – induktivitet statora u *d* osi

L_q – induktivitet statora u *q* osi

i_d – struja statora u *d* osi

i_q – struja rotora u *q* osi

Ψ_d – magnetski tog u *d* osi

Ψ_q – magntski tok u *q* osi

Ukupna snaga P_u koju razvija sinhroni motor može se izraziti pomoću faznih napona i struja, i vrijedi:

$$P_u = u_a \cdot i_a + u_b \cdot i_b + u_c \cdot i_c$$

Gdje su:

i_a, i_b, i_c –fazne struje statora

u_a, u_b, u_c –fazni naponi statora

Ako se ukupna snaga P_u izrazi putem napon i struje u d, q koordintnom sustavu, tada vrijedi:

$$P_u = \frac{3}{2}\left(u_d \cdot i_d + u_q \cdot i_q\right)$$

Izlazna snaga P_i određena je sljedećom relacijom:

$$P_i = M_m \cdot \omega_m$$

Gdje je:

M_m – mehanički moment motora

ω_m – mehanička brzina vrtnje rotora

Slijedom prije napisanog vrijedi da je ukupna snaga P_u jednaka:

$$P_u = \frac{3}{2}\left(u_d \cdot i_d + u_q \cdot i_q\right)$$

$$= \frac{3}{2}\left[\left(R_a \cdot i_d + \frac{d}{dt}\Psi_d - \omega_r \cdot \Psi_q\right) \cdot i_d + \left(R_a \cdot i_q + \frac{d}{dt}\Psi_q + \omega_r \cdot \Psi_d\right) \cdot i_q\right]$$

Odnosno sređivanjem dobijamo:

$$P_u = \frac{3}{2} R_a \cdot \left(i_d^2 + i_q^2\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{d}{dt}\Psi_d \cdot i_d + \frac{d}{dt}\Psi_q \cdot i_q\right) + \frac{3}{2}\omega_r \cdot \left(\Psi_d \cdot i_q - \Psi_q \cdot i_d\right)$$

Ukupna snaga P_u sadrži tri komponente i to:

$$P_u = P_g + P_{pr} + P_i$$

Gdje je:

$P_g = \frac{3}{2} R_a \cdot \left(i_d^2 + i_q^2\right)$ – snaga toplinskih gubitaka

$P_{pr} = \frac{3}{2}\left(\frac{d}{dt}\Psi_d \cdot i_d + \frac{d}{dt}\Psi_q \cdot i_q\right)$ – dinamička snaga prijelaznog procesa

$P_i = \frac{3}{2}\omega_r \cdot \left(\Psi_d \cdot i_q - \Psi_q \cdot i_d\right)$ – izlazna snaga

Izlazna snaga P_i odlučujuća je za mehanički rad sinhornog motora i stoga vrijedi:

$$M_m \cdot \omega_m = \frac{3}{2}\omega_r \cdot \left(\Psi_d \cdot i_q - \Psi_q \cdot i_d\right)$$

Odnosno zakretni moment sinhronog motora M_m iznosi:

$$M_m = \frac{3}{2}\frac{\omega_r}{\omega_m} \cdot \left(\Psi_d \cdot i_q - \Psi_q \cdot i_d\right)$$

Daljnjim uvrštavanjem dobija se:

$$M_m = \frac{3}{2}\frac{\omega_r}{\frac{\omega_r}{p}} \cdot \left[\left(L_d \cdot i_d + \Psi_m\right) \cdot i_q - L_q \cdot i_q \cdot i_d\right] = \frac{3}{2} \cdot p \cdot \left[\Psi_m \cdot i_q + \left(L_d - L_q\right) \cdot i_q \cdot i_d\right]$$

Kako je $L_d = L_q$ može se pisati:

$$M_m = \frac{3}{2} \cdot p \cdot \Psi_m \cdot i_q = k \cdot i_q$$

Gdje je:

$k = \frac{3}{2} \cdot p \cdot \Psi_m$ – konstanta sinhronog motora

Prethodna relacija za zakretni moment sinhronog motora po obliku odgovara relaciji za zakretni moment istosmjernog motora jer moment ovisi o broju pari polova p, ulančanom magnetskom toku Ψ_m koji ima konstantnu vrijednost (permanentni magnet) i struji i_q. Cilj *vektorskog upravljanja* sinhronog motora je da komponenta statorske struje i_d bude što bliža nuli tako da vrijedi:

$$|\boldsymbol{i_s}| = i_q$$

Stoga ako je $i_d \approx 0$ tada se statorske naponske jednadžba mogu izraziti na sljedeći način:

$$u_d = R_a \cdot i_d + \frac{d}{dt}\Psi_d - \omega_r \cdot \Psi_q = R_a \cdot i_d + \frac{d}{dt}\left(L_d \cdot i_d + \Psi_m\right) - \omega_r \cdot L_q \cdot i_q$$

$$u_q = R_a \cdot i_q + \frac{d}{dt}\Psi_q + \omega_r \cdot \Psi_d = R_a \cdot i_q + \frac{d}{dt}\left(L_q \cdot i_q\right) + \omega_r \cdot \left(L_d \cdot i_d + \Psi_m\right)$$

Odnosno:

$$u_d = R_a \cdot 0 + \frac{d}{dt}\left(L_d \cdot 0 + \Psi_m\right) - \omega_r \cdot L_q \cdot i_q$$

$$u_q = R_a \cdot i_s + \frac{d}{dt}\left(L_q \cdot i_q\right) + \omega_r \cdot \left(L_d \cdot 0 + \Psi_m\right)$$

Slijedi da je:

$$u_d = -\omega_r \cdot L_q \cdot i_q = -\omega_r \cdot \Psi_q$$

$$u_q = R_a \cdot i_q + L_q \cdot \frac{di_q}{dt} + \omega_r \cdot \Psi_m$$

Primjeni li se Laplasova transfromacija, tada slijedi:

$$U_q(s) = R_a \cdot I_q(s) + L_q \cdot s \cdot I_q(s) + \Omega_r(s) \cdot \Psi_m$$

Odnosno:

$$U_q(s) = (R_a + L_q \cdot s) \cdot I_q(s) + \Omega_r(s) \cdot \Psi_m$$

Prijenosna funkcija električnog dijela $G_{elek}(s)$ u ovom slučaju glasi:

$$G_{elek}(s) = \frac{I_q(s)}{U_q(s) - \Omega_r(s) \cdot \Psi_m} = \frac{1}{R_a + L_q \cdot s} = \frac{\frac{1}{R_a}}{\frac{L_q}{R_a}s + 1}$$

Kako je $L_q = \frac{3}{2} \cdot L_a$ tada vrijedi:

$$G_{elek}(s) = \frac{I_q(s)}{U_q(s) - \Omega_r(s) \cdot \Psi_m} = \frac{\frac{1}{R_a}}{\frac{\frac{3}{2}L_a}{R_a}s + 1} = \frac{k_a}{\frac{3}{2}T_a \cdot s + 1}$$

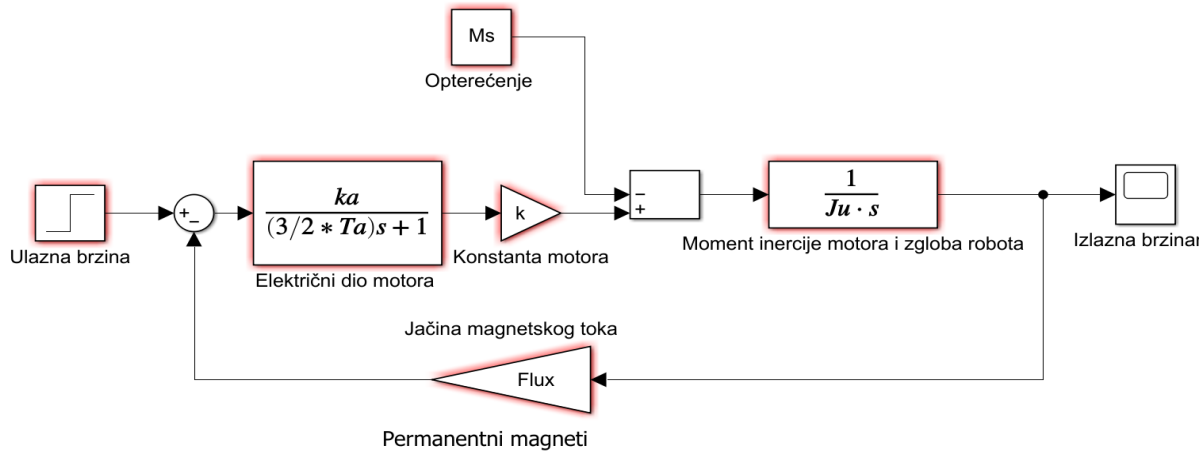
Kako općenito za mehaniku zglob robota vrijedi mehanička prijenosna funkcija $G_{meh}(s)$:

$$G_{meh}(s) = \frac{\Omega_r(s)}{M_m(s) - M_s} = \frac{1}{J_u \cdot s}$$

I jednako tako vrijedi:

$$M_m = \frac{3}{2} \cdot p \cdot \Psi_m \cdot i_q = k \cdot i_q$$

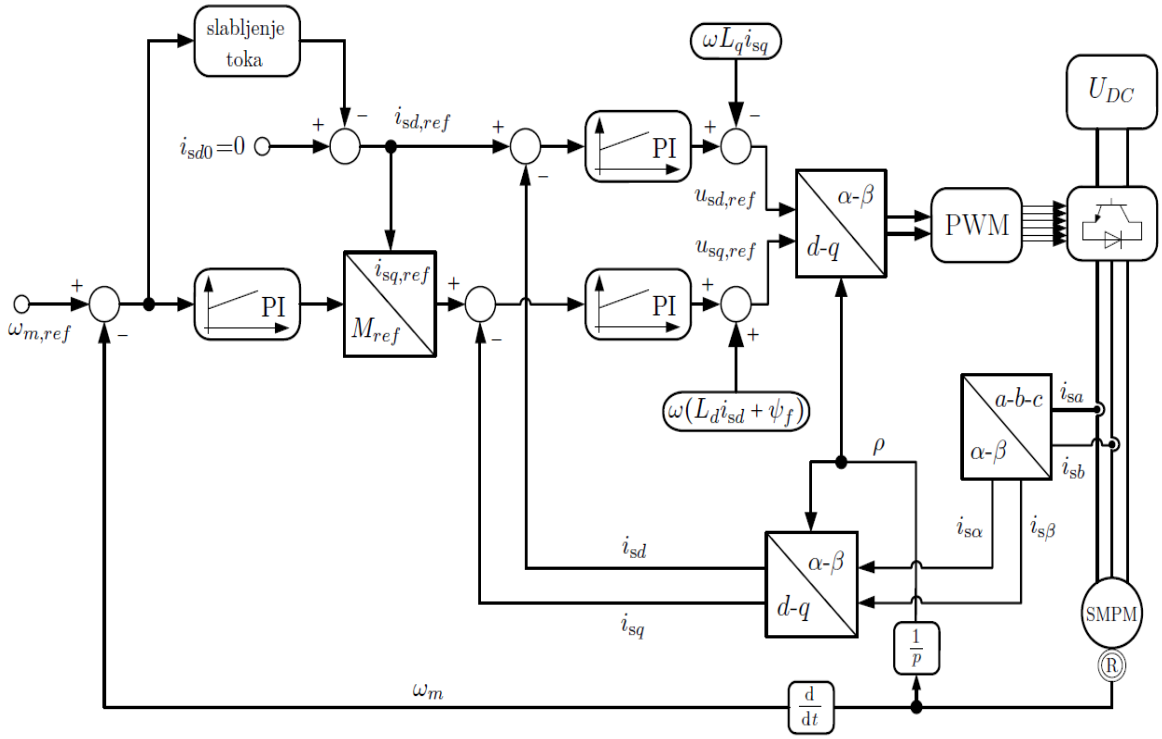
Može se izraditi pojednostavljena blok shema sinhronog motora kako je prikazano na slici 1.120:



Sl. 1.120 – Pojednostavljena blok shema sinhronog motora

Vektorsko upravljanje

Na slici 1.121 prikazana blok shema vektorskog upravljanja sinhronog motora s permanentnim magnetima (SMPM).



Sl. 1.121 - blok shema vektorskog upravljanja sinhronog motora s permanentnim magnetima

Izvor [Pravica L., 2012: Diplomski rad - FER]

Na ulazu u sustav zadana je referentna mehaničke kutna brzina sinhronog motora $\omega_{m,ref}$. Slijedom prethodno određenih jednažbi, a kako se radi o strujama i naponima statora, uz oznake vrijabli dodano je slovo *s (stator)* pa tako vrijedi:

$i_{sd,ref}$ – referentna struja statora u *d* osi

$i_{sd0} = 0$ – početna struja stator u *d* osi (cilj je da bude što bliža nuli)

$i_{sq,ref}$ – referntna struja rotora u *q* osi

M_{ref} – referentni moment motora

$U_{sd,ref}$ – referentni napon motora u *d* osi

$U_{sq,ref}$ – referentni napon motora u *q* osi

i_{sd} – trenutna vrijednost struje u *d* osi

i_{sq} – trenutna vrijednost struje u *q* osi

$i_{s\alpha}$ – trenutna vrijednost struje u α osi

$i_{s\beta}$ – trenutna vrijednost struje u βosi

i_{sa} – trenutna vrijednost fazne struje statora

i_{sb} – trenutna vrijednost fazne struje statora

p – broj pari polova

ω_m – trenutrna vrijednost mehaničke kutne brzine motora

Osim prije navedenoga, na slici 1.121 prikazane su i sljedeće relacije $\omega \cdot L_q \cdot i_{sq}$ i $\omega \cdot (L_d \cdot i_{sd} + \Psi_f)$ koje potpuno odgovaraju prethodnim jednadžbama jer je:

$\omega = \omega_r$ – električna kutna brzina motora

$\Psi_f = \Psi_m$ - ulančani magnetski tok statora i rotora

Na slici 1.121 uočava se Clark – transformacija kao i Park transformacija i inverzna Park - transforamcija na način kako je opisana na slici 1.119. Jednako tako uočavaju se tri PI regulatora (kutne brzine i refernetnih struja), zatim PWM modulacija i DC/AC pretvorba istosmjernog napona U_{DC}. Oznakom R označen je na slici 1.121 *rezolver* tj. induktivni mjerni pretvarač koji mjeri kutni položaj rotora θ čija drivacija $\frac{d}{dt}$ daje mehaničku kutnu brzinu motora ω_m.

Referentni moment M_{ref} određen je sljedećom relacijom:

$$M_{ref} = k \cdot i_{sq,ref}$$

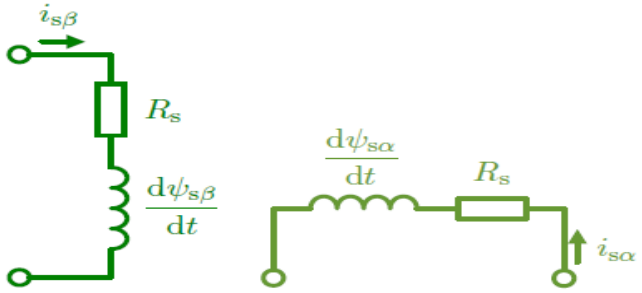
Gdje je:

$k = \frac{3}{2} \cdot p \cdot \Psi_m$ – konstanta sinhronog motora

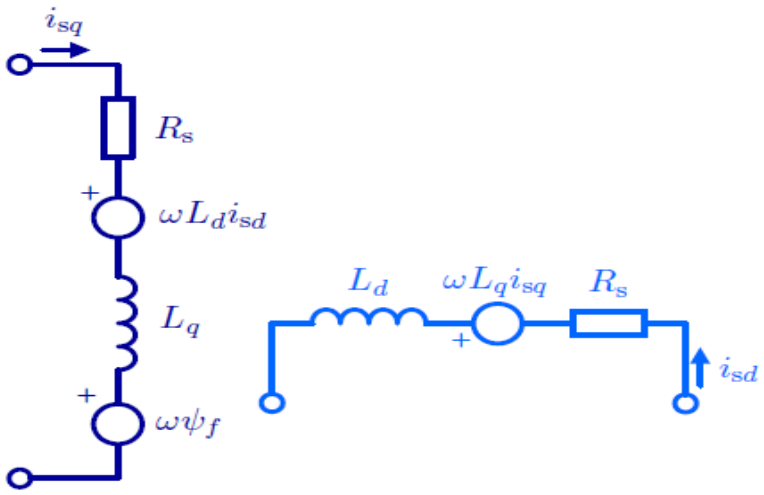
p – broj pari polova

Ψ_m - ulančani magnetski tok statora i rotora

Kod vektorskog upravljanja sinhronim motorom vektor referentnog napona u mora biti uvijek poznat u bilo kojem trenutku i zato vektorsko upravljanje mora nužno sadržavati Clarkovu i Parkovu transformaciju, a u svrhu tvorbe vektora referentnog napona koristi se modulacija širine impulsa (engl. *Pulse With Modulation, PWM).* Električni model sinhronog motora u dvofaznom sustavu (α, β), prikazan na slici 1.122, transformira se u rotirajući sustav (d, q) koji je prikazan na slici 1.123. (ibidem)

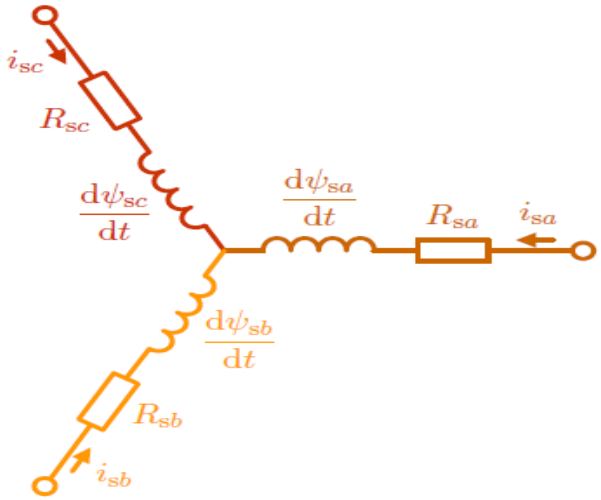


Sl. 1.122 – Električna nadomjesna shema sinhronog motora u dvofaznom sustavu (α, β)



Sl. 1.123 – Električna nadomjesna shema sinhronog motora u rotirajućem sustavu (d, q)

Na slici 1.124 prikazan je trofazni model sinhronog modela i njegova nadomjesna električna shema u koordinatnom sustavu (a, b, c).



Sl. 1.124 - Električna nadomjesna shema sinhronog motora u trofaznom sustavu (a, b, c)

Transfomacija električnog modela sinhronog motora iz trofaznog koordinatnog sustava (a, b, c) – sl. 1.124 u rortirajući koordinatni sustav (d, q) – slika 1.123 ne linearizira model upravljanja. Bez obzira na prije navedeno, modeliranje sinhronog motora s permanentnim magnetima u rotirajućem koordinatnom sustavu omogućilo je usporedbu sinhronog motora s istosmjernim motorom. Kako je magnetski tok rotora (zbog permanentnih magneta) povezan s položajem rotora, struktura upravljanja sinhronim motorom je jednostavnija nego u slučaju asinhronog motora.

Prema tome, temeljne jednadžbe kojima se opisuje rad sinhronog motora s permanentnim magnetima su sljedeće:

a) Strujne jednadžbe

$$L_d \frac{di_{sd}}{dt} + R_a \cdot i_{sd} - \omega_r \cdot L_q \cdot i_{sq} + u_{sd} = 0$$

$$L_q \frac{di_{sq}}{dt} + R_a \cdot i_{sq} - \omega_r \cdot (L_d \cdot i_{sd} + \Psi_m) + u_{sq} = 0$$

b) Mehanička jednadžba

$$M_m = \frac{3}{2} \cdot p \cdot \Psi_m \cdot i_{sq} = k \cdot i_{sq}$$

c) Jednadžba kutne brzine

$$J \cdot \frac{d\omega_m}{dt} + k_v \cdot \omega_m = M_m - M_s$$

$$\omega_m = \frac{\omega_r}{p}$$

gdje je:

k_v – koeficijent viskoznog trenja

J – moment inercije

Ostali parametri prethodno su definirani. Ukoliko vrijedi $i_{sd} \cong 0$, tada se može pisati kako je:

$$L_q \cdot \frac{di_{sq}}{dt} + R_a \cdot i_{sq} = u_{sq} - \omega_r \cdot \Psi_m$$

odnosno

$$L_q \cdot \frac{di_{sq}}{dt} + R_a \cdot i_{sq} = u_{sq} - p \cdot \omega_m \cdot \Psi_m$$

Jednako tako može se pisati da je:

$$J \cdot \frac{d\omega_m}{dt} + k_v \cdot \omega_m = k \cdot i_{sq} - M_s$$

Na temelju Laplasove transformacije vrijedit će:

$$(L_q \cdot s + R_a) \cdot I_{sq}(s) = U_{sq}(s) - p \cdot \Omega_m(s) \cdot \Psi_m$$

$$(J \cdot s + k_v) \cdot \Omega_m(s) = k \cdot I_{sq}(s) - M_s(s)$$

Dolazimo do sljedećeg sustava jednadžbi u s području:

$$(L_q \cdot s + R_a) \cdot I_{sq}(s) + p \cdot \Psi_m \cdot \Omega_m(s) = U_{sq}(s)$$

$$k \cdot I_{sq}(s) - (J \cdot s + k_v) \cdot \Omega_m(s) = M_s(s)$$

Navedeno se može prikazati u matričnom obliku na sljedeći način:

$$\begin{bmatrix} (L_q \cdot s + R_a) & p \cdot \Psi_m \\ k & -(J \cdot s + k_v) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{sq}(s) \\ \Omega_m(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{sq}(s) \\ M_s(s) \end{bmatrix}$$

Korištenjem determinati vrijedi:

$$\Omega_m(s) = \frac{\begin{vmatrix} (L_q \cdot s + R_a) & U_{sq}(s) \\ k & M_s(s) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (L_q \cdot s + R_a) & p \cdot \Psi_m \\ k & -(J \cdot s + k_v) \end{vmatrix}}$$

Odnosno:

$$\Omega_m(s) = \frac{(L_q \cdot s + R_a) \cdot M_s - k \cdot U_{sq}(s)}{-(L_q \cdot s + R_a) \cdot (J \cdot s + k_v) - k \cdot p \cdot \Psi_m}$$

Možemo pisati:

$$\Omega_m(s) = \frac{k \cdot U_{sq}(s)}{(L_q \cdot s + R_a) \cdot (J \cdot s + k_v) + k \cdot p \cdot \Psi_m} - \frac{(L_q \cdot s + R_a) \cdot M_s}{(L_q \cdot s + R_a) \cdot (J \cdot s + k_v) + k \cdot p \cdot \Psi_m}$$

Ukoliko zanemarimo viskozno trenje tj. $k_v \cong 0$ i ako se opterećenje M_s može zanemariti, tada vrijedi:

$$\Omega_m(s) = \frac{k \cdot U_{sq}(s)}{(L_q \cdot s + R_a) \cdot J \cdot s + k \cdot p \cdot \Psi_m}$$

Odnosno vrijedi sljedeće prijenosna funkcija:

$$G(s) = \frac{\Omega_m(s)}{U_{sq}(s)} = \frac{k}{J \cdot L_q \cdot s^2 + J \cdot R_a \cdot s + k \cdot p \cdot \Psi_m}$$

Kako je $L_q = \frac{3}{2} \cdot L_a$ možemo pisati:

$$G(s) = \frac{\Omega_m(s)}{U_{sq}(s)} = \frac{k}{J \cdot \frac{3}{2} \cdot L_a \cdot s^2 + J \cdot R_a \cdot s + k \cdot p \cdot \Psi_m}$$

Kako je $k = \frac{3}{2} \cdot p \cdot \Psi_m$ tada možemo pisati:

$$G(s) = \frac{\Omega_m(s)}{U_{sq}(s)} = \frac{k}{J \cdot \frac{3}{2} \cdot L_a \cdot s^2 + J \cdot R_a \cdot s + k \cdot p \cdot \Psi_m} \cdot \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}}$$

Sređivanjem dobijamo:

$$G(s) = \frac{\Omega_m(s)}{U_{sq}(s)} = \frac{\frac{3}{2} \cdot k}{\frac{3}{2} \cdot J \cdot \frac{3}{2} \cdot L_a \cdot s^2 + \frac{3}{2} \cdot J \cdot R_a \cdot s + k^2} = \frac{\frac{3}{2} \cdot k}{\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} J \cdot \frac{R_a}{k^2} \frac{L_a}{R_a} s^2 + \frac{3}{2} \cdot J \cdot \frac{R_a}{k^2} \cdot s + 1}$$

$$= \frac{\frac{3}{2} \cdot k}{\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot T_m \cdot T_a \cdot s^2 + \frac{3}{2} \cdot T_m \cdot s + 1}$$

Odnosno:

$$G(s) = \frac{\Omega_m(s)}{U_{sq}(s)} = \frac{k_q}{T_{m_q} \cdot T_{a_q} \cdot s^2 + T_{a_q} \cdot s + 1}$$

Gdje je:

$$k_q = \frac{3}{2} \cdot k$$

$$T_{m_q} = \frac{3}{2} \cdot T_m$$

$$T_{a_q} = \frac{3}{2} \cdot T_a$$

Slijedom napisanoga uočavamo kako se radi o standradnoj prijednosnoj funkciji istosmjernog elektromotornog pogona.

9.2 Upravljanje robotskim mehanizmom obzirom na moment i brzinu

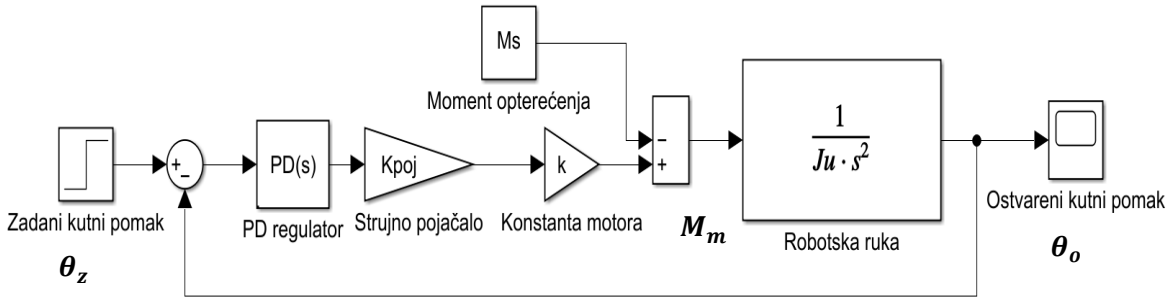
Upravljanje robotskim mehanizmom ostvaruje se uz pomoć elektromotornog pogona. Radi se o slijednom sustavu i višerazinskoj strukturi upravljanja (kaskadni sustav regulacije) kako je prethodno prikazano na slici 116 b). Takav način upravljanja podrazumijeva primjenu digitalnih sustava upravlja odnosno računala i mikroprocesora koja će obaviti planiranje trajektorije robota u prostoru konfiguracije alata, transformirati koordinatni prostor konfiguracije alata u prostor varijabli zglobova odnosno izvršavati zadani program robota (programiranje se obavlja „robotskim jezikom“ na način opisan u poglavlju 8.). Upravljanja se provodi tako što će na pojedinoj osi gibanja robota u zadanom intervalu upravljanja proslijediti „naredba“ elektromotornom pogonu koji se nalazi u zglobu robota. Kako bi se mogla proslijditi „naredba“ nužno je da upravljački algoritam robota sadrži vrijednost položaja i/ili brzine gibanja unutar zadanog vremenskog intervala. Mjerenje vrijednosti položaja zgloba robota provodi se inkrementalnim davačem (endkoder) te se provjerava stvarni položaj i dosegnuti položaj robotske ruke odosno alata, te se podaci uspoređuju kako bi se izračunala pogreška položaja (regulacijsko odstupanje) koja se prosljeđuje upravljačkom algoritmu (regulatoru). Izlazna veličina iz upravljačkog algoritma je „naredba“ koja se šalje energetskom (učinskom) pretvaraču elektromotornog pogona (digitalno impulsni uređaj za tiristorska pojačala snage ili impulsno-širinski modulatora z atranzistorska pojačala snage). U tom kontekstu prisutna su dva pristupa:

a) Upravljanje varijablama zgloba (položaj, brzina i ubrzanje) pomoću podređene regulacijske strujne petlje odnosno momenta robotske ruke M_m koji se uzima kao ulazna veličina. U takvoj strukturi regulacijsku strujnu petlju sačinjava *strujno pojačalo*.

b) Upravljanje varijablama zgloba (položaj, brzina i ubrzanje) pomoću podređene regulacijske petlje brzine vrtnje odnosno momenta tereta robotske ruke M_s koji djeluje na osovinu motora. U takvoj strukturi regulacijsku petlju brzine vrtnje osovine zgloba sačnjava *naponsko pojačalo*.

Strujno pojačalo

Na slici 1.125 prikazan je sustav upravljanja varijablama zgloba robota na temelju potrebnog momenta robotske ruke M_m u motoru zgloba robota koji se ostavruje kako bi se pokrenuo manipulator i pri tome svladali svi momenti (trenja, sile teže, dinamički momenti uslijed inercije i sl.) koji se suprostavljaju gibanju robotske ruke. Upravljenje momenom robotske ruke M_m zasniva se na proporcionalnom odnosu momenta motora M_m i struje armature I_a koji je određen konstantom motora k. U blok shemi regulacijskog kruga koristi se proporcionalno – drivacijski regulator (PD regulator) položaja robotske ruke i strujno pojačalo kao ekvivalent regulacijskoj strujnoj petlji.



Sl. 1.125 – Regulacijska petalja položaja robotske ruke

PD regulator zadan je sljedećom relacijom (idelani PD regulator):

$$G_{PD}(s) = k_p + k_d \cdot s$$

Prema slici 1.125 vrijedi:

$$\theta_o(s) = \frac{1}{J_u \cdot s^2} \cdot [M_m(s) - M_s(s)]$$

$$M_m(s) = k \cdot K_{poj} \cdot (k_p + k_d \cdot s) \cdot [\theta_z(s) - \theta_o(s)] = (k_0 + k_1 \cdot s) \cdot [\theta_z(s) - \theta_o(s)]$$

Gdje je:

$$k_0 = k \cdot K_{poj} \cdot k_p$$

$$k_1 = k \cdot K_{poj} \cdot k_d$$

Može se dalje pisati:

$$J_u \cdot s^2 \cdot \theta_o(s) + M_s(s) = M_m(s)$$

$$(k_0 + k_1 \cdot s) \cdot \theta_z(s) - (k_0 + k_1 \cdot s) \cdot \theta_o(s) = M_m(s)$$

Odnosno vrijedi jednakost:

$$J_u \cdot s^2 \cdot \theta_o(s) + M_s(s) = (k_0 + k_1 \cdot s) \cdot \theta_z(s) - (k_0 + k_1 \cdot s) \cdot \theta_o(s)$$

Stoga se može pisati:

$$(J_u \cdot s^2 + k_1 \cdot s + k_0) \cdot \theta_o(s) = (k_0 + k_1 \cdot s) \cdot \theta_z(s) - M_s(s)$$

I vrijedi:

$$\theta_o(s) = \frac{(k_0 + k_1 \cdot s) \cdot \theta_z(s) - M_s(s)}{J_u \cdot s^2 + k_1 \cdot s + k_0}$$

Ako je $M_s(s) = 0$ tada prijenosna funkcija sustava glasi:

$$G(s) = \frac{\theta_o(s)}{\theta_z(s)} = \frac{k_0 + k_1 \cdot s}{J_u \cdot s^2 + k_1 \cdot s + k_0}$$

Ako je $\theta_z(s) = 0$ tada prijenosna funkcija glasi:

$$G(s) = \frac{\theta_o(s)}{M_s(s)} = -\frac{1}{J_u \cdot s^2 + k_1 \cdot s + k_0}$$

Radi se o sustavu drugog reda čija je karakteristična jednadžba jednaka:

$$A(s) = J_u \cdot s^2 + k_1 \cdot s + k_0 = \frac{\frac{1}{J_u}}{s^2 + \frac{k_1}{J_u} s + \frac{k_0}{J_u}}$$

Na temelju navedenoga moguće je odrediti koeficijent prigušenja ξ i prirodnu frekvenciju neprigušenih oscilacija ω_n jer vrijedi:

$$s^2 + \frac{k_1}{J_u} s + \frac{k_0}{J_u} = s^2 + 2\,\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

Stoga dobivamo:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_0}{J_u}}$$

$$\xi = \frac{\frac{k_1}{J_u}}{2\omega_n} = \frac{\frac{k_1}{J_u}}{2\sqrt{\frac{k_0}{J_u}}} = \frac{k_1}{2 \cdot \sqrt{k_0 \cdot J_u}}$$

Uočava se kako prirodna frekvencija ω_n i koeficijent prigušenja ξ ovise o ukupnom momentu inercije J_u koji se mijenja s promjenom položaja robotske ruke kao i radnog tereta. Kod dobro projektiranog robotskog manipulatora može se očekivati promjena ukupnog momenta ineracije J_u od potpuno neopterećenog stanja do punog opterećenja u odnosu 1 : 10. U takavom rasponu opterećnja mjenjaju se i parametri PD regulatora i postavlja se pitanje kako odrediti optimalne vrijednosti parametara PD regulatora tj. koeficijenata k_p i k_d ? Preporuka je da se koeficijenti odrede na temelju srednje vrijednosti koeficijenta prigušenja koja iznosi $\xi_{sr} = 1$ za srednju

vrijednost ukupnog momenta inercije J_{sr} i srednju vrijednost prirodne frekvencije neprigušenih oscilacija $\omega_{n_{sr}}$.

Ako je $J_u = J_{sr}$ i $\xi_{sr} = 1$ može se pisati da je:

$$\omega_{n_{sr}} = \sqrt{\frac{k_0}{J_{sr}}}$$

i

$$\xi_{sr} = \frac{k_1}{2 \cdot \sqrt{k_0 \cdot J_{sr}}} = 1$$

Odnosno vrijedi

$$k_1 = 2 \cdot \sqrt{k_0 \cdot J_{sr}} = 2 \cdot \sqrt{\omega_{n_{sr}}^2 \cdot J_{sr} \cdot J_{sr}} = 2 \cdot \omega_{n_{sr}} \cdot J_{sr}$$

Sređivanjem slijedi da je:

$$k_0 = \omega_{n_{sr}}^2 \cdot J_{sr}$$

odnosno:

$$k_1 = \frac{2 \cdot \omega_{n_{sr}} \cdot J_{sr}}{\omega_{n_{sr}}^2 \cdot J_{sr}} \cdot k_0 = \frac{2}{\omega_{n_{sr}}} \cdot k_0$$

Slijedom činjenice da je:

$$k_0 = k \cdot K_{poj} \cdot k_p$$

$$k_1 = k \cdot K_{poj} \cdot k_d$$

Mogu se odrediti parametri PD regulatora kako slijedi:

a) Koeficijent k_p

$$\omega_{n_{sr}}^2 \cdot J_{sr} = k \cdot K_{poj} \cdot k_p$$

$$k_p = \frac{\omega_{n_{sr}}^2 \cdot J_{sr}}{k \cdot K_{poj}}$$

b) Koeficijent k_d

$$2 \cdot \omega_{n_{sr}} \cdot J_{sr} = k \cdot K_{poj} \cdot k_d$$

$$k_d = \frac{2 \cdot \omega_{n_{sr}} \cdot J_{sr}}{k \cdot K_{poj}}$$

Jednako tako vrijedi da je:

$$k_d = \frac{2}{\omega_{n_{sr}}} \cdot k_p$$

Prijenosna funkcija $G(s)$ za $M_s(s) = 0$ sada glasi:

$$G(s) = \frac{\theta_o(s)}{\theta_z(s)} = \frac{\frac{k_0}{J_{sr}} + \frac{k_1}{J_{sr}} \cdot s}{s^2 + \frac{k_1}{J_{sr}} s + \frac{k_0}{J_{sr}}} = \frac{\omega_{n_{sr}}^2 + 2\,\omega_{n_{sr}} s}{s^2 + 2\,\omega_{n_{sr}} s + \omega_{n_{sr}}^2}$$

U promatranom slučaju potrebno je uzeti u obzir djelovanje derivacijskog člana koji uvijek donosi nadvišenje u odzivu i prijenosna funkcija $G(s)$ sastoji se od dva dijela kako je prikazano u nastavku.

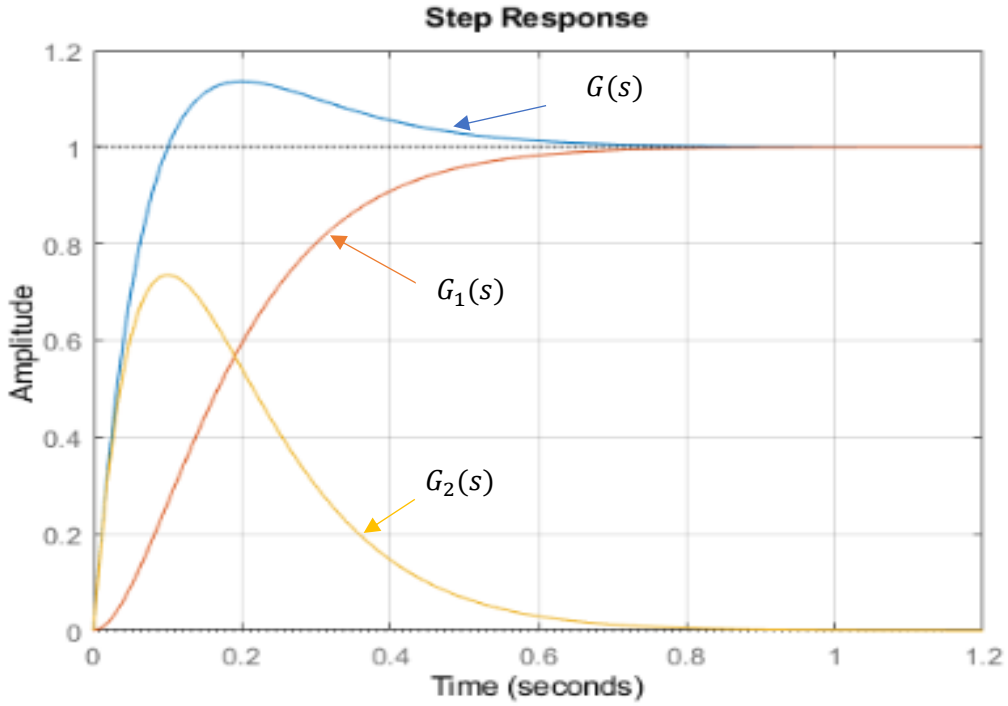
$$G(s) = \frac{\theta_o(s)}{\theta_z(s)} = G_1(s) + G_2(s) = \frac{\omega_{n_{sr}}^2}{s^2 + 2\,\omega_{n_{sr}} s + \omega_{n_{sr}}^2} + \frac{2\,\omega_{n_{sr}} s}{s^2 + 2\,\omega_{n_{sr}} s + \omega_{n_{sr}}^2}$$

Ako je npr. $\omega_{n_{sr}} = 10\,rad/sek$ tada vrijedi da je:

$$G_1(s) = \frac{100}{s^2 + 20s + 100}$$

$$G_2(s) = \frac{20s}{s^2 + 20s + 100}$$

Na slici 1.126 prikazan je prijelazna funkcija robotskog sustava s pripadajućim podacima.




```
ans = struct with fields:
         RiseTime: 0.0729
     SettlingTime: 0.5392
      SettlingMin: 0.9101
      SettlingMax: 1.1353
        Overshoot: 13.5335
       Undershoot: 0
             Peak: 1.1353
         PeakTime: 0.2000
```

Sl. 1.126 – Prijelazna funkcija robotskog sustava

Bez obzira na činjenicu da je koeficijent prigušenja $\xi_{sr} = 1$ prisutno je nadvišenje (Overshoot) od $\sigma_m = 13{,}5\%$, vrijeme prijelaznog proseca (Settling Time) iznosi $T_s = 0{,}54sek$ i vrijeme porasta signala (Rise Time) iznosi $T_r = 0{,}073sek$. Vrijednost prirodne kutne brzine $\omega_{n_{sr}}$ može se odrediti na temlju najvećg dopuštenog ubrzanja osovine motora, a to znači da se u obzir mora uzeti vrijeme porasta signala T_r (Rise Time) i analizirati odziv sustava u intervalu:

$$\frac{J_u}{3} \leq J_{sr} \leq 3 \cdot J_u$$

Naime, manji moment inercije $J_{sr} = \frac{J_u}{3}$ uzrokuje brži odziv i veći koeficijent prigušenja, a time i manje nadvišenje σ_m u odzivu (prijelazna karakteristika). Kod većeg momenta inercije $J_{sr} = 3 \cdot J_u$ vrijedi obrnuto.

Primjer br. 9

Zadan je troosni robot u položajima prethodno prikazanima u primjeru br. 8 na slici 1.102 čiji se zglobovi rotiraju pomoću istosmjernog motora i sljedeći parametri vektora konfiguracije zglobova robota:

$$q_1 = q(45^\circ, 30^\circ)$$
$$q_2 = q(51^\circ, 40^\circ)$$

Zadani su sljedeći parametri istosmjernog motora:moment inercije motora $J_m = 0{,}15\ kgm^2$ koeficijent pojačanja $K_{poj} = 0{,}2$ i konstanta motora $k = 1{,}1$. Ukupni moment inercije robotske ruke J_u zadan je sljedećom relacijom.

$$J_u = J_m + 0{,}4757 + 0{,}175 \cdot cos\,\varphi$$

Potrebno je odrediti parametre PD regulatora ($k_p\ i\ k_d$) sukladno regulacijskoj petlji položaja robotske ruke prikazane na sl. 1.125 pri čemu vrijeme porasta signala mora biti u intervalu $0{,}05 \leq T_r \leq 0{,}5\ sek$ za interval srednji moment inercije $\frac{J_{sr}}{3} \leq J_{sr} \leq 3 \cdot J_{sr}$.

Prvi korake je odrediti ukupni srednji moment inercije J_{sr} koji iznosi:

$$J_{sr} = \frac{J_u(45^\circ) + J_u(51^\circ)}{2}$$
$$= \frac{0{,}15 + 0{,}4757 + 0{,}175 \cdot cos\,45^\circ + 0{,}15 + 0{,}4757 + 0{,}175 \cdot cos\,51^\circ}{2}$$

Vrijedi:

$$J_{sr} = 0{,}7426 kgm^2$$

Interval analize iznosi:

$$\frac{0{,}7426}{3} \leq J_{sr} \leq 3 \cdot 0{,}7426$$

Odnosno

$$0{,}2475 \leq J_{sr} \leq 2{,}228$$

Neka je zadana srednja prirodna frekvencija prigušenih oscilacija $\omega_{n_{sr}} = 15\, rad/sek.$ Slijedom navedenoga mogu se odrediti parametri PD regulatora kako slijedi:

$$k_p = \frac{\omega_{n_{sr}}^2 \cdot J_{sr}}{k \cdot K_{poj}} = \frac{15^2 \cdot 0{,}7426}{1{,}1 \cdot 0{,}2} = 759{,}515$$

$$k_d = \frac{2}{\omega_{n_{sr}}} \cdot k_p = \frac{2}{15} \cdot 759{,}515 = 101{,}268$$

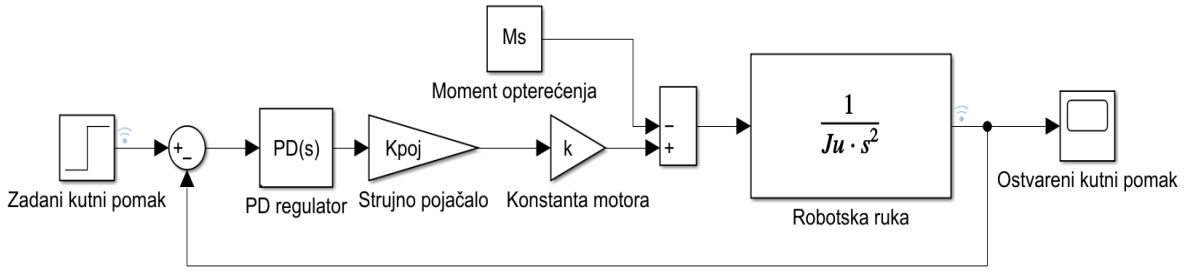
Prijenosna funkcija idelanog PD regulatora bila bi:

$$G_{PD} = 101{,}268 + 759{,}515 \cdot s$$

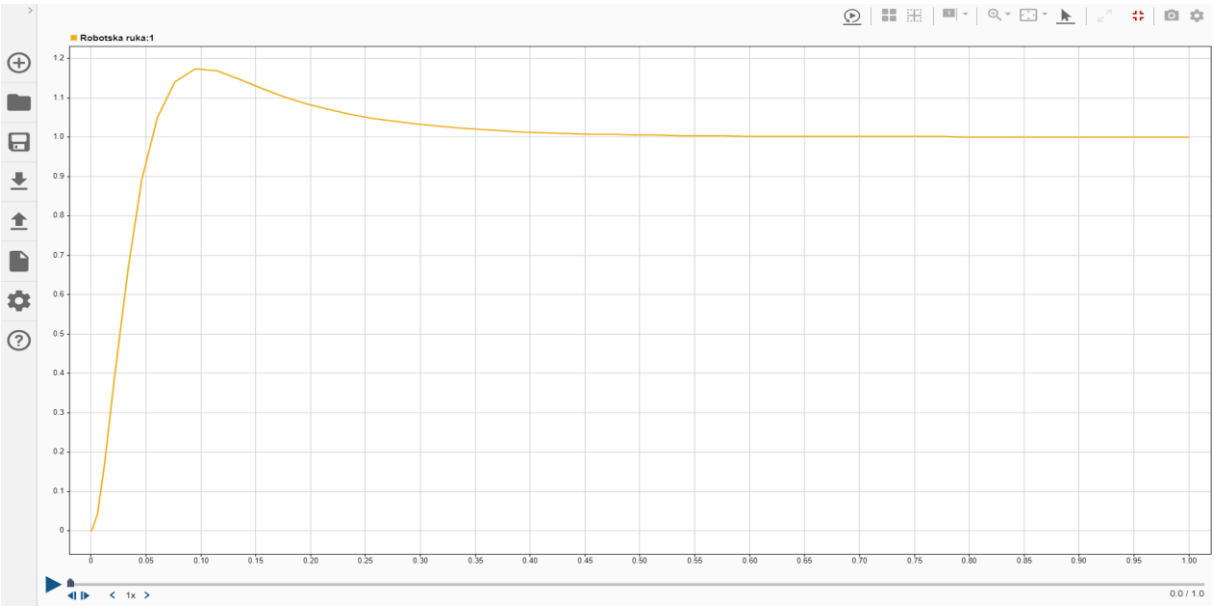
Prijenosna funkcija realnog PD regulatora bila bi:

$$G_{PD} = 101{,}268 + 759{,}515 \frac{100}{1 + 100 \cdot \frac{1}{s}}$$

Na temelju blok sheme modela sustava prikazanog na slici 1.125 odziv sustava prikazan je na slici 1.127., pričemu je $M_s(s) = 0$.

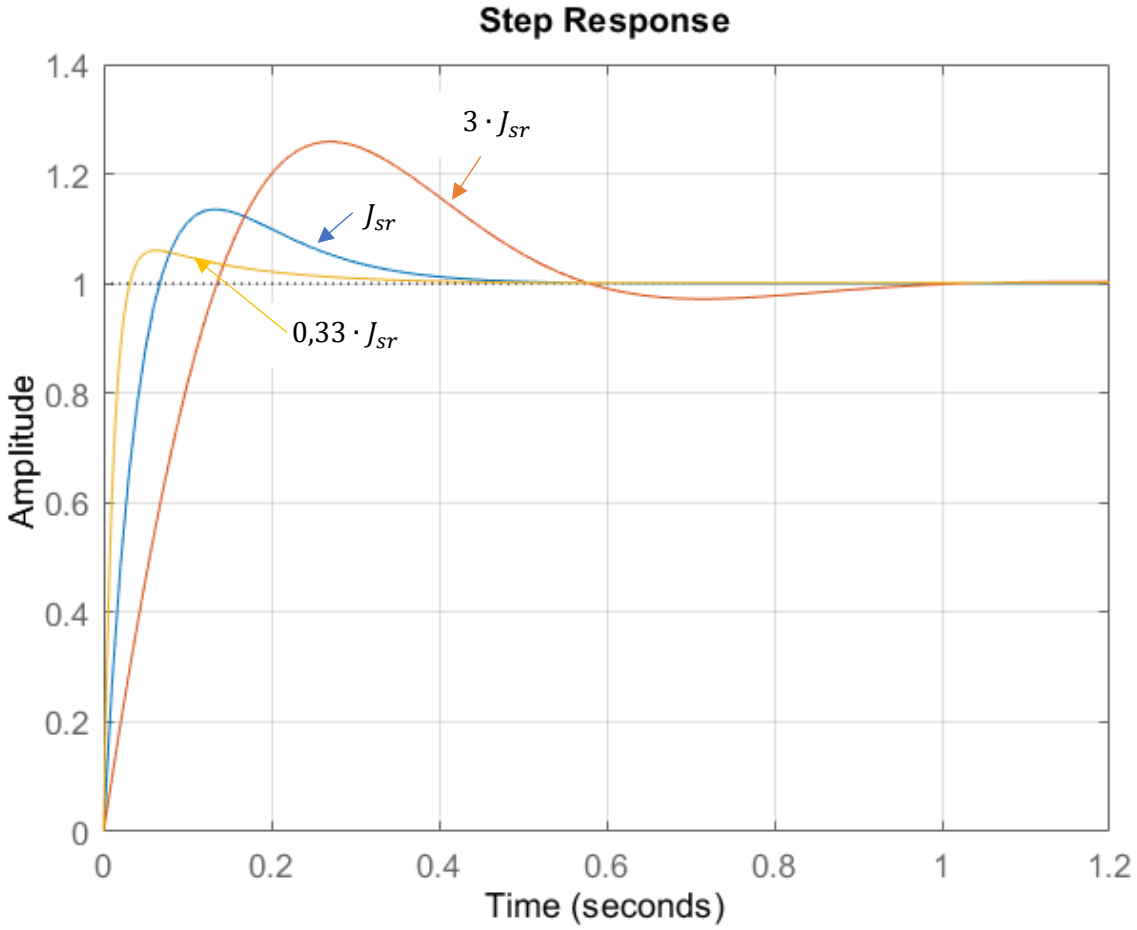


Odziv sustava – prijelazna funkcija robotske ruke



Sl. 1.127 – Odziv sustava

Na slici 1.128 prikazani su odzivi sustava u intervalu $0{,}2475 \leq J_{sr} \leq 2{,}228$.



Sl. 1.128 – Odzivi sustava u intervalu $0{,}2475 \leq J_{sr} \leq 2{,}228$

Uočava se sa slike 1.128 interval nadvišenje (Overshoot) signala koji iznosi:

$$6\% \leq \sigma_m \leq 25{,}88\%$$

Jednako tako uočava se kako je vrijem porasta signala u zadanim granicama jer se nalazi u intrvalu:

$$0{,}062 < T_r \leq 0{,}267\ sek$$

U prethodno obrađenom primjeru br. 9 nije u obzir moment $M_s(s)$ odnosno prepostavljeno je da je isti jednak nuli. No, u stavrnosti to nije tako i vrijedi relacija:

$$\theta_o(s) = \frac{(k_0 + k_1 \cdot s) \cdot \theta_z(s) - M_s(s)}{J_u \cdot s^2 + k_1 \cdot s + k_0}$$

Moment $M_s(s)$ sadrži dvije vrste momenata - dinamičkog i statičkog kako pokazuje sljedeća relacija

$$M_s(s) = M_{din}(s) + M_{sta}(s)$$

Gdje je:

$$M_{din}(s) = J_c \cdot s \cdot \Omega(s) + D \cdot \Omega^2(s)$$
$$M_{sta}(s) = M_g(s)$$

Dinamički moment $M_{din}(s)$ rezultat umnoška međuzglobnog momenta inercije J_c i kutne brzine gibanja robotske ruke $\Omega(s)$ zabrojen sa momenti djelovanja centripetalne sile $M_{cp}(s) = D \cdot \Omega^2(s)$. Ovaj momenat nije prisutan ako robotska ruka miruje tj. jednak je nuli. Statički moment $M_{sta}(s)$ posljedica je djelovanja sile teže i zato je isti jednak momentu gravitacije $M_g(s)$. Zato u stacionarnom stanju dok robot miruje u zglobu robota u izvršnom motoru prisutan je moment motora $M_m = M_g$ kako bi se savladala sila gravitacije. Moment gravitacije prema slici 1.102 iznosi:

$$M_g = -[1{,}725 \cdot sin\varphi_1 + 0{,}25 \cdot sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \cdot 9{,}81$$

Uvršatavnjme podataka iz primjera br. 9 slijedi:

$$M_{g_{11}} = -[1{,}725 \cdot sin45^\circ + 0{,}25 \cdot \sin(45^\circ + 30^\circ)] \cdot 9{,}81 = -14{,}334$$
$$M_{g_{12}} = -[1{,}725 \cdot sin51^\circ + 0{,}25 \cdot \sin(51^\circ + 40^\circ)] \cdot 9{,}81 = -15{,}603$$

Pogreška u stacionarnom stanju e_{st} određuje se na temelju sljedeće relacije:

$$e_{st} = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1 + (k_p + k_d \cdot s) \cdot k \cdot K_{poj} \cdot \frac{1}{J_{sr} \cdot s^2}} \theta_z(s)$$
$$- \lim_{s\to 0} \frac{s \cdot \frac{1}{J_{sr} \cdot s^2}}{1 + \left(k_p + k_d \cdot s\right) \cdot k \cdot K_{poj} \cdot \frac{1}{J_{sr} \cdot s^2}} M_s(s)$$

Kako je $\theta_z(s) = \frac{\theta_z}{s}$ i $M_s(s) = \frac{M_g}{s}$ sređivanjem slijedi:

$$e_{st} = \lim_{s\to 0} \frac{J_{sr} \cdot s^2 \cdot s}{J_{sr} \cdot s^2 + (k_p + k_d \cdot s) \cdot k \cdot K_{poj}} \cdot \frac{\theta_z}{s} - \lim_{s\to 0} \frac{J_{sr} \cdot s^2 \cdot s \cdot \frac{1}{J_{sr} \cdot s^2}}{J_{sr} \cdot s^2 + \left(k_p + k_d \cdot s\right) \cdot k \cdot K_{poj}} \frac{M_g}{s}$$

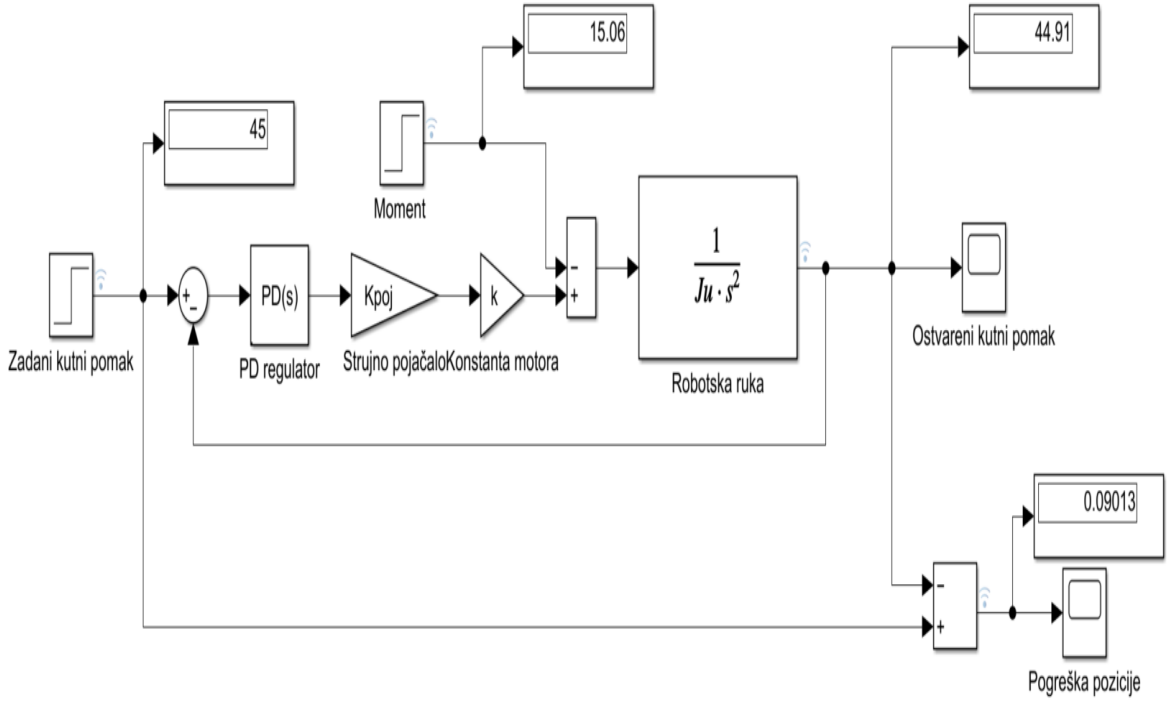
Odnosno

$$e_{st} = \lim_{s\to 0} \frac{J_{sr} \cdot s^2 \cdot \theta_z}{J_{sr} \cdot s^2 + k_0 + k_1 \cdot s} - \lim_{s\to 0} \frac{M_g}{J_{sr} \cdot s^2 + k_0 + k_1 \cdot s} = -\frac{M_g}{k_0}$$

slijedi

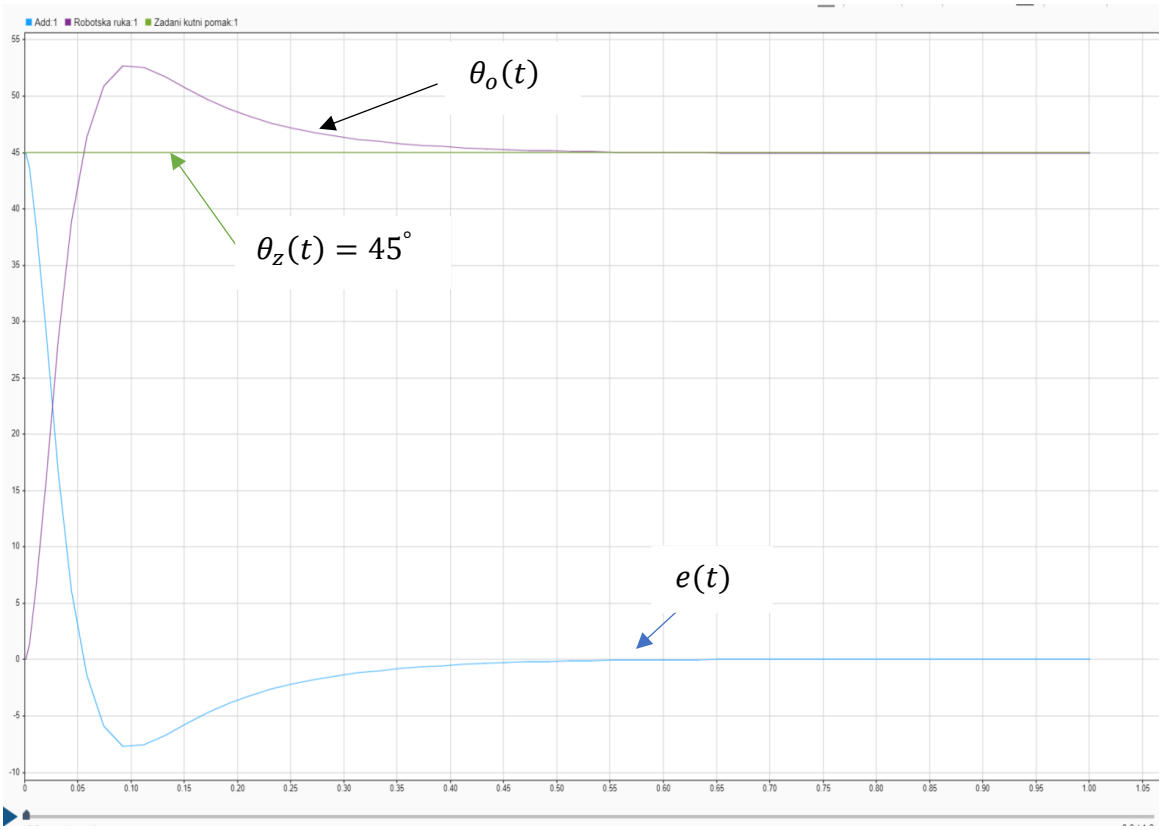
$$e_{st} = -\frac{M_g}{k_0} = -\frac{M_g}{k \cdot K_{poj} \cdot k_p} = -\frac{-15{,}603}{1{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 101{,}268} = 0.0934$$

Na slici 1.129 prikazan je simulacijski model na temelju kojeg je određena pogreška $e(t)$. Potrebno voditi računa kako se u simulacijskom modelu primjenjuje realni PD regulator, dok je kod proračuna korišten idelani PD regulator.



Sl. 1.129 – Simulacijski model za određivanje signala pogreške $e(t)$

Na slici 1.130 prikazan je odziv sustava $\theta_o(t)$ na step pobudu i signal pogreške $e(t)$.



Sl. 1.130 - Odziv sustava $\theta_o(t)$ na step pobudu i signal pogreške $e(t)$

Ovakav model regulacije primjenjuje ne primjenjuje se u slučajevim kada je potrebna zahtjevnija preciznost pozicioniranja robotske ruke i kada se potrebna zahtjevnija svojsta moment amotora

Naponsko pojačalo

Drugi način upravlja varijablama zgloba robota uključuje podređenu regulacijsku petlju brzine gibanja zgloba robota, a u tu svrhu koristi se naponsko pojačalo u krugu napajanja motora. Izlazni napon pojačala proporcionaln je ulaznom naponu, a pojačalo je sposobno dati motoru potrebnu struju. Prepostavka upravljanja je da se djelovanje električne vremenske konstante $T_a$može zanemariti jer je $R_a \gg L_a$i prijenosna funkcija istosmjernog elektromotora $G_m(s)$ poprima sljedeći oblik:

$$G_m(s) = \frac{\Omega(s)}{U_m(s)} = \frac{K_m}{1 + T_m \cdot s}$$

Gdje je:

$\theta_o(s)$ – ostavreni kutni pomak

$U_m(s)$ – napon motora

$K_m = \frac{1}{k}$, k – konstanta motora

T_m – mehanička konstanta motora

Pri čemu je:

$$T_m = \frac{J_u \cdot R_a}{k^2}$$

Gdje je:

J_u - ukupni moment inercije

R_a – otpor armature motora

Jednako tako prijenosna funkcija momenta opterećenja $G_{ms}(s)$ glasi:

$$G_{ms}(s) = \frac{\Omega(s)}{M_s(s)} = \frac{K_m^2 \cdot R_a}{1 + T_m \cdot s} = \frac{K_{ma}}{1 + T_m \cdot s}$$

Prijenosna funkcija $G_P(s)$ naponskog pojačala određena je sljedećom relacijom:

$$G_P(s) = \frac{U_{poj}(s)}{U_R(s)} = K_{poj}$$

Gdje je:

K_{poj} – koeficijent pojačanja naponskog pojačala

U_{poj} – napon pojačala

$U_R(s)$ – napona na izlazu iz regulator

Za regulaciju sustava koristi se proporcionalni regulator (P regulator) čija je prijenosna funcija $G_R(s)$ jednaka:

$$G_R(s) = \frac{U_R(s)}{E(s)} = \frac{U_R(s)}{U_u(s) - U_\Omega(s)} = K_r$$

Gdje je:

K_r – proporcionalna konstanta regulatora

$E(s)$ – regulacijsko odstupanje

$U_u(s)$ – izlazni napon pretavarača

$U_\Omega(s)$ – napon na izlazu iz senzora brzine

Uobičajno je da se brzina vrtnje mjeri tahogeneratorom ili inkrementalnim davačem impulsa. Prijenosna funkcija senzora $G_{se}(s)$ određena je sljedećom relacijom:

$$G_{se}(s) = \frac{U_\Omega(s)}{\Omega(s)} = \frac{K_{se}}{1 + T_{se} \cdot s}$$

Gdje je:

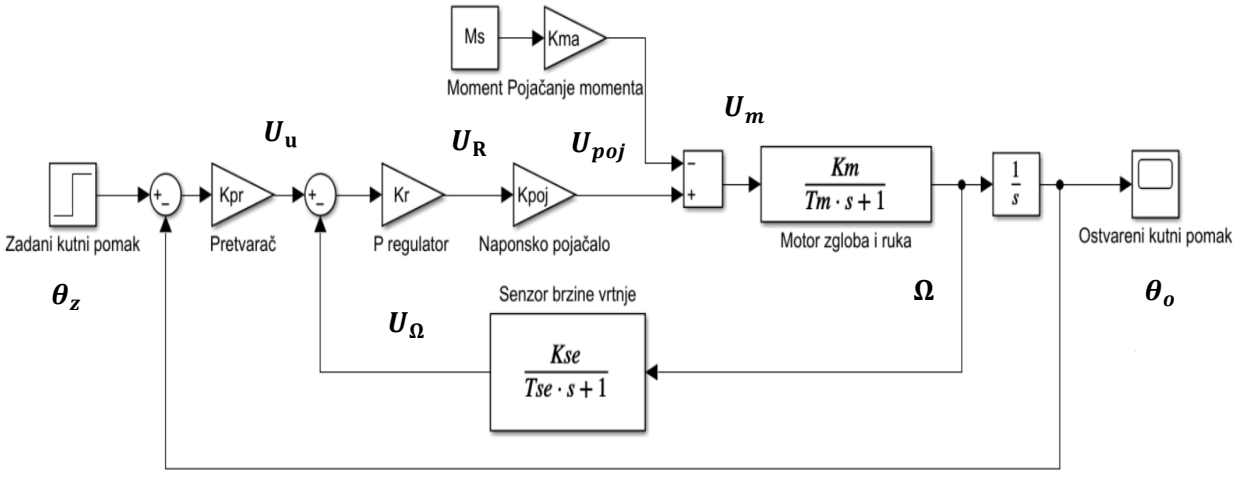
K_{sen} – pojačanje senzora

T_{se} - vremenska konstana senzora

Na ulazu u regulacijsku petlju koristi se pretvarač zadanog kutnog pomaka $\theta_z(s)$ u naponsku veličinu $U_u(s)$ na izlazu iz pretvarača. Prijenosna funkcija pretavrača $G_{pr}(s)$ glasi:

$$G_{pr}(s) = \frac{U_u(s)}{\theta_z(s) - \theta_o(s)} = K_{pr}$$

Na slici 1.131 prikazan je sustav upravljanja varijablama zgloba robota na temelju potrebne kutne brzine Ω. U blok shemi regulacijskog kruga koristi se proporcionalni regulator (P regulator) položaja robotske ruke i naponsko pojačalo kao ekvivalent regulacijskoj petlji brzine vrtnje zgloba, istosmjerni elektromotor, senzor brzine vrtnje i pretvarač.



Sl. 1.131 - Regulacijska petalja položaja robotske ruke

U promatranom slučaju regulacije prikazanom na slici 1.131 potrebno je prvo odrediti sljedeće prijenosne funkcije $G_{u\Omega}(s) = \frac{\Omega(s)}{U_u(s)}$ zatvorene regulacijske petlje brzine vrtnje $\Omega(s)$ u odnosu na referentnu vrijednost $U_u(s)$ odnosno prijenosnu funkciju $G_{u\mathrm{M}}(s) = \frac{\Omega(s)}{M_s(s)}$ zatvorene regulacijske petlje brzine vrtnje $\Omega(s)$ u odnosu na poremećajnu veličinu momenta $M_s(s)$. Slijedom prije prikazanog vrijede slijedeće jednadžbe:

$$\Omega(s) = G_m(s) \cdot U_m(s) = G_m(s) \cdot \left[U_{poj}(s) - K_{ma} \cdot M_s(s)\right]$$

$$U_{poj}(s) = K_{poj} \cdot U_R(s)$$

$$U_R(s) = K_r \cdot [U_u(s) - U_\Omega(s)]$$

$$U_\Omega(s) = G_{se}(s) \cdot \Omega(s)$$

Uvrštavnjem dobija se:

$$U_{poj}(s) = K_{poj} \cdot K_r \cdot [U_u(s) - G_{se}(s) \cdot \Omega(s)]$$

Odnosno

$$\Omega(s) = G_m(s) \cdot \left\{K_{poj} \cdot K_r \cdot [U_u(s) - G_{se}(s) \cdot \Omega(s)] - K_{ma} \cdot M_s(s)\right\}$$

Slijedi:

$$\Omega(s) = G_m(s) \cdot K_{poj} \cdot K_r \cdot U_u(s) - G_m(s) \cdot K_{poj} \cdot K_r \cdot G_{se}(s) \cdot \Omega(s) - G_m(s) \cdot K_{ma} \cdot M_s(s)$$

Odnosno:

$$\Omega(s) \cdot \left[1 + G_m(s) \cdot K_{poj} \cdot K_r \cdot G_{se}(s)\right] = G_m(s) \cdot K_{poj} \cdot K_r \cdot U_u(s) - G_m(s) \cdot K_{ma} \cdot M_s(s)$$

Može se pisati:

$$\Omega(s) = \frac{G_m(s) \cdot K_{poj} \cdot K_r}{1 + G_m(s) \cdot K_{poj} \cdot K_r \cdot G_{se}(s)} \cdot U_u(s) - \frac{G_m(s) \cdot K_{ma}}{1 + G_m(s) \cdot K_{poj} \cdot K_r \cdot G_{se}(s)} M_s(s)$$

Prema tome vrijedi:

$$G_{u\Omega}(s) = \frac{\Omega(s)}{U_u(s)} = \frac{G_m(s) \cdot K_{poj} \cdot K_r}{1 + G_m(s) \cdot K_{poj} \cdot K_r \cdot G_{se}(s)}$$

$$G_{u\mathrm{M}}(s) = \frac{\Omega(s)}{M_s(s)} - \frac{G_m(s) \cdot K_{ma}}{1 + G_m(s) \cdot K_{poj} \cdot K_r \cdot G_{se}(s)}$$

U analiziranom primjeru regulacijske petlje opravdano je zanemariti djelovanje vremenske konstante mjernog člana (senzora) jer je $T_{se} \ll T_m$. U tom slučaju vrijedi da je $G_{se}(s) \cong K_{se}$ odnosno može se pisati kako je:

$$G_{u\Omega}(s) = \frac{\Omega(s)}{U_u(s)} = \frac{G_m(s) \cdot K_{poj} \cdot K_r}{1 + G_m(s) \cdot K_{poj} \cdot K_r \cdot K_{se}}$$

$$G_{u\mathrm{M}}(s) = \frac{\Omega(s)}{M_s(s)} = -\frac{G_m(s) \cdot K_{ma}}{1 + G_m(s) \cdot K_{poj} \cdot K_r \cdot K_{se}}$$

Slijedom navedenoga vrijedi:

$$G_{u\Omega}(s) = \frac{\Omega(s)}{U_u(s)} = \frac{G_m(s) \cdot K_{poj} \cdot K_r}{1 + G_m(s) \cdot K_{poj} \cdot K_r \cdot K_{se}} = \frac{\frac{K_m}{1 + T_m \cdot s} \cdot K_{poj} \cdot K_r}{1 + \frac{K_m}{1 + T_m \cdot s} \cdot K_{poj} \cdot K_r \cdot K_{se}}$$

Odnosno

$$G_{u\Omega}(s) = \frac{K_m \cdot K_{poj} \cdot K_r}{1 + K_m \cdot K_{poj} \cdot K_r \cdot K_{se} + T_m \cdot s}$$

Neka je:

$$k_0 = \frac{1}{1 + K_m \cdot K_{poj} \cdot K_r \cdot K_{se}}$$

$$k_1 = K_m \cdot K_{poj} \cdot K_r$$

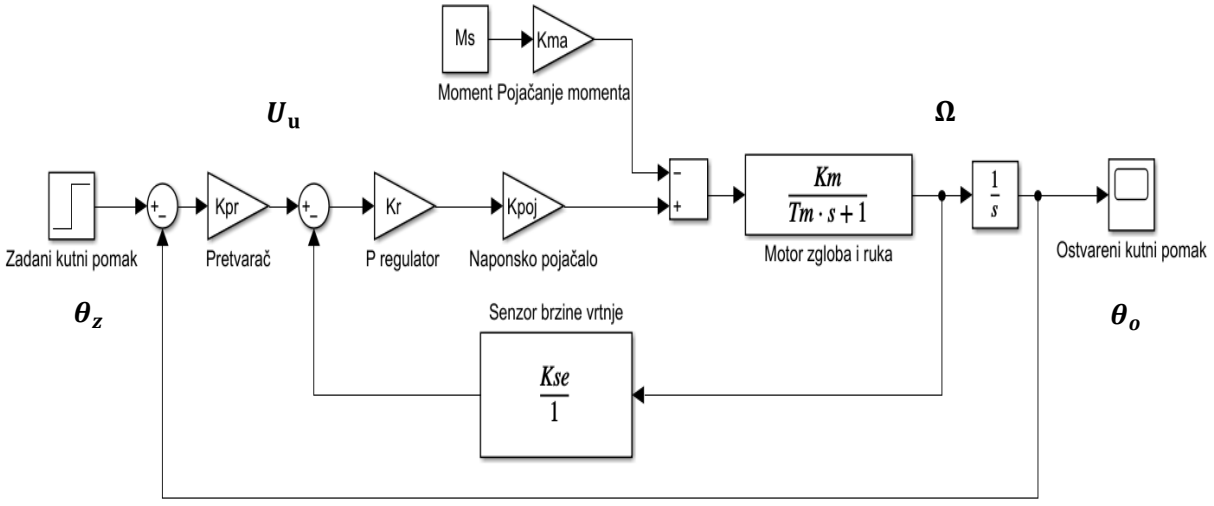
Tada vrijedi:

$$G_{u\Omega}(s) = \frac{\Omega(s)}{U_u(s)} = k_1 \frac{k_0}{1 + k_0 \cdot T_m \cdot s}$$

Analogno će vrijediti:

$$G_{u\mathrm{M}}(s) = \frac{\Omega(s)}{M_s(s)} = -K_{ma} \frac{k_0}{1 + k_0 \cdot T_m \cdot s}$$

Blok shema sustava sada poporima sljedći oblik prikazana na slici 1.132.



Sl. 1.132 – Modificirana regulacijska petalja položaja robotske ruke

Na temelju slike 1.131 vrijedi:

$$U_u(s) = K_{pr} \cdot [\theta_z(s) - \theta_o(s)]$$

$$\theta_0(s) = \frac{\Omega(s)}{s}$$

Jednako tako vrijedi:

$$\Omega(s) = k_1 \frac{k_0}{1 + k_0 \cdot T_m \cdot s} U_u(s) - K_{ma} \frac{k_0}{1 + k_0 \cdot T_m \cdot s} M_s(s)$$

Može se sada pisati:

$$s \cdot \theta_0(s) = k_1 \frac{k_0}{1 + k_0 \cdot T_m \cdot s} K_{pr} \cdot [\theta_z(s) - \theta_o(s)] - K_{ma} \frac{k_0}{1 + k_0 \cdot T_m \cdot s} M_s(s)$$

slijedi

$$\theta_0(s) = \frac{k_1 \cdot k_0 \cdot K_{pr}}{s(1 + k_0 \cdot T_m \cdot s)} \theta_z(s) - \frac{k_1 \cdot k_0 \cdot K_{pr}}{s(1 + k_0 \cdot T_m \cdot s)} \theta_o(s) - \frac{K_{ma} \cdot k_0}{s(1 + k_0 \cdot T_m \cdot s)} M_s(s)$$

Odnosno

$$\theta_0(s) \cdot \left[1 + \frac{k_1 \cdot k_0 \cdot K_{pr}}{s(1 + k_0 \cdot T_m \cdot s)}\right] = \frac{k_1 \cdot k_0 \cdot K_{pr} \cdot \theta_z(s) - K_{ma} \cdot k_0 \cdot M_s(s)}{s(1 + k_0 \cdot T_m \cdot s)}$$

Neka je $K_g = k_1 \cdot k_0 \cdot K_{pr}$ tada vrijedi:

$$\theta_0(s) \cdot \left[1 + \frac{K_g}{s(1 + k_0 \cdot T_m \cdot s)}\right] = \frac{K_g \cdot \theta_z(s) - K_{ma} \cdot k_0 \cdot M_s(s)}{s(1 + k_0 \cdot T_m \cdot s)}$$

Iz čega slijedi:

$$\theta_0(s) = \frac{\frac{K_g \cdot \theta_z(s) - K_{ma} \cdot k_0 \cdot M_s(s)}{s(1 + k_0 \cdot T_m \cdot s)}}{1 + \frac{K_g}{s(1 + k_0 \cdot T_m \cdot s)}} = \frac{K_g \cdot \theta_z(s) - K_{ma} \cdot k_0 \cdot M_s(s)}{s(1 + k_0 \cdot T_m \cdot s) + K_g}$$

Odnosno vrijedi:

$$\theta_0(s) = \frac{K_g}{k_0 \cdot T_m \cdot s^2 + s + K_g} \cdot \theta_z(s) - \frac{K_{ma} \cdot k_0}{k_0 \cdot T_m \cdot s^2 + s + K_g} \cdot M_s(s)$$

Karakteristična jednadžba glasi:

$$A(s) = k_0 \cdot T_m \cdot s^2 + s + K_g = 0$$

Odnosno vrijedi jednakost:

$$s^2 + \frac{1}{k_0 \cdot T_m} \cdot s + \frac{K_g}{k_0 \cdot T_m} = s^2 + 2\,\xi\omega_n s + \omega_n^2$$

Slijedi:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_g}{k_0 \cdot T_m}}$$

$$\xi = \frac{\frac{1}{k_0 \cdot T_m}}{2\omega_n} = \frac{\frac{1}{k_0 \cdot T_m}}{2\sqrt{\frac{K_g}{k_0 \cdot T_m}}} = \frac{1}{2\sqrt{K_g \cdot k_0 \cdot T_m}}$$

Kao i u prethodnom slučaju neka je $\xi = \xi_{sr} = 1$. Sada vrijedi:

$$\xi = \frac{1}{2\sqrt{K_g \cdot k_0 \cdot T_m}} = 1$$

odnosno

$$K_g \cdot k_0 \cdot T_m = \frac{1}{4}$$

Kako je

$$k_0 = \frac{1}{1 + K_m \cdot K_{poj} \cdot K_r \cdot K_{se}}$$

$$k_1 = K_m \cdot K_{poj} \cdot K_r$$

Možemo pisati da je:

$$k_0 = \frac{1}{1 + k_1 \cdot K_{se}}$$

Odnosno vrijedi:

$$K_g = k_1 \cdot k_0 \cdot K_{pr} = k_1 \cdot \frac{1}{1 + k_1 \cdot K_{se}} \cdot K_{pr}$$

Sada slijedi:

$$K_g \cdot k_0 \cdot T_m = k_1 \cdot \frac{1}{1 + k_1 \cdot K_{se}} \cdot K_{pr} \cdot \frac{1}{1 + k_1 \cdot K_{se}} \cdot T_m = \frac{1}{4}$$

Sređivanjem dobijamo:

$$\frac{k_1}{(1 + k_1 \cdot K_{se})^2} = \frac{1}{4K_{pr} \cdot T_m}$$

Odnosno

$$(1 + k_1 \cdot K_{se})^2 = 4 \cdot K_{pr} \cdot T_m \cdot k_1$$

Slijedi kvadratna jednadžba

$$(K_{se} \cdot k_1)^2 + \left(2 \cdot K_{se} - 4 \cdot K_{pr} \cdot T_m\right) \cdot k_1 + 1 = 0$$

Sređivanjem dobijamo:

$$k_1^2 + 2\frac{K_{se} - 2 \cdot K_{pr} \cdot T_m}{K_{se}^2} \cdot k_1 + \frac{1}{K_{se}^2} = 0$$

Neka je:

$$p = 2\frac{K_{se} - 2 \cdot K_{pr} \cdot T_m}{K_{se}^2}$$

$$q = \frac{1}{K_{se}^2}$$

Rješenje kvadratne jednadžbe tada glasi:

$$k_{1_{1,2}} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Slijedi:

$$k_{1_{1,2}} = -\frac{K_{se} - 2 \cdot K_{pr} \cdot T_m}{K_{se}^2} \pm \sqrt{\left(\frac{K_{se} - 2 \cdot K_{pr} \cdot T_m}{K_{se}^2}\right)^2 - \frac{1}{K_{se}^2}}$$

Sređivanjem dobijamo:

$$k_{1_{1,2}} = -\frac{K_{se} - 2 \cdot K_{pr} \cdot T_m}{K_{se}^2} \pm \sqrt{\frac{K_{se}^2 - 4 \cdot K_{se} \cdot K_{pr} \cdot T_m + 4 \cdot K_{pr}^2 \cdot T_m^2}{K_{se}^4} - \frac{1}{K_{se}^2}}$$

odnosno

$$k_{1_{1,2}} = \frac{2 \cdot K_{pr} \cdot T_m - K_{se}}{K_{se}^2} \pm \sqrt{\frac{4 \cdot (K_{pr}^2 \cdot T_m^2 - K_{se} \cdot K_{pr} \cdot T_m)}{K_{se}^4}}$$

Daljnjim sređivanjem dobija se:

$$k_{1_{1,2}} = \frac{2 \cdot K_{pr} \cdot T_m - K_{se}}{K_{se}^2} \pm \frac{2 \cdot K_{pr} \cdot T_m}{K_{se}^2} \sqrt{1 - \frac{K_{se}}{K_{pr} \cdot T_m}}$$

Kako je $K_r = \frac{k_1}{K_m \cdot K_{poj}}$ završmo slijedi:

$$K_r = \frac{1}{K_m \cdot K_{poj}} \left(\frac{2 \cdot K_{pr} \cdot T_m - K_{se}}{K_{se}^2} \pm \frac{2 \cdot K_{pr} \cdot T_m}{K_{se}^2} \sqrt{1 - \frac{K_{se}}{K_{pr} \cdot T_m}}\right)$$

Pri čemu mora vrijediti

$$K_{pr} \cdot T_m \geq K_{se}$$

Analogno prethodnom primjeru u pogledu pogreške u stacionarnom stanju e_{st} koja se može zapisati i na sljedeći način:

$$e_{st} = E_{s \to 0}(s) = \theta_z(0) - \theta_o(0)$$

Pri čemu je:

$$M_s(0) = M_g$$

Vrijedi:

$$\theta_0(0) = \frac{K_g}{k_0 \cdot T_m \cdot 0^2 + 0 + K_g} \cdot \theta_z(0) - \frac{K_{ma} \cdot k_0}{k_0 \cdot T_m \cdot 0^2 + 0 + K_g} \cdot M_s(0)$$

odnosno

$$\theta_0(0) = \theta_z(s) - \frac{K_{ma} \cdot k_0}{K_g} M_g$$

Može se pisati:

$$e_{st} = \theta_z(0) - \theta_o(0) = -\frac{K_{ma} \cdot k_0}{K_g} M_g$$

Za razliku od prethodnog primjera u ovom slučaju nadvišenje u odzivu iznosi nula ($\sigma_m = 0$), a u slučaju kada je $M_s(s) = 0$ tada je statička pogreška jednako tako jednaka nuli ($e_{st} = 0$).

Primjer br. 10

Zadan je troosni robot u položajima prethodno prikazanima u primjeru br. 8 na slici 1.102 čiji se zglobovi rotiraju pomoću istosmjernog motora. Zadani su sljedeći prametri: ukupni moment inercije motora $J_u = J_{sr} = 0{,}7426 kgm^2$, koeficijent pretvarača $K_{pr} = 1{,}5$, koeficijent pojačanja $K_{poj} = 1$, konstanta motora $k = 1{,}1$, otpor armature motora $R_a = 2\Omega$, konstanta pretvarača $K_{pr} = 1{,}5$, konstanta senzora $K_{se} = 0{,}5$ vremenska konstanta senzora iznosi $T_{se} = 0{,}05\ sek$. Potrebno je odrediti pojačanje P regulatora K_r tako da je prijelazni proces monoton odnosno da je koeficijet prigušenja jednak jedinici $\xi = \xi_{sr} = 1$ i odrediti odziv sustava za interval srednjeg moment inercije $\frac{J_{sr}}{3} \leq J_{sr} \leq 3 \cdot J_{sr}$ .Potrebno je odrediti interval vremena porasta signala T_r u intervalu srednjeg momenta inercije J_{sr} , a jednako tako potrebno je odrediti statičku pogrešku e_{st} za moment gravitacije $M_g = -15{,}603 Nm$.

Prvi kora je odrediti mehničku vremensku konstantu T_m:

$$T_m = \frac{J_u \cdot R_a}{k^2} = \frac{0{,}7426 \cdot 2}{1{,}1^2} = 1{,}2274\ sek$$

Odnosno konstantu K_m:

$$K_m = \frac{1}{k} = \frac{1}{1{,}1} = 0{,}9091$$

Uočavamo kako je zadovoljen kriterij $T_{se} \ll T_m$ jer je $0{,}05 \ll 1{,}2274$. Isto tako potrebno je provjeriti je li $K_{pr} \cdot T_m \geq K_{se}$, i uvrštavanjme vrijednosti slijedi $1{,}5 \cdot 1{,}2274 \geq 0{,}5$. Ukoliko su zadovoljeni prije navedeni kriteriji može se izračunati vrijednost pojačanja K_r koja iznosi:

$$K_r = \frac{1}{K_m \cdot K_{poj}} \left(\frac{2 \cdot K_{pr} \cdot T_m - K_{se}}{K_{se}^2} \pm \frac{2 \cdot K_{pr} \cdot T_m}{K_{se}^2} \sqrt{1 - \frac{K_{se}}{K_{pr} \cdot T_m}}\right)$$

Odnosno

$$K_r = \frac{1}{0{,}9091 \cdot 1} \left(\frac{2 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}2274 - 0{,}5}{0{,}5^2} \pm \frac{2 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}2274}{0{,}5^2} \sqrt{1 - \frac{0{,}5}{1{,}5 \cdot 1{,}2274}}\right)$$

Slijedi:

$$K_r = 14{,}002 \pm 12{,}454$$

Možemo pisati da je:

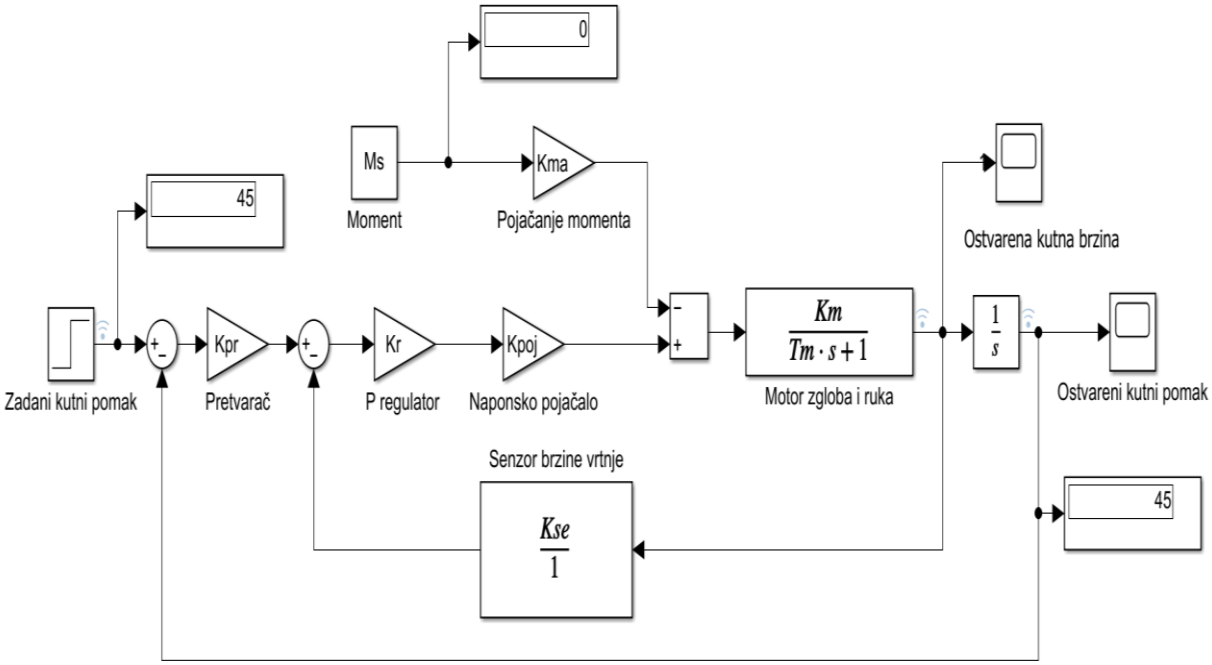
$$K_{r_1} = 26{,}456$$

$$K_{r_1} = 1{,}548$$

Osim prije navedenoga potrebno je izračunati i vrijednost koeficijenta K_{ma} koji iznosi:

$$K_{ma} = K_m^2 \cdot R_a = 0{,}9091 \cdot 2 = 1{,}8182$$

Na slici 1.133 prikazan se simulacijski model provjere rezultata za zadani kut $\theta_z = 45^\circ$ i neopterećeni sustav s momentom $M_s = 0$ za koeficijent pojačanja regulatora $K_{r_1} = 26{,}456$.



Sl. 1.133 - Modificirana regulacijska petalja položaja robotske ruke (simulacijski model)

Kako bi se odredila pogreška pozicije u stacionatnom stanju e_{st} potregno je odrediti vrijednosti koeficijenta k_0 i K_g kako slijedi:

$$k_1 = K_m \cdot K_{poj} \cdot K_r = 0{,}9091 \cdot 1 \cdot 26{,}456 = 24{,}05$$

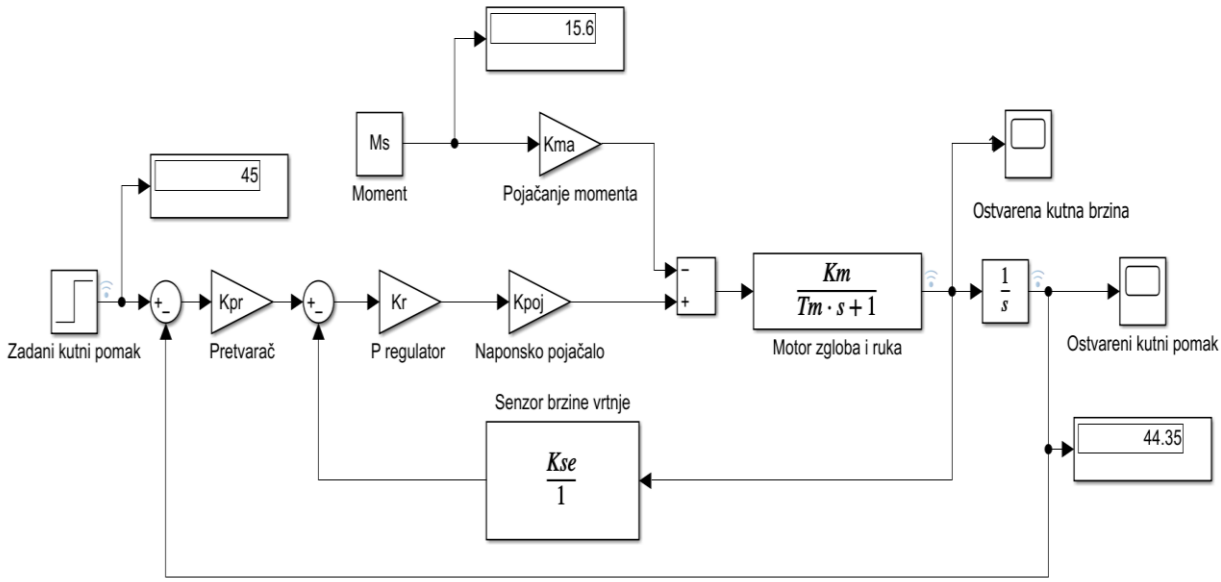
$$k_0 = \frac{1}{1 + k_1 \cdot K_{se}} = \frac{1}{1 + 24{,}05 \cdot 0{,}5} = 0{,}0768$$

$$K_g = k_1 \cdot k_0 \cdot K_{pr} = 24{,}05 \cdot 0{,}0768 \cdot 1{,}5 = 2{,}77$$

Odnosno vrijedi:

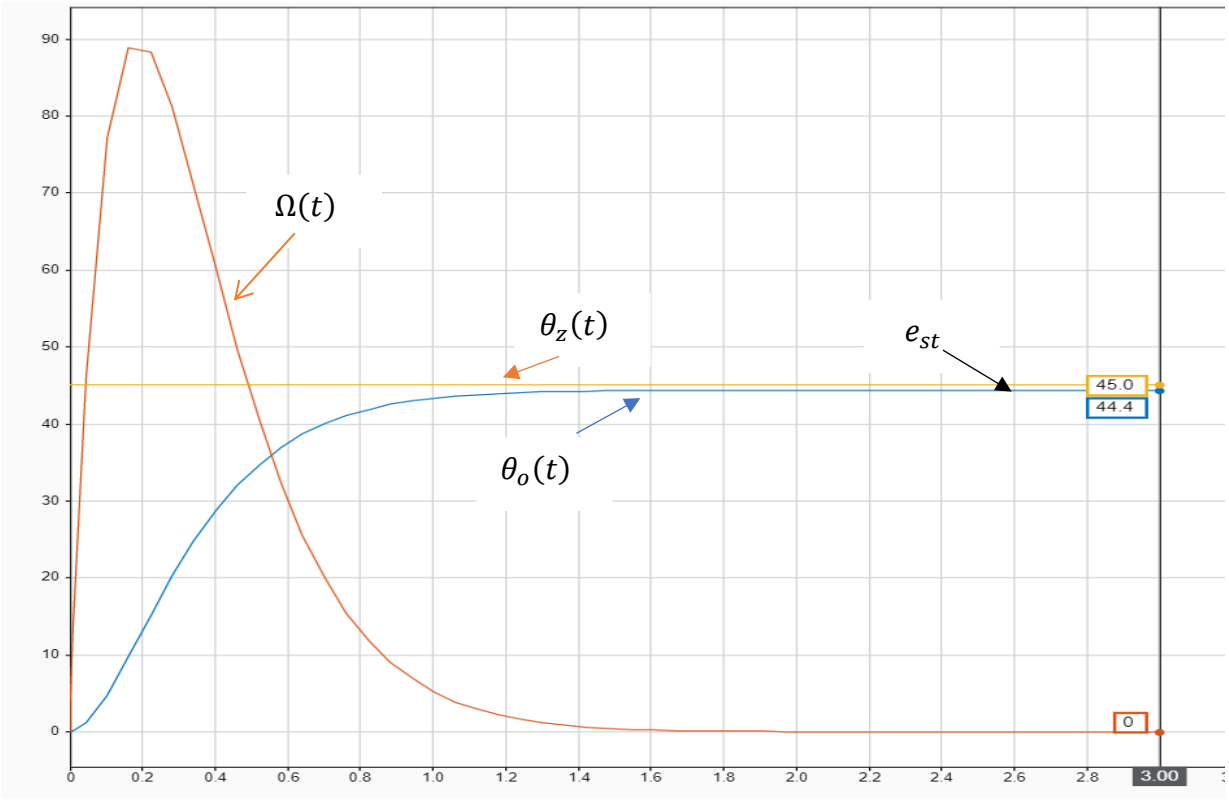
$$e_{st} = -\frac{K_{ma} \cdot k_0}{K_g} M_g = -\frac{1{,}653 \cdot 0{,}0768}{2{,}77} \cdot (-15{,}603) = 0{,}715$$

Na slici 1.134 prikazan je simulacijski model pri kojem je $M_s = M_g$ i prisutna je statička pogreška na način kako je prikazano na slici 1.135.



Sl. 1.134 - Modificirana regulacijska petalja položaja robotske ruke (simulacijski model s opterećenjem)

Na slici 1.135 prikazan je odziv kutne brzine $\Omega(t)$ na step pobudu.



Sl. 1.135 - Odziv sustava - pomak $\theta_o(t)$ i kutna brzina $\Omega(t)$ na step pobudu

Uočava se sa slike 1.135 kako je odziv sustava $\theta_o(t)$ monoton i prisutna je statička pogreška e_{st}. Odziv sustava opisan je sljedećom relacijom u koju će se uvrstiti prethodno određeni koeficijenti.

$$\theta_0(s) = \frac{K_g}{k_0 \cdot T_m \cdot s^2 + s + K_g} \cdot \theta_z(s) - \frac{K_{ma} \cdot k_0}{k_0 \cdot T_m \cdot s^2 + s + K_g} \cdot M_s(s)$$

Slijedi:

$$\theta_0(s) = \frac{2{,}77}{0{,}0768 \cdot 1{,}2274 \cdot s^2 + s + 2{,}77} \cdot \theta_z(s) - \frac{1{,}8182 \cdot 0{,}0768}{0{,}0768 \cdot 1{,}2274 \cdot s^2 + s + 2{,}77} \cdot M_s(s)$$

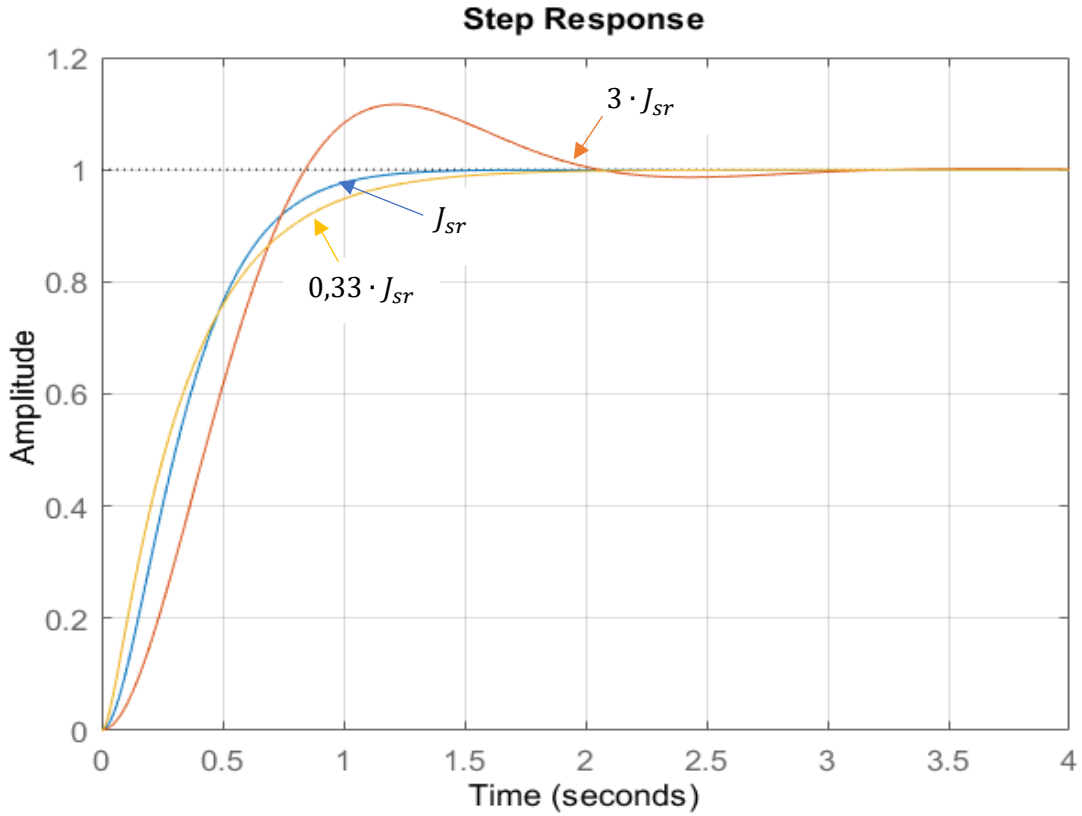
Odnosno

$$\theta_0(s) = \frac{2{,}77}{0{,}09423 \cdot s^2 + s + 2{,}77} \cdot \theta_z(s) - \frac{0{,}127}{0{,}09423 \cdot s^2 + s + 2{,}77} \cdot M_s(s)$$

Završno se može pisati:

$$\theta_0(s) = \frac{29{,}39}{s^2 + 10{,}61 \cdot s + 29{,}39} \cdot \theta_z(s) - \frac{1{,}346}{s^2 + 10{,}61 \cdot s + 29{,}39} \cdot M_s(s)$$

Na slici 1.136 prikazan je odziv sustava $\theta_o(t)$ na step funkciju bez opterećenja za interval srednjeg moment inercije $0{,}2475 \leq J_{sr} \leq 2{,}228$.



Sl. 1.136 - Odzivi sustava u intervalu $0{,}2475 \leq J_{sr} \leq 2{,}228$

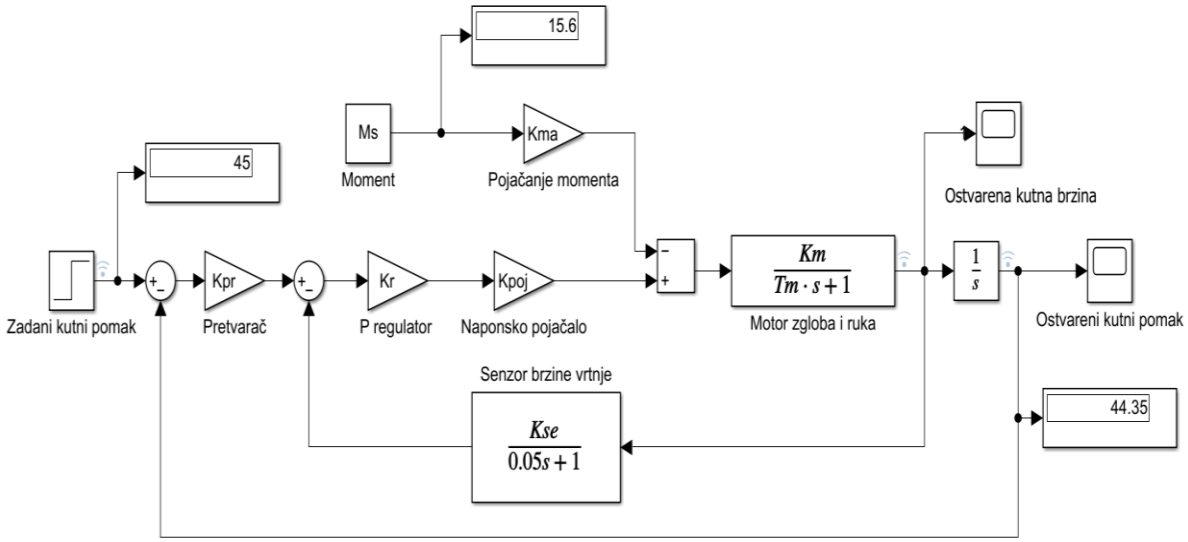
Uočava se sa slike 1.136 interval nadvišenje (Overshoot) samo u jednom slučaju i iznosi $\sigma_m = 11{,}62\%$, a jednako tako uočava se kako je vrijeme porasta signala nalazi u intrvalu:

$$1{,}22 \leq T_r \leq 2{,}68\ sek$$

Vrijeme smirivanja signala T_S nalazi se u intervalu:

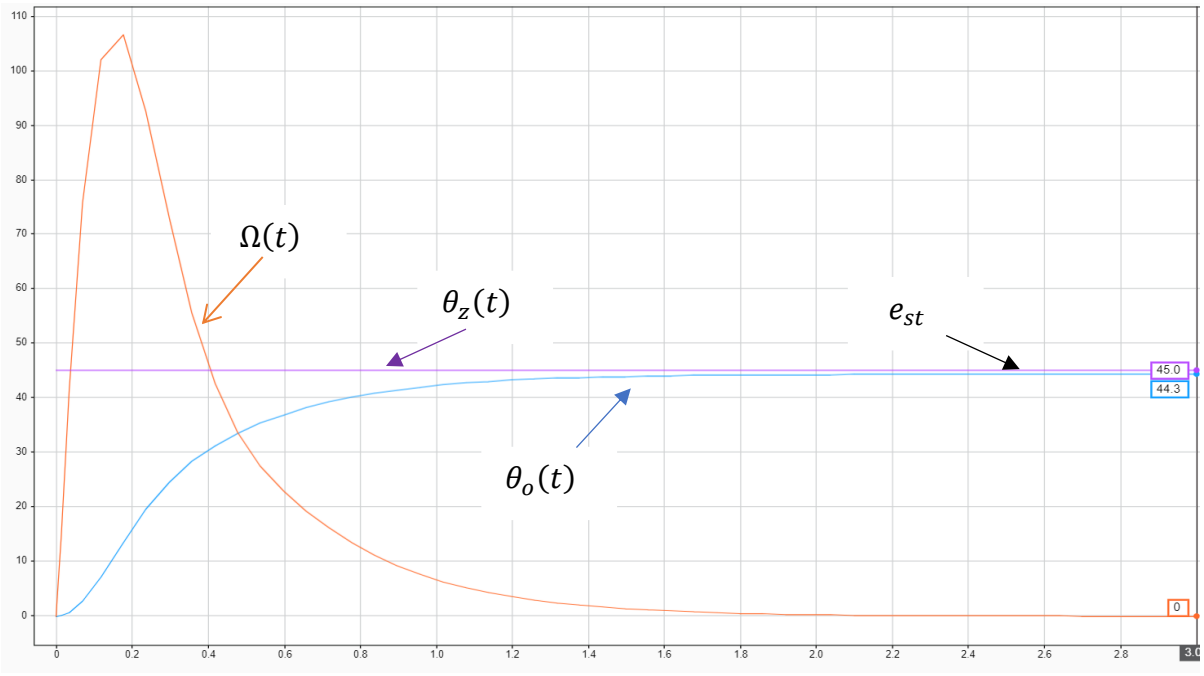
$$1{,}03 \leq T_S \leq 1{,}87\ sek$$

Na slici 1.137 prikazan je regulacijska petlja robotske ruke (simulacijski model) sa zadanim vremenskom konstantom senzora $T_{se} = 0{,}05\ sek$



Sl. 1.137 - Modificirana regulacijska petlja položaja robotske ruke (simulacijski model s opterećenjem i s vremenskom konstantom senzora)

Na slici 1.138 prikazan je odziv sustava koji se značajno ne mijenja u odnosu na sliku 1.135



Sl. 1.138 – Odzive sustava - pomak $\theta_o(t)$ i kutna brzina $\Omega(t)$ na step pobudu

U primjeru br. 10 uvedena je regulacija brzine vrtnje $\Omega(t)$ kako bi se otklonilo neželjeno nadvišenje σ_m u odzivu signala – pomak $\theta_o(t)$ pri srednjem ukupnom momentu inercije J_{sr}. Ali i dalje je ostala ovisnost mehaničke vremenske konstante T_m o ukupnom momentu inercije J_u što rezultira nepoželjnom ovisnošću koeficijent prigušenja ξ o promjenljivom momentu inercije $\frac{J_{sr}}{3} \leq J_u \leq 3 \cdot J_{sr}$.

I u ovom slučaju kao i u primjeru br. 9 postoji pogreška položaja u stacionarnom stanju e_{st} zbog djelovanja poremećajnog momenta M_s koji je u stanju ravnoteže jednak momentu gravitacija M_g. Rješenje za otklanjanje statičke pogreške položaja e_{st} je uvođenje PI regulatora u petlju brzine vrtnje $\Omega(t)$ umjesto pojačanja K_r. U tom slučaju može se napisati prijenosna funkcija PI regulatora:

$$G_{PI}(s) = k_p \cdot (1 + \frac{1}{T_i \cdot s})$$

Gdje je:

k_p – pojačanje PI regulatora

T_i – vremenska konstanta integralnogčlana PI regulatora

Može se dalje pisati kako je prijenosna funkcija otvorenog kruga petlje brzine jednaka:

$$G_{o\Omega}(s) = G_{PI}(s) \cdot K_{poj} \cdot G_m(s) = k_p \cdot (1 + \frac{1}{T_i \cdot s}) \cdot K_{poj} \cdot \frac{K_m}{1 + T_m \cdot s}$$

Odnosno vrijedi:

$$G_{o\Omega}(s) = k_p \cdot \frac{1 + T_i \cdot s}{T_i \cdot s} \cdot K_{poj} \cdot \frac{K_m}{1 + T_m \cdot s}$$

Ako je zadovoljen kriterij tehničkog optimuma $T_i = T_m$ tada vrijedi:

$$G_{o\Omega}(s) = \frac{k_p \cdot K_{poj} \cdot K_m}{T_m \cdot s}$$

Prijenosna funkcija zatvorenog kruga petlje brzine sada će iznositi:

$$G_{z\Omega}(s) = \frac{G_{o\Omega}(s)}{1 + K_{se} \cdot G_{o\Omega}(s)} = \frac{k_p \cdot K_{poj} \cdot K_m}{T_m \cdot s + K_{se} \cdot k_p \cdot K_{poj} \cdot K_m}$$

Prijenosna funkcija otvorenog kruga petlje kutnog pomaka bit če jednaka:

$$G_{o\theta}(s) = \frac{K_{pr} \cdot k_p \cdot K_{poj} \cdot K_m}{s \cdot (T_m \cdot s + K_{se} \cdot k_p \cdot K_{poj} \cdot K_m)}$$

Prijenosna funkcija zatvorenog kruga petlje kutnog pomaka sada će iznositi:

$$G_{z\Omega}(s) = \frac{G_{o\theta}(s)}{1 + G_{o\theta}(s)} = \frac{K_{pr} \cdot k_p \cdot K_{poj} \cdot K_m}{T_m \cdot s^2 + K_{se} \cdot k_p \cdot K_{poj} \cdot K_m \cdot s + K_{pr} \cdot k_p \cdot K_{poj} \cdot K_m}$$

Sređivanjem dobijamo:

$$G_{z\Omega}(s) = \frac{a_0}{s^2 + a_1 \cdot s + a_o}$$

Gdje je:

$$a_0 = \frac{K_{pr} \cdot k_p \cdot K_{poj} \cdot K_m}{T_m}$$

$$a_1 = \frac{K_{se} \cdot k_p \cdot K_{poj} \cdot K_m}{T_m}$$

Kako vrijedi jednakost:

$$\frac{a_0}{s^2 + a_1 \cdot s + a_o} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n \cdot s + \omega_n^2}$$

Može se pisati:

$$a_1 = 2\xi\omega_n$$

$$a_o = \omega_n^2$$

odnosno

$$a_1^2 = 4 \cdot \xi^2 \cdot a_o$$

Odnosno vrijedi:

$$\left(\frac{K_{se} \cdot k_p \cdot K_{poj} \cdot K_m}{T_m}\right)^2 = 4 \cdot \xi^2 \cdot \frac{K_{pr} \cdot k_p \cdot K_{poj} \cdot K_m}{T_m}$$

Slijedi:

$$\frac{K_{se}^2 \cdot k_p \cdot K_{poj} \cdot K_m}{T_m} = 4 \cdot \xi^2 \cdot K_{pr}$$

Koeficijent pojačnja PI regulatora iznosi:

$$k_p = 4\frac{\xi^2 \cdot K_{pr} \cdot T_m}{K_{se}^2 \cdot K_{poj} \cdot K_m}$$

Za monotonu prijelaznu karakteristiku vrijedi koeficijent prigušenja $\xi = 1$ stoga se može pisati:

$$k_p = 4\frac{\xi^2 \cdot K_{pr} \cdot T_m}{K_{se}^2 \cdot K_{poj} \cdot K_m} = 4\frac{1^2 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}2274}{0{,}5^2 \cdot 1 \cdot 0{,}9091} = 32{,}4$$

$$k_i = \frac{k_p}{T_m} = \frac{21{,}6}{1{,}2274} = 26{,}4$$

Prijenosan funkcija PI regulatora glasi:

$$G_{PI}(s) = k_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s}\right) = k_p + \frac{k_i}{s} = 32{,}4 + \frac{26{,}4}{s}$$

Koeficijenti karakteristične jednadžbe sada iznose:

$$a_0 = \frac{K_{pr} \cdot k_p \cdot K_{poj} \cdot K_m}{T_m} = \frac{K_{pr} \cdot K_{poj} \cdot K_m}{T_m} \cdot k_p = \frac{K_{pr} \cdot K_{poj} \cdot K_m}{T_m} \cdot 4\frac{\xi^2 \cdot K_{pr} \cdot T_m}{K_{se}^2 \cdot K_{poj} \cdot K_m}$$

Odnosno vrijedi:

$$a_0 = 4\xi^2 \cdot \left(\frac{K_{pr}}{K_{se}}\right)^2$$

Analogno slijedi:

$$a_1 = \frac{K_{se} \cdot K_{poj} \cdot K_m}{T_m} = \frac{K_{se} \cdot K_{poj} \cdot K_m}{T_m} \cdot k_p = \frac{K_{se} \cdot K_{poj} \cdot K_m}{T_m} \cdot 4\frac{\xi^2 \cdot K_{pr} \cdot T_m}{K_{se}^2 \cdot K_{poj} \cdot K_m}$$

Odnosno vrijedi:

$$a_1 = 4\xi^2 \cdot \frac{K_{pr}}{K_{se}}$$

Završno slijedi:

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{K_{pr}}{K_{se}}$$

Prijenosna funkcija sada glasi:

$$G_{z\Omega}(s) = \frac{a_0}{s^2 + a_1 \cdot s + a_o} = \frac{4\xi^2 \cdot \left(\frac{K_{pr}}{K_{se}}\right)^2}{s^2 + 4\xi^2 \cdot \frac{K_{pr}}{K_{se}} \cdot s + 4\xi^2 \cdot \left(\frac{K_{pr}}{K_{se}}\right)^2}$$

Neka je:

$$\sigma_0 = 2 \cdot \xi \cdot \frac{K_{pr}}{K_{se}}$$

Tada vrijedi:

$$G_{z\Omega}(s) = \frac{4\xi^2 \cdot \left(\frac{K_{pr}}{K_{se}}\right)^2}{s^2 + 4\xi^2 \cdot \frac{K_{pr}}{K_{se}} \cdot s + 4\xi^2 \cdot \left(\frac{K_{pr}}{K_{se}}\right)^2} = \frac{\sigma_0^2}{s^2 + 2 \cdot \sigma_0 \cdot s + \sigma_0^2}$$

Odnosno:

$$G_{z\Omega}(s) = \frac{\sigma_0^2}{(s + \sigma_0)^2}$$

Prijelazna funkcija sustava $\theta_o(t)$ bila bi:

$$\theta_o(t) = L^{-1}\left\{\frac{G_{z\Omega}(s)}{s}\right\} = 1 + s_1 \cdot t \cdot e^{s_1 \cdot t} - e^{s_1 \cdot t}$$

Gdje je:

$s_1 = -\sigma_0$ – pol sustava

Prema tome, slučaju monotonog prijelaznog procesa ($\xi = 1$) može se pisati:

$$a_0 = 4\xi^2 \cdot \left(\frac{K_{pr}}{K_{se}}\right)^2 = 4\xi^2 \cdot \left(\frac{K_{pr}}{K_{se}}\right)^2 = 4 \cdot 1^2 \cdot \left(\frac{1{,}5}{0{,}5}\right)^2 = 36$$

$$a_1 = 4\xi^2 \cdot \frac{K_{pr}}{K_{se}} = 4 \cdot 1^2 \cdot \frac{1{,}5}{0{,}5} = 12$$

Odnosno:

$$\sigma_0 = 2 \cdot \xi \cdot \frac{K_{pr}}{K_{se}} = \frac{a_1}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

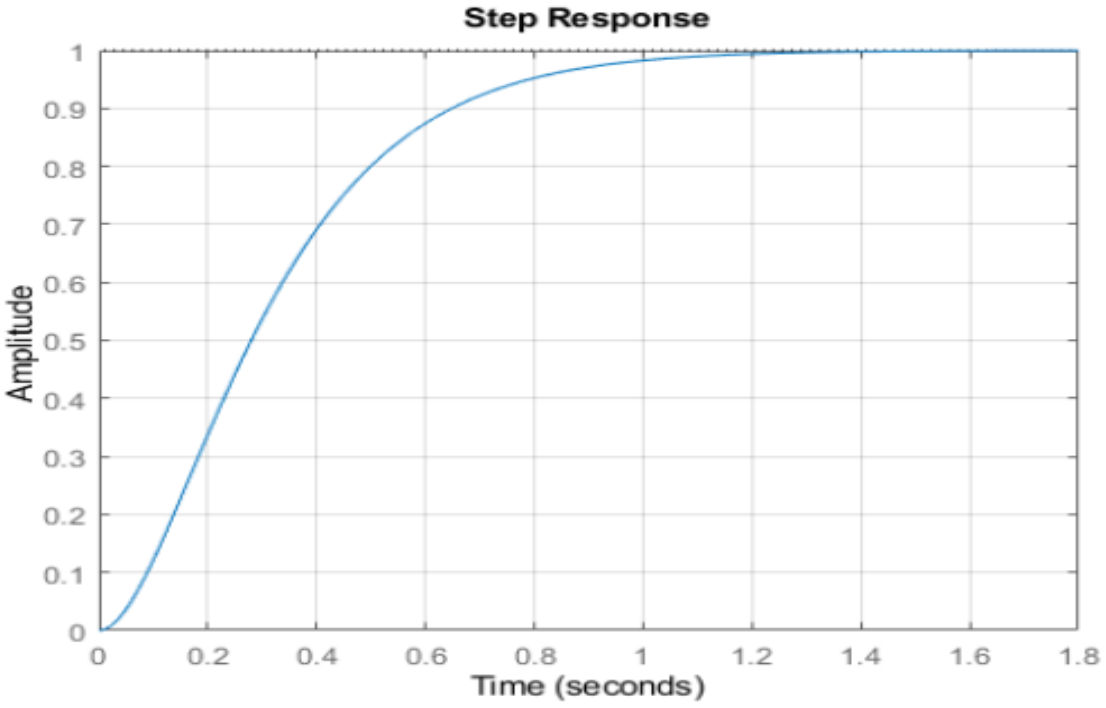
Prijenosna funkcija glasi:

$$G_{z\Omega}(s) = \frac{a_0}{s^2 + a_1 \cdot s + a_o} = \frac{36}{s^2 + 12 \cdot s + 36} = \frac{36}{(s+6)^2}$$

Prijelazna funkcija bila bi:

$$\theta_o(t) = L^{-1}\left\{\frac{G_{z\Omega}(s)}{s}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{36}{s \cdot (s+6)^2}\right\} = 1 - 6 \cdot t \cdot e^{-6t} - e^{-6t}$$

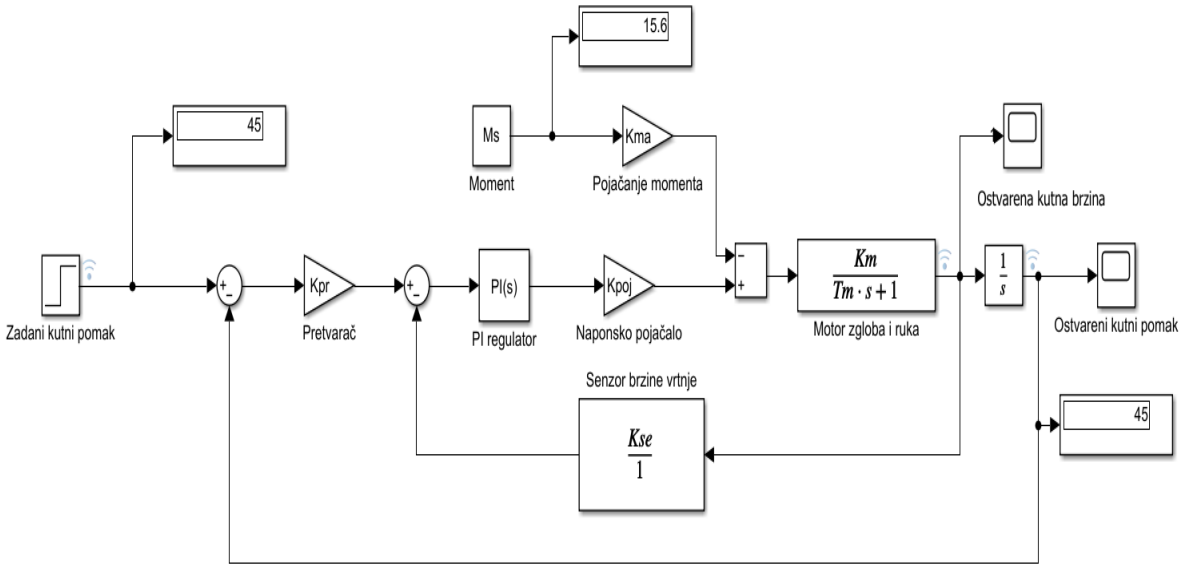
Na slici 1.139 prikazan je prijelazna funkcija $\theta_o(t)$ i parametri prijelaznog procesa.



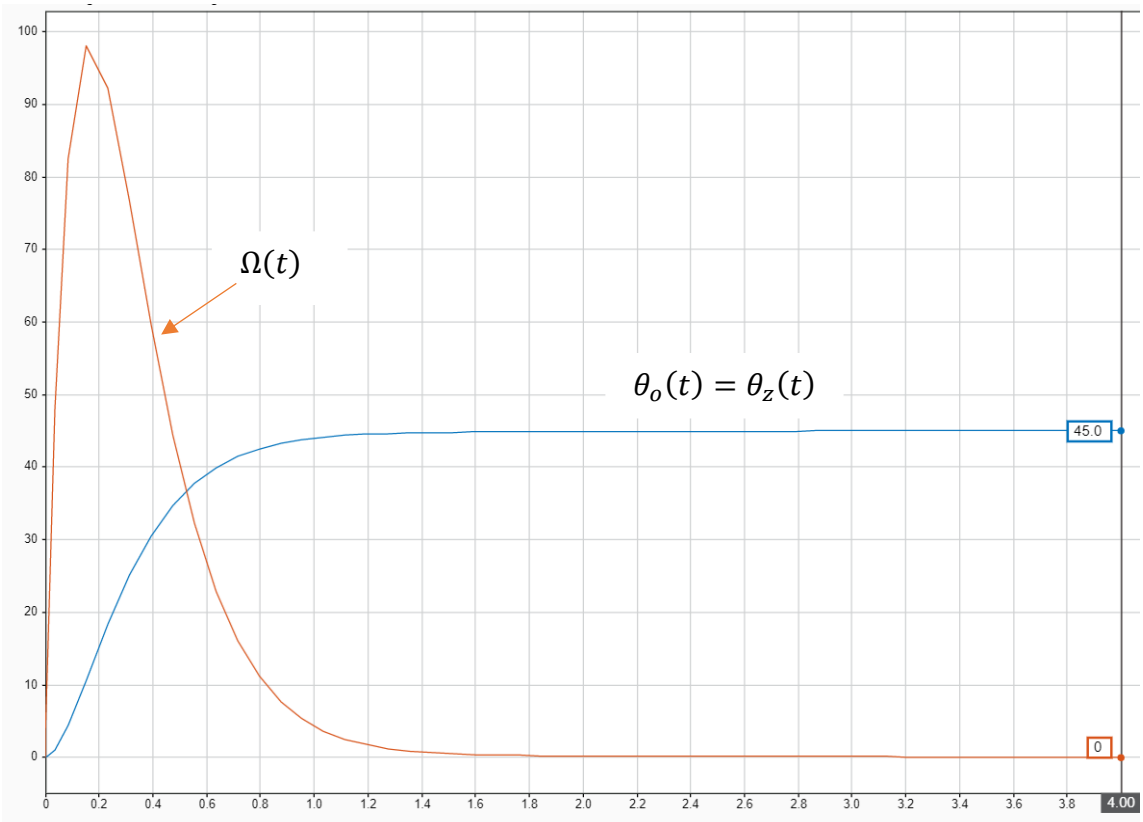

```
ans = struct with fields:
         RiseTime: 0.5597
     SettlingTime: 0.9724
      SettlingMin: 0.9019
      SettlingMax: 0.9999
        Overshoot: 0
       Undershoot: 0
             Peak: 0.9999
         PeakTime: 1.9879
```

Sl. 1.139 - Prijelazna funkcija $\theta_o(t)$ i parametri prijelaznog procesa

Prijelazna funkcija prikazana na slici 1.139 je monotona, vrijeme porasta signala (*Rise Time*) iznosi $T_r = 0{,}56sek$, a vrijeme prijelaznog procesa ili vrijeme smirivanja signala (*Settling Time*) iznosi $T_s = 0{,}97\ sek$. Na slici 1.140 prikazan je simulacijski model s opterećenjem, dok je na slici 1.141 prikazan odziv sutava na brzinu i pomak



Sl. 1.140 - Simulacijski model s opterećenjem



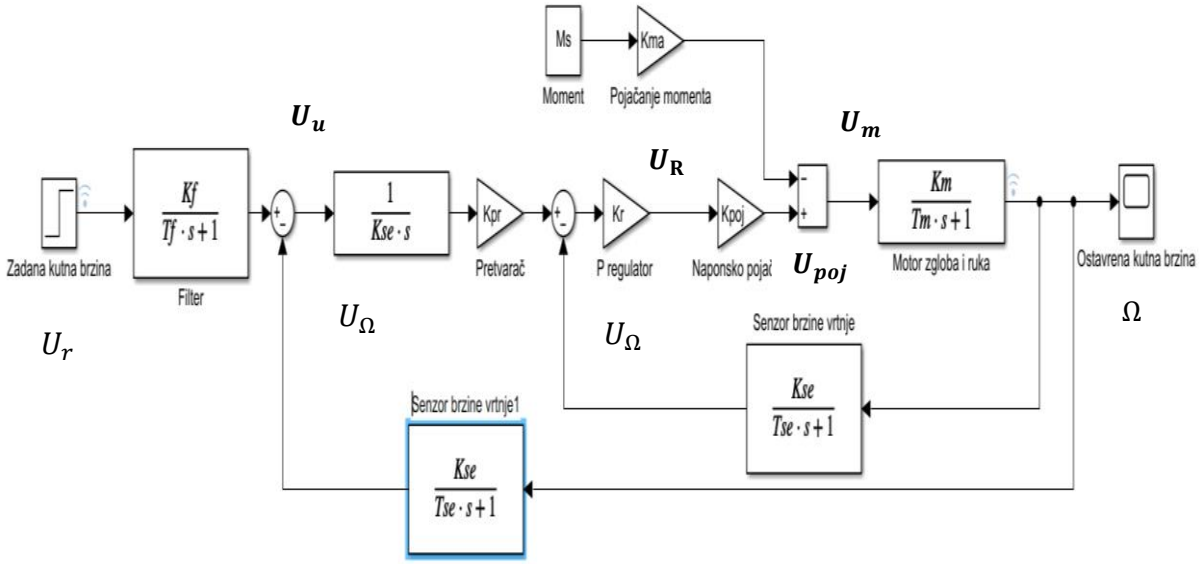
Sl. 1.141 - Odziv sutava na brzinu i pomak

Statička pogreška sustava jednaka je nuli ($e_{st} = 0$).

Važno je uočiti kako se kombinacijom parametara $\xi\ i\ \frac{K_{pr}}{K_{se}}$ može generirati željeni odziv sustav odnosno parametri T_r i T_s prijenosne funkcije $\theta_o(t)$. Jedanko tako može se uočiti kako nije prisutna ovisnost koeficijenta prigušenja ξ o promjenljivom momentu inercije $\frac{J_{sr}}{3} \leq J_u \leq 3 \cdot J_{sr}$. Naime, odziv ostaje uvijek isti ako se parametri $\xi\ i \frac{K_{pr}}{K_{se}}$ ne mjenjaju.

9.3 Upravljanje robotskim sustavom CNC tipa

CNC strojevi (Computer Numerical Control) su alatni strojevi koji koriste regulacijske petlje kao i robotski manipulatori. Tipična regulacijska petlja prikazana je na slici 1.142



Sl. 1.142 - Tipična regulacijska petlja CNC strojeva

Tipična regulacijska petlja CNC stroja značajno se ne razlikuje od regulacijske petlje položaja s podređenom petljom brzine. No, bitna razlika sastoji se u tipu ulazne veličine, a ona je referentni signal brzine vrtnje CNC stroja $U_r(s)$ i izlaz koji predstavlja brzinu vrtnje stroja $\Omega(s)$.

Prijenosna funkcija otvorenog kruga unutarnje petlje $G_{o\Omega}(s)$, pod uvjetom da je $M_s(s) = 0$, glasila bi:

$$G_{o\Omega}(s) = K_r \cdot K_{poj} \cdot G_m(s) = K_r \cdot K_{poj} \cdot \frac{K_m}{1 + T_m \cdot s} = \frac{k_0}{1 + T_m \cdot s}$$

Prijenosna funkcija senzora $G_{se}(s)$ glasi:

$$G_{se}(s) = \frac{K_{se}}{1 + T_{se} \cdot s}$$

U slučaju zatvorenog kruga može se pisati:

$$G_{z\Omega}(s) = \frac{G_{o\Omega}(s)}{1 + G_{o\Omega}(s) \cdot G_{se}(s)}$$

Prijenosna funkcija otvorenog kruga vanjske petlje $G_{1\Omega}(s)$, pod uvjetom da je $M_s(s) = 0$, glasila bi:

$$G_{1\Omega}(s) = K_{pr} \cdot \frac{1}{K_{se} \cdot s} G_{z\Omega}(s) = \frac{k_1}{s} \cdot G_{z\Omega}(s)$$

Prijenosna funkcija zatvorenog kruga sada glasi:

$$G_{v\Omega}(s) = \frac{G_{1\Omega}(s)}{1 + G_{1\Omega}(s) \cdot G_{se}(s)}$$

Prijenosna funkcija filtera $G_f(s)$ glasi:

$$G_f(s) = \frac{K_f}{1 + T_f \cdot s}$$

Odnosno ukupnog sustava $G_\Omega(s)$:

$$G_\Omega(s) = G_f(s) \cdot G_{v\Omega}(s) = G_f(s) \cdot \frac{G_{1\Omega}(s)}{1 + G_{1\Omega}(s) \cdot G_{se}(s)}$$

Uvršatavnjem svih vrijednosti dobija se:

$$G_\Omega(s) = \frac{K_f}{1 + T_f \cdot s} \cdot \frac{\frac{k_1}{s} \cdot G_{z\Omega}(s)}{1 + \frac{k_1}{s} \cdot G_{z\Omega}(s) \cdot G_{se}(s)}$$

$$= \frac{K_f}{1 + T_f \cdot s} \cdot \frac{\frac{k_1}{s} \cdot \frac{G_{o\Omega}(s)}{1 + G_{o\Omega}(s) \cdot G_{se}(s)}}{1 + \frac{k_1}{s} \cdot \frac{G_{o\Omega}(s)}{1 + G_{o\Omega}(s) \cdot G_{se}(s)} \cdot G_{se}(s)}$$

Odnosno vrijedi:

$$G_\Omega(s) = \frac{K_f}{1 + T_f \cdot s} \cdot \frac{\frac{k_1}{s} \cdot \frac{\frac{k_0}{1 + T_m \cdot s}}{1 + \frac{k_0}{1 + T_m \cdot s} \cdot \frac{K_{se}}{1 + T_{se} \cdot s}}}{1 + \frac{k_1}{s} \cdot \frac{\frac{k_0}{1 + T_m \cdot s}}{1 + \frac{k_0}{1 + T_m \cdot s} \cdot \frac{K_{se}}{1 + T_{se} \cdot s}} \cdot \frac{K_{se}}{1 + T_{se} \cdot s}}$$

Neka je:

$$G_\Omega(s) = \frac{K_f}{1 + T_f \cdot s} \cdot \frac{A(s)}{B(s)}$$

Sređivanjem brojnika slijedi:

$$A(s) = \frac{k_1}{s} \cdot \frac{\frac{k_0}{1 + T_m \cdot s}}{1 + \frac{k_0}{1 + T_m \cdot s} \cdot \frac{K_{se}}{1 + T_{se} \cdot s}} = \frac{k_1}{s} \cdot \frac{k_0 \cdot (1 + T_{se} \cdot s)}{(1 + T_m \cdot s) \cdot (1 + T_{se} \cdot s) + k_0 \cdot K_{se}}$$

Odnosno:

$$A(s) = \frac{k_1 \cdot k_0 \cdot (1 + T_{se} \cdot s)}{s \cdot [(1 + T_m \cdot s)(1 + T_{se} \cdot s) + k_0 \cdot K_{se}]}$$

Za nazivnik slijedi:

$$B(s) = 1 + \frac{k_1}{s} \cdot \frac{\frac{k_0}{1 + T_m \cdot s}}{1 + \frac{k_0}{1 + T_m \cdot s} \cdot \frac{K_{se}}{1 + T_{se} \cdot s}} \cdot \frac{K_{se}}{1 + T_{se} \cdot s}$$

Odnosno:

$$B(s) = 1 + \frac{k_1}{s} \cdot \frac{\frac{k_0}{1 + T_m \cdot s}}{\frac{(1 + T_m \cdot s)(1 + T_{se} \cdot s) + k_0 \cdot K_{se}}{(1 + T_m \cdot s)(1 + T_{se} \cdot s)}} \cdot \frac{K_{se}}{1 + T_{se} \cdot s}$$

Slijedi:

$$B(s) = 1 + \frac{k_1}{s} \cdot \frac{k_0 \cdot K_{se}}{(1 + T_m \cdot s)(1 + T_{se} \cdot s) + k_0 \cdot K_{se}}$$

Može se pisati:

$$B(s) = 1 + \frac{k_1 \cdot k_0 \cdot K_{se}}{s \cdot [(1 + T_m \cdot s)(1 + T_{se} \cdot s) + k_0 \cdot K_{se}]}$$

Uvrštavanjem u prijenosnu funkciju $G_\Omega(s)$ dobija se:

$$G_\Omega(s) = \frac{K_f}{1 + T_f \cdot s} \cdot \frac{\frac{k_1 \cdot k_0 \cdot (1 + T_{se} \cdot s)}{s \cdot [(1 + T_m \cdot s)(1 + T_{se} \cdot s) + k_0 \cdot K_{se}]}}{1 + \frac{k_1 \cdot k_0 \cdot K_{se}}{s \cdot [(1 + T_m \cdot s)(1 + T_{se} \cdot s) + k_0 \cdot K_{se}]}}$$

Ako je i $T_f = T_{se}$ tada vrijedi:

$$G_\Omega(s) = \frac{\frac{K_f \cdot k_1 \cdot k_0}{s \cdot [(1 + T_m \cdot s)(1 + T_{se} \cdot s) + k_0 \cdot K_{se}]}}{1 + \frac{k_1 \cdot k_0 \cdot K_{se}}{s \cdot [(1 + T_m \cdot s)(1 + T_{se} \cdot s) + k_0 \cdot K_{se}]}}$$

Sada vrijedi:

$$G_\Omega(s) = \frac{K_f \cdot k_1 \cdot k_0}{s \cdot [(1 + T_m \cdot s)(1 + T_{se} \cdot s) + k_0 \cdot K_{se}] + k_1 \cdot k_0 \cdot K_{se}}$$

Ako je $K_f = K_{se}$ tada vrijedi:

$$G_\Omega(s) = \frac{K_{se} \cdot k_1 \cdot k_0}{s \cdot [(1 + T_m \cdot s)(1 + T_{se} \cdot s) + k_0 \cdot K_{se}] + k_1 \cdot k_0 \cdot K_{se}}$$

Odnosno

$$G_\Omega(s) = \frac{\frac{K_{pr}}{K_{se}} \cdot K_r \cdot K_{poj} \cdot K_m \cdot K_{se}}{T_m \cdot T_{se} \cdot s^3 + (T_m + T_{se}) \cdot s^2 + \left(1 + K_r \cdot K_{poj} \cdot K_m \cdot K_{se}\right) \cdot s + \frac{K_{pr}}{K_{se}} \cdot K_r \cdot K_{poj} \cdot K_m \cdot K_{se}}$$

Tada je:

$$G_\Omega(s) = \frac{K_{pr} \cdot K_r \cdot K_{poj} \cdot K_m}{T_m \cdot T_{se} \cdot s^3 + (T_m + T_{se}) \cdot s^2 + \left(1 + K_r \cdot K_{poj} \cdot K_m \cdot K_{se}\right) \cdot s + K_{pr} \cdot K_r \cdot K_{poj} \cdot K_m}$$

Kada je umnožak vremenskih konstanti motora i senzora $T_m \; i \; T_{se}$ daleko manji od jedinice tj. vrijedi $T_m \cdot T_{se} \gg 1$, tada se može pisati:

$$G_\Omega(s) \cong \frac{K_{pr} \cdot K_r \cdot K_{poj} \cdot K_m}{(T_m + T_{se}) \cdot s^2 + \left(1 + K_r \cdot K_{poj} \cdot K_m \cdot K_{se}\right) \cdot s + K_{pr} \cdot K_r \cdot K_{poj} \cdot K_m}$$

Odnosno ako je $T_m \gg T_{se}$ tada vrijedi da je:

$$G_\Omega(s) \cong \frac{\frac{K_{pr} \cdot K_r \cdot K_{poj} \cdot K_m}{T_m}}{s^2 + \frac{\left(1 + K_r \cdot K_{poj} \cdot K_m \cdot K_{se}\right)}{T_m} \cdot s + \frac{K_{pr} \cdot K_r \cdot K_{poj} \cdot K_m}{T_m}}$$

Neka je:

$$a = K_{poj} \cdot K_m \cdot K_{se}$$

$$b = K_{pr} \cdot K_{poj} \cdot K_m$$

Tada je:

$$G_\Omega(s) \cong \frac{\frac{b \cdot K_r}{T_m}}{s^2 + \frac{(1 + a \cdot K_r)}{T_m} \cdot s + \frac{b \cdot K_r}{T_m}}$$

Ukoliko je prijelazni proces monoton tada vrijedi jednakost:

$$G_\Omega(s) \cong \frac{\frac{b \cdot K_r}{T_m}}{s^2 + \frac{(1 + a \cdot K_r)}{T_m} \cdot s + \frac{b \cdot K_r}{T_m}} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n \cdot s + \omega_n^2}$$

Može se pisati:

$$\frac{b \cdot K_r}{T_m} = \omega_n^2$$

$$\frac{(1 + a \cdot K_r)}{T_m} = 2\xi\omega_n$$

Vrijedi :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{b \cdot K_r}{T_m}}$$

odnosno

$$\xi = \frac{\frac{(1 + a \cdot K_r)}{T_m}}{2\omega_n} = \frac{\frac{(1 + a \cdot K_r)}{T_m}}{2\sqrt{\frac{b \cdot K_r}{T_m}}}$$

Ako je proces monoton tada vrijedi da je $\xi \geq 1$ te se može pisati:

$$\frac{\frac{(1 + a \cdot K_r)}{T_m}}{2\sqrt{\frac{b \cdot K_r}{T_m}}} \geq 1$$

Odnosno

$$\frac{(1 + a \cdot K_r)}{T_m} \geq 2\sqrt{\frac{b \cdot K_r}{T_m}}$$

Slijedi:

$$(1 + a \cdot K_r)^2 \geq 4 \cdot T_m^2 \cdot \frac{b \cdot K_r}{T_m}$$

Sređivanjme dobijamo:

$$a^2 \cdot K_r^2 + 2a \cdot K_r + 1 - 4 \cdot T_m \cdot b \cdot K_r \geq 0$$

Odnosno

$$K_r^2 - \frac{2 \cdot (2 \cdot T_m \cdot b - a)}{a^2} K_r + \frac{1}{a^2} \geq 0$$

Neka je $r = 2 \cdot T_m \cdot b - a$ tada slijedi:

$$K_r^2 - \frac{2 \cdot r}{a^2} K_r + \frac{1}{a^2} \geq 0$$

Rješenje kvadratne jednadžbe glasi:

$$K_{r_{1,2}} = \frac{r}{a^2} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{a^2}\right)^2 - \frac{1}{a^2}}$$

Određen je koeficijent pojačanja regulatora K_r.

Primjer br. 11

Neka su zadani parametri kao i u zadatku br. 10 kako slijedi: mehnička vremenska konstanta $T_m = 1{,}2274\ sek$, koeficijent pretvarača $K_{pr} = 1{,}5$, koeficijent pojačanja $K_{poj} = 1$,

mehanička konstanta motora $K_m = 0{,}9091$, konstanta pretvarača $K_{pr} = 1{,}5$, konstanta senzora $K_{se} = 0{,}5$ vremenska konstanta senzora iznosi $T_{se} = 0{,}05\ sek$. Potrebno je odrediti pojačanje P regulatora K_r tako da je prijelazni proces monoton odnosno da je koeficijet prigušenja jednak jedinici $\xi \geq 1$ Jednako tako potrebno je odrediti statičku pogrešku e_{st} za moment gravitacije $M_g = -15{,}603Nm$ i kutnu brzinu $\omega_r = 10\ rad/sek$

Određujemo parametre a i b:

$$a = K_{poj} \cdot K_m \cdot K_{se} = 1 \cdot 0{,}9091 \cdot 0{,}5 = 0{,}4545$$

$$b = K_{pr} \cdot K_{poj} \cdot K_m = 1{,}5 \cdot 1 \cdot 0{,}9091 = 1{,}3636$$

Određujemo parametar r:

$$r = 2 \cdot T_m \cdot b - a = 2 \cdot 1{,}2274 \cdot 1{,}3636 - 0{,}4545 = 2{,}893$$

Određujemo koeficijent pojačanja regulatora K_r:

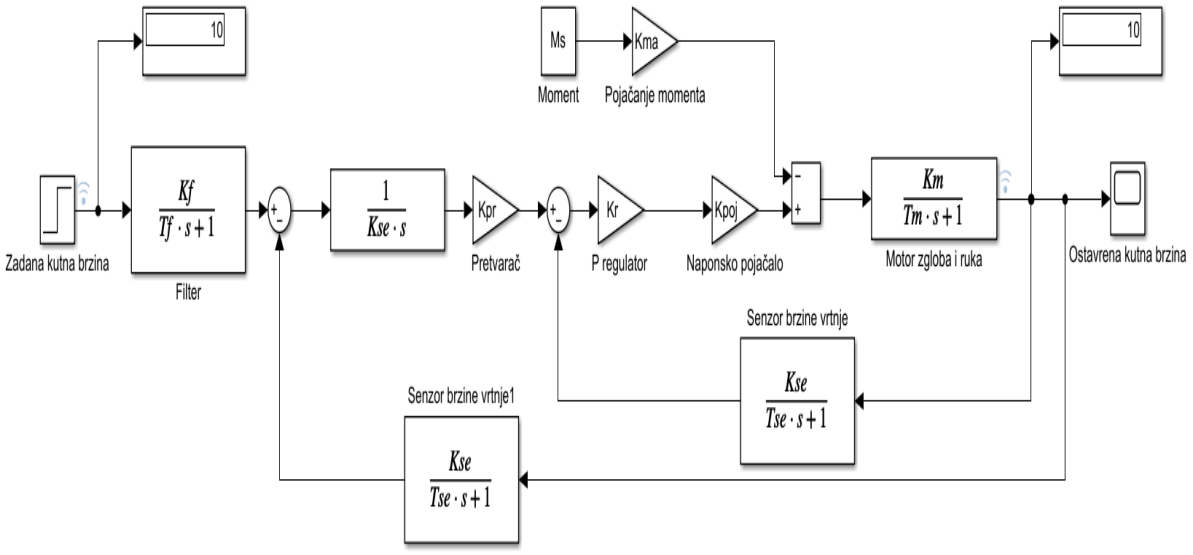
$$K_{r_{1,2}} = \frac{r}{a^2} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{a^2}\right)^2 - \frac{1}{a^2}} = \frac{2{,}893}{0{,}4545^2} \pm \sqrt{\left(\frac{2{,}893}{0{,}4545^2}\right)^2 - \frac{1}{0{,}4545^2}}$$

Slijedi:

$$K_{r_1} = 27{,}83$$

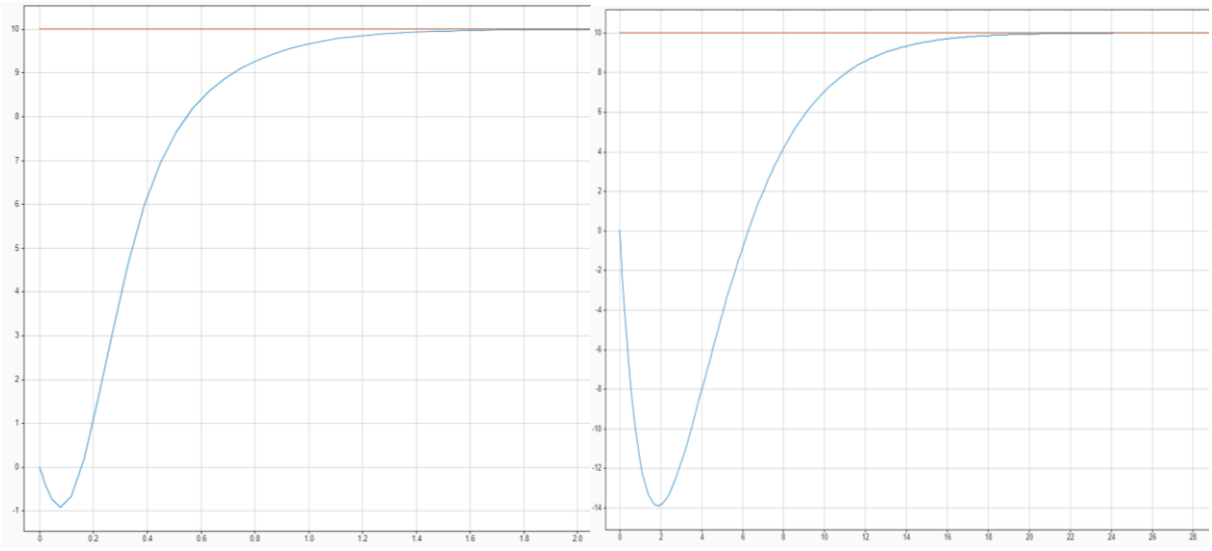
$$K_{r_2} = 0{,}1739$$

Dobivene vrijednosti odnose se na „brzi“ i „spori“ monotoni odziv sustava. Za vrijednosti koeficijenta $K_r = 27{,}83$ ostavrit će se „brzi odziv“, a za vrijednosti $K_r = 0{,}1739$ ostavrite će se „spori odziv“. Isto će se prikazati pomoću simulacijskog modela prikazanog na slici 1.143



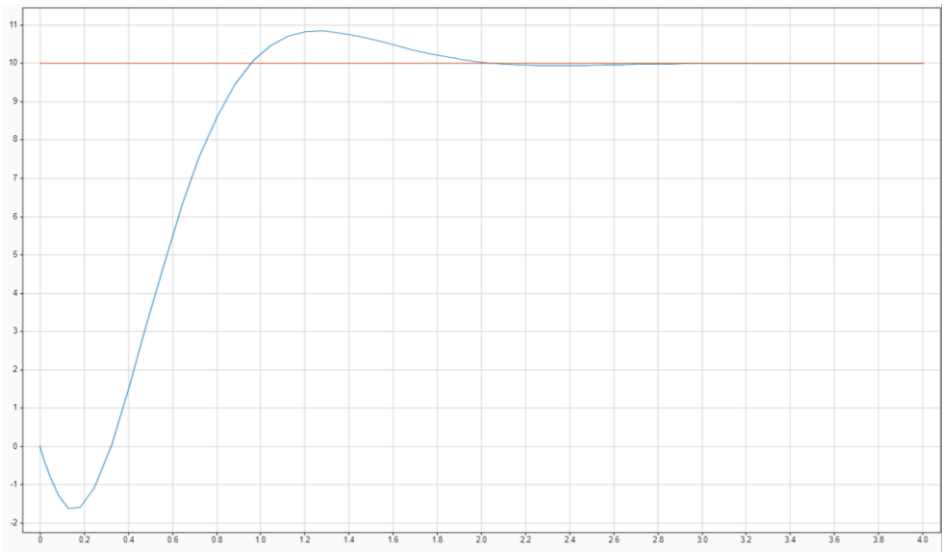
Sl. 1.143 - Tipična regulacijska petlja CNC strojeva (simulacijski model)

Na slici 1.144 a) i b) prikazan je „brzi“ i „spori“ odziv sustava



Sl. 1.144 a) i b) - „Brzi“ i „spori“ monotoni odziv sustava

Za vrijednost koeficijenta u intervalu $0{,}1739 \leq K_r \leq 27{,}83$ odziv sustava biti će aperiodski ili oscilotoran, kako prikazuje slika 1.144 c) za slučaj kakda je $K_r = 10$.



Sl. 1.144 c) - Aperiodski odziv sustava

Prijenosna funkcija sustava $G_\Omega(s)$ glasit će za slučaj $K_r = 27{,}83$ kako slijedi:

$$G_\Omega(s) \cong \frac{\frac{b \cdot K_r}{T_m}}{s^2 + \frac{(1 + a \cdot K_r)}{T_m} \cdot s + \frac{b \cdot K_r}{T_m}} = \frac{\frac{1{,}3636 \cdot 27{,}83}{1{,}2274}}{s^2 + \frac{(1 + 0{,}4545 \cdot 27{,}83)}{1{,}2274} \cdot s + \frac{1{,}3636 \cdot 27{,}83}{1{,}2274}}$$

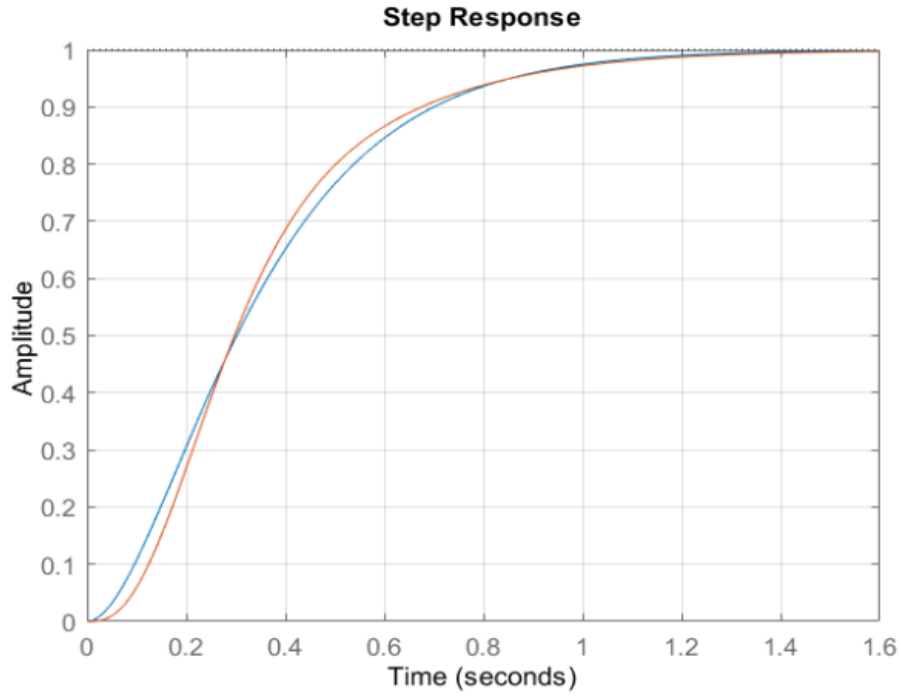
Odnosno:

$$G_\Omega(s) \cong \frac{30{,}92}{s^2 + 11{,}12 \cdot s + 30{,}92} = \frac{30{,}92}{(s + 5{,}56)^2}$$

Slično prethodnom slučaju, prijenosna funkciju brzine iznosi:

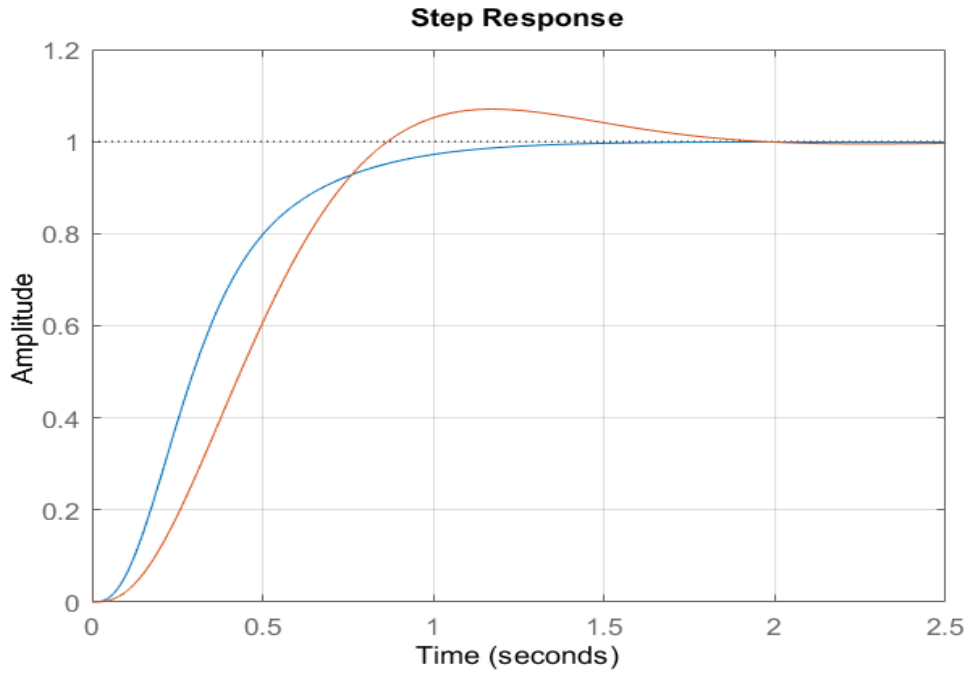
$$\Omega_o(t) \cong L^{-1}\left\{\frac{G_\Omega(s)}{s}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{30{,}92}{s\cdot(s+5{,}56)^2}\right\} = 1 - 5{,}56\cdot t\cdot e^{-5{,}56t} - e^{-5{,}56t}$$

Na slici 1.145 prikazana je usporedba između „stvarnog“ i „približnog“ odziva sustava. Uočava se zanemarujuće odstupanje vrijednosti.



Sl. 1.145 - Usporedba između „stvranog“ i „približnog“ odziva sustava

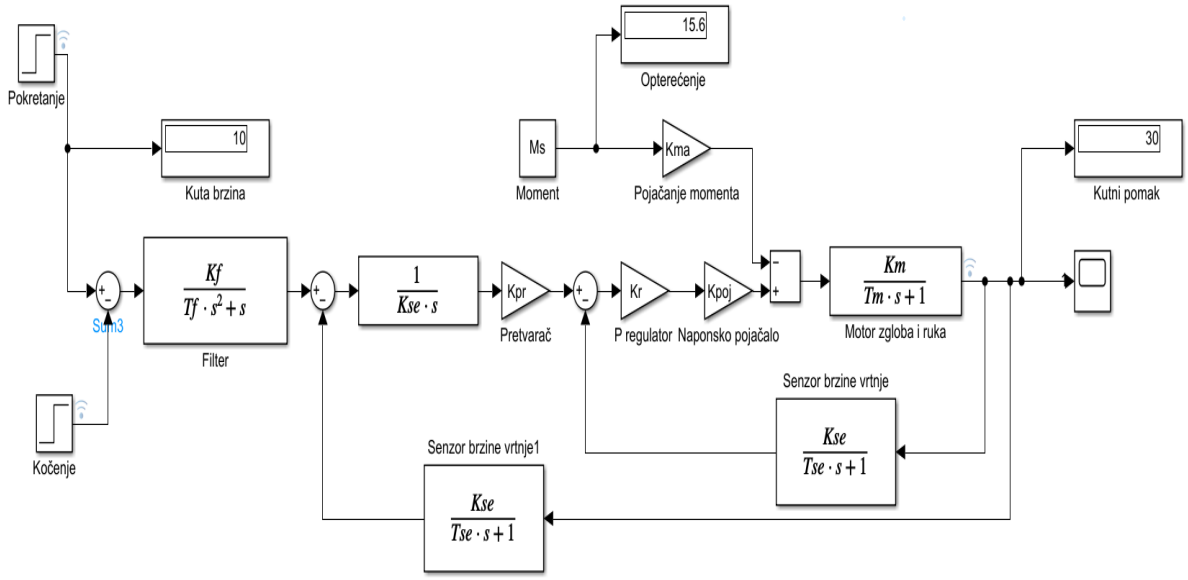
Na slici 1.146 prikazana je usporedba odziva sustava za $K_r = 10$ i $K_r = 27{,}83$.



Sl. 1.146 - Usporedba odziva sustava za $K_r = 10$ i $K_r = 27{,}83$

Primjer br. 12

Zadani su isti parametri kao i u primjeru br. 11. Potrebno je odrediti prijenosnu funkciju pomaka $\theta_o(t)$ ako motor koči nakon $t_k = 3sek$. Na slici 1.147 prikazan je simulacijski model kutnog pomaka na način što je u filter dodan $\frac{1}{s}$ jer $\theta_o(s) = \frac{1}{s} \cdot \Omega_o(s)$.



Sl.1.147 - Simulacijski model pomaka $\theta_o(t)$

Sa slike 1.147 uočava se da ostvareni pomak iznosi 30° i da vrijedi jednakost:

$$\theta_o = \Omega_o \cdot t_k = 10 \cdot 3 = 30^\circ$$

Navedena činjenica povezanost brzine $\Omega_o(t)$ i vremena kočenja t_k na kutni pomak θ_o važna je zbog upravljanja CNC strojem odnosno robotskom rukom. Polazeći od prethodno određene prijenosne funkcije:

$$G_\Omega(s) \cong \frac{\frac{b \cdot K_r}{T_m}}{s^2 + \frac{(1 + a \cdot K_r)}{T_m} \cdot s + \frac{b \cdot K_r}{T_m}}$$

pokretanje i kočenje robota može se modelirati transpornim članom tako da prijenosna funkcija $G_\Omega(s)$ poprima sljedeći oblik:

$$G_\Omega(s) \cong \frac{\frac{b \cdot K_r}{T_m}}{s^2 + \frac{(1 + a \cdot K_r)}{T_m} \cdot s + \frac{b \cdot K_r}{T_m}} \cdot (1 - e^{-t_k \cdot s})$$

Gdje je:

$$a = K_{poj} \cdot K_m \cdot K_{se}$$

$$b = K_{pr} \cdot K_{poj} \cdot K_m$$

Analogno tome prijenosna funkcija $G_\theta(s)$ glasi:

$$G_\theta(s) \cong \frac{1}{s} \cdot \frac{\frac{b \cdot K_r}{T_m}}{s^2 + \frac{(1 + a \cdot K_r)}{T_m} \cdot s + \frac{b \cdot K_r}{T_m}} \cdot (1 - e^{-t_k \cdot s})$$

Uvrštavanjem vrijednosti slijedi:

$$G_\theta(s) \cong \frac{1}{s} \cdot \frac{\frac{1{,}3636 \cdot 27{,}83}{1{,}2274}}{s^2 + \frac{(1 + 0{,}4545 \cdot 27{,}83)}{1{,}2274} \cdot s + \frac{1{,}3636 \cdot 27{,}83}{1{,}2274}} \cdot (1 - e^{-3 \cdot s})$$

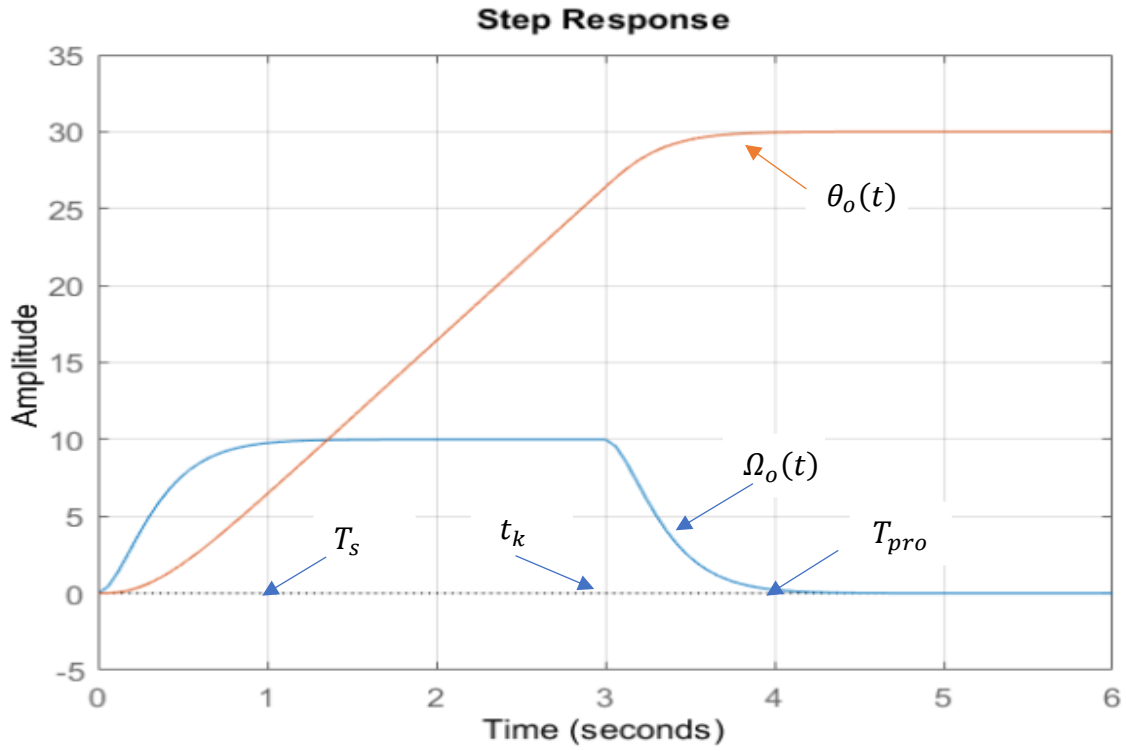
Sređivanjem vrijedi:

$$G_\theta(s) \cong \frac{30{,}92}{s^3 + 31{,}73 \cdot s^2 + 30{,}92 \cdot s} \cdot (1 - e^{-3 \cdot s})$$

Odnosno:

$$G_\theta(s) \cong \frac{30{,}92}{s \cdot (s + 0{,}06) \cdot (s + 30{,}73)} \cdot (1 - e^{-3 \cdot s})$$

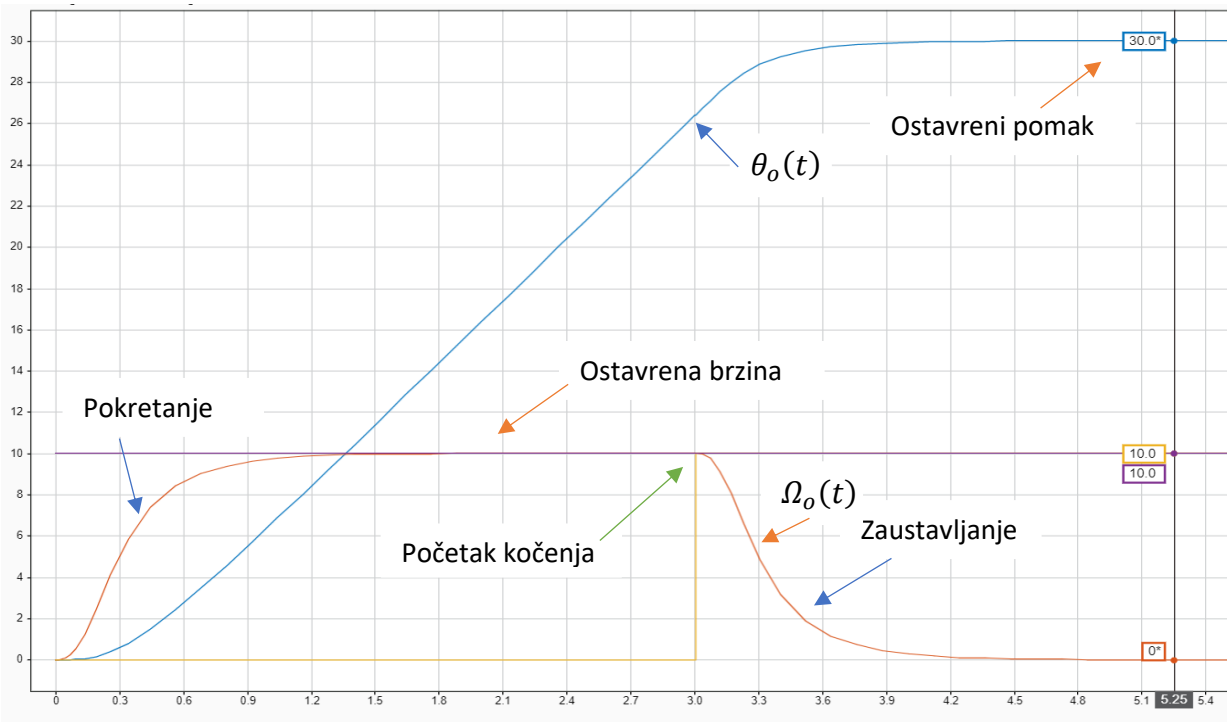
Na slici 1.148 prikazan je odziv sustava na step funkciju.



Sl. 1.148 - Prijelazna funkcija brzine $\Omega_o(t)$ i pomaka $\theta_o(t)$

Na temelju slike 1.148 uočava se kako vrijeme trajanje procesa iznosi $T_{pro} = 4sek$ koje je ostvareno kao zbroj vremena početka kočenja $t_k = 3\ sek$ i vremena prijelaznog procesa brzine $\Omega_o(t)$ koje iznosi $T_s = 1sek$.

Na slici 1.149 prikazan je odziv sustava dobiven na temelju simulacijskog modela sa slike 1.147.



Sl. 1.149 - Prijelazna funkcija brzine $\Omega_o(t)$ i pomaka $\theta_o(t)$

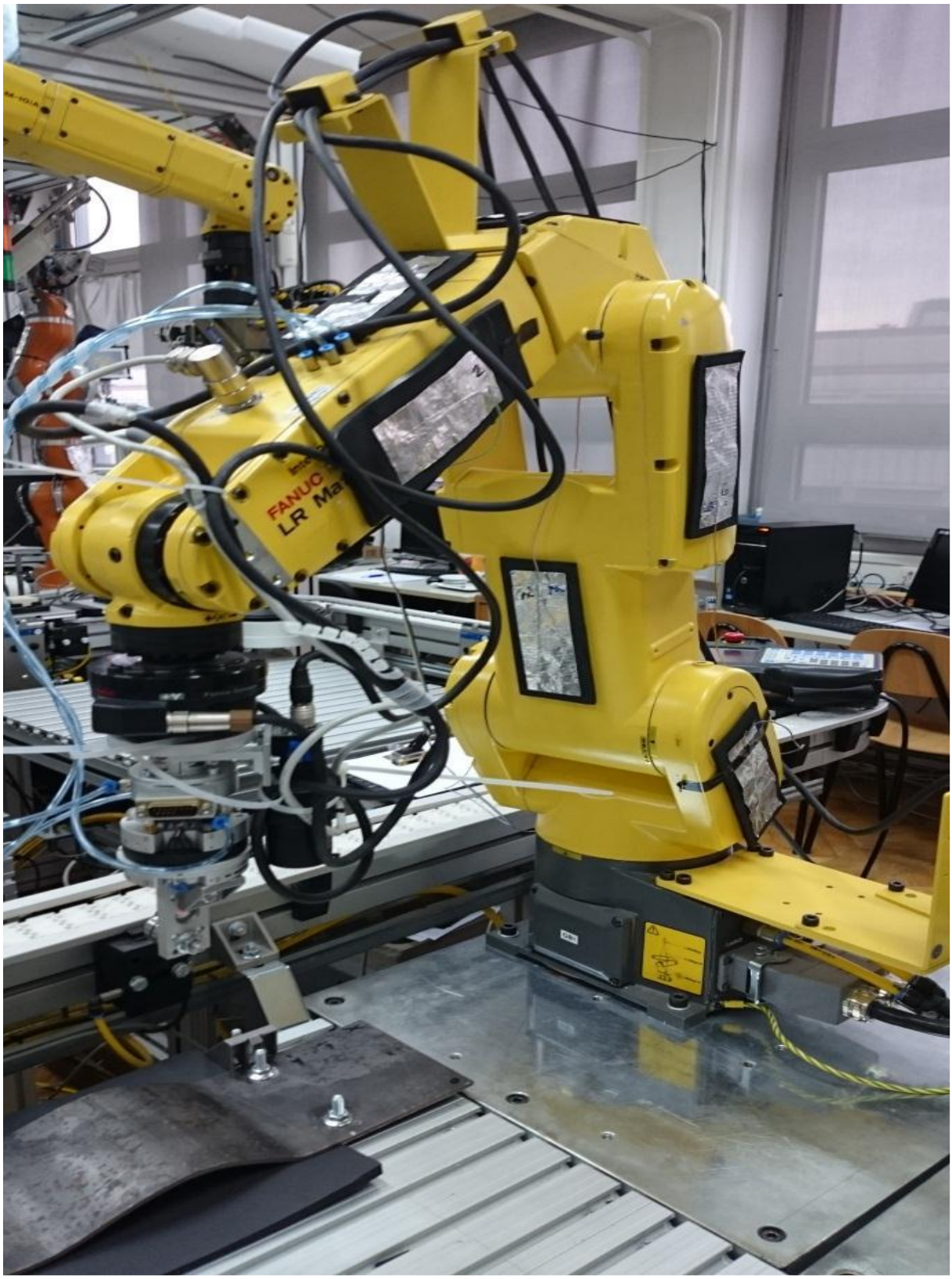
Bez obzira na opterećenje sustava M_g odziv sustava $\theta_o(t)$ na step pobudu nije se promjenio. I dalje vrijede isti parametri tipične regulacijska petlja CNC stroja koja se koristi i kao regulacijska petlja robotskog manipulatora.

9.4 Upravljanje robotskim mehanizmom obzirom na silu dodira

U prethodno opisanom primjeru regulacije robotske ruke težište je bilo na ostavrenju pomaka odnosno položaja robotske ruke pri čemu se pomak ostvaruje slobodnim gibanjem po svim osama robotskog mehanizma. U slučaju upravljanja silom dodira F analizirat će se rad robotskog mehanizma troosnog planarnog robota čiji je pogon ostvaren istosmjernim motorom koji se napaja putem čopera.

Model sile dodira robotskog manipulatora u radnoj okolini

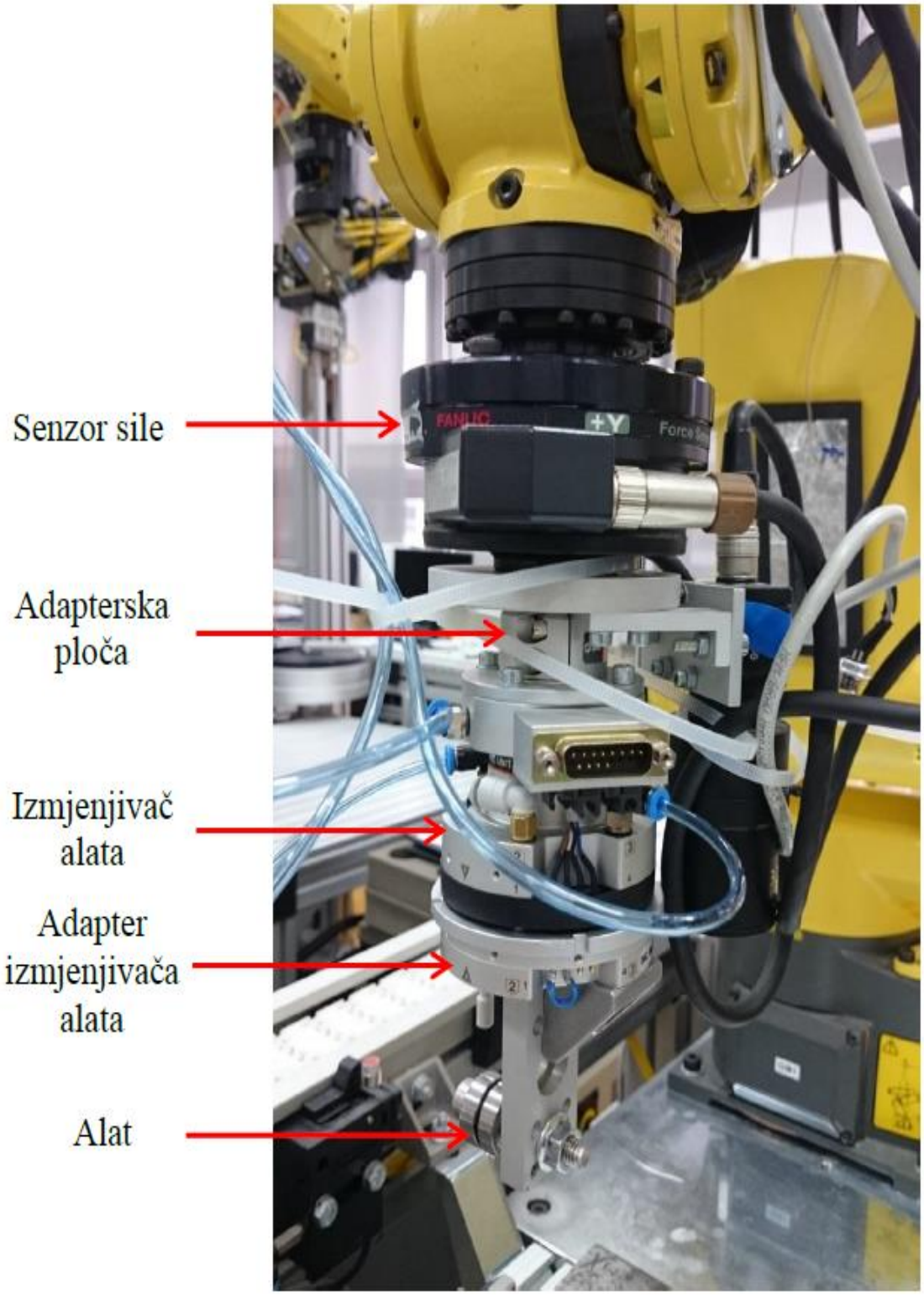
Sila dodira robotskog manipulatora u radnoj okolini ostvaruje se gibanjem vrha alat uz senzor sile kako je prikazano na slici 150. Radi se eksperimentalnom postavu robotskog sustava na kojem su provode mjerenja, a nalazi se u Laboratoriju za projektiranje izradbenih i montažnih sustava na Fakultetu strojarstva i brodogradnje u Zagrebu. Korišteni robot za eksperimentalna ispitivanja je Fanuc LR Mate 200iC/5L s pripadajućom upravljačkom jedinicom Fanuc R-30iA. Robot ima nosivost od pet kilograma i doseg od 892 mm.



Sl. 1.150 - robot za eksperimentalna ispitivanja je Fanuc LR Mate 200iC/5L s pripadajućom upravljačkom jedinicom Fanuc R-30iA[17]

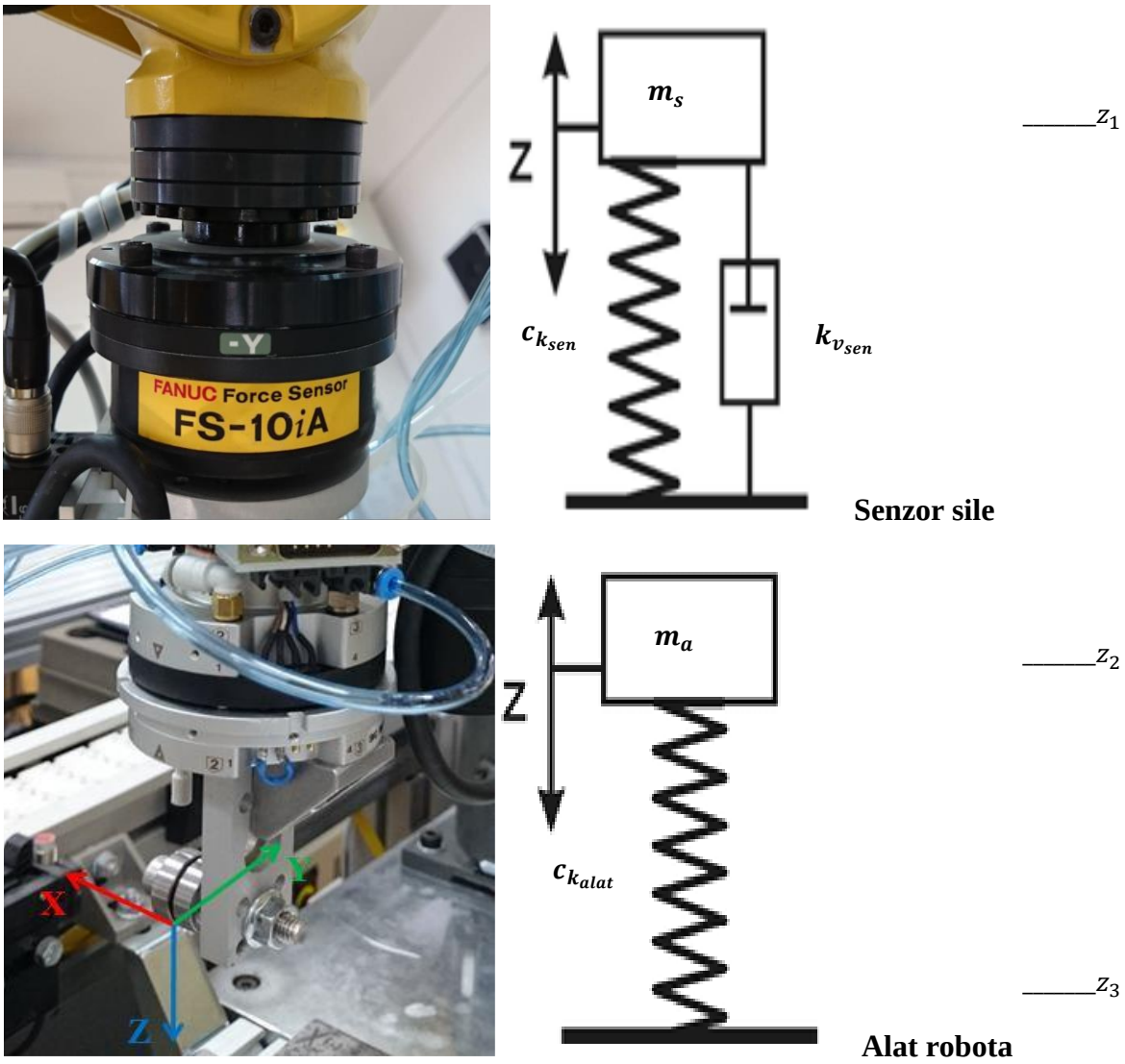
[17] V. Nikola, „Robotsko praćenje kontura korištenjem senzora sile“, Fakultete strojartstva i brorgradnje Zagreb, Završni rad 2022.

Na slici 1.151 prikazan je spoj alata i senzora sile na prirubnici robota



Sl. 1.151 – Spoj alata i senzora sile na prirubnici robota (ibidem)

Na temelju slike 1.151 izrađen je shematski model dodira robotskog manipulatora u radnoj okolini pri čemu je prisutno translacijsko gibanjem vrha alata. Isto je prikazano na slici 1.152.



Sl. 1.152 - Shematski model dodira robotskog manipulatora u radnoj okolini (ibudem)

Legenda:

m_s - masa vrha manipulatora sa senzorom

m_a – masa prihvatnise sa alatom robota

$k_{v_{sen}}$ – koeficijent viskoznog trenja senzora

$c_{k_{sen}}$ – koeficijent krutosti senzora

$c_{k_{alat}}$ – koeficijent krutosti alata u odnosu na objekt

Robot prikazan na slici 1.152 koristi senzor sile Fanuc FS-10iA koji omogućuje mjerenje sila i momenata u smjeru triju koordinatnih osi. Senzor sile važan je element upravljačke jedinice čiji je zadatak regulacija sile odnosno momenta koji se javlja u prirubnici robota odnosno na prihvatnici alata uključujući i predmet koji prihvatnica drži. Priključak senzora sile sa upravljačkom jedinicom robota ostvaren je pomoću kabla koji štiti signal od utjecaja električnih i mehaničkih smetnji. No, važno je uzeti u obzir da vibracije okoline imaju utjecaj na očitanja

senzora sile zato što se prenose preko postolja na tijelo robota i uzrokuju oscilacije u očitanja sile.

Model dodira manipulatora

Kako su $z_1, z_2\ i\ z_3$ vertikalne koordinate položaja senzora, alata i podloge tada se na temelju (Norman S. Nise,2011:61-69) mogu postaviti sljedeće diferencijalne jednadžbe u Laplasovom području:

$$(m_s \cdot s^2 + k_{v_{sen}} \cdot s + c_{k_{sen}}) \cdot Z_1(s) - (k_{v_{sen}} \cdot s + c_{k_{alat}}) \cdot Z_2(s) = F(s)$$

$$-\left(k_{v_{sen}} \cdot s + c_{k_{alat}}\right) \cdot Z_1(s) + (m_a \cdot s^2 + k_{v_{sen}} \cdot s + c_{k_{sen}} + c_{k_{alat}}) \cdot Z_2(s) = 0$$

Glavna determinanta sustava Δ glasi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (m_s \cdot s^2 + k_{v_{sen}} \cdot s + c_{k_{sen}}) & -(k_{v_{sen}} \cdot s + c_{k_{alat}}) \\ -\left(k_{v_{sen}} \cdot s + c_{k_{alat}}\right) & (m_a \cdot s^2 + k_{v_{sen}} \cdot s + c_{k_{sen}} + c_{k_{alat}}) \end{vmatrix}$$

Pomoćna determinanta Δ_1 glasi:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} F(s) & -(k_{v_{sen}} \cdot s + c_{k_{alat}}) \\ 0 & (m_a \cdot s^2 + k_{v_{sen}} \cdot s + c_{k_{sen}} + c_{k_{alat}}) \end{vmatrix}$$

Odnosno pomoćna determinanta Δ_2 glasi:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} (m_s \cdot s^2 + k_{v_{sen}} \cdot s + c_{k_{sen}}) & F(s) \\ -\left(k_{v_{sen}} \cdot s + c_{k_{alat}}\right) & 0 \end{vmatrix}$$

Rješenja $Z_1(s)$ i $Z_1(s)$ diferencijalnih jednažbi u Laplasovom području glase:

$$Z_1(s) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} F(s) & -(k_{v_{sen}} \cdot s + c_{k_{alat}}) \\ 0 & (m_a \cdot s^2 + k_{v_{sen}} \cdot s + c_{k_{sen}} + c_{k_{alat}}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (m_s \cdot s^2 + k_{v_{sen}} \cdot s + c_{k_{sen}}) & -(k_{v_{sen}} \cdot s + c_{k_{alat}}) \\ -\left(k_{v_{sen}} \cdot s + c_{k_{alat}}\right) & (m_a \cdot s^2 + k_{v_{sen}} \cdot s + c_{k_{sen}} + c_{k_{alat}}) \end{vmatrix}}$$

$$Z_2(s) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} (m_1 \cdot s^2 + k_{v_{sen}} \cdot s + c_{k_{sen}}) & \frac{M_m(s)}{r} \\ -\left(k_{v_{sen}} \cdot s + c_{k_{alat}}\right) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (m_s \cdot s^2 + k_{v_{sen}} \cdot s + c_{k_{sen}}) & -(k_{v_{sen}} \cdot s + c_{k_{alat}}) \\ -\left(k_{v_{sen}} \cdot s + c_{k_{alat}}\right) & (m_a \cdot s^2 + k_{v_{sen}} \cdot s + c_{k_{sen}} + c_{k_{alat}}) \end{vmatrix}}$$

Sređivanjem prethodnih izraza slijedi:

$$Z_1(s) = \frac{b_2 \cdot s^2 + b_1 \cdot s + b_0}{a_4 \cdot s^4 + a_3 \cdot s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0} \cdot F(s)$$

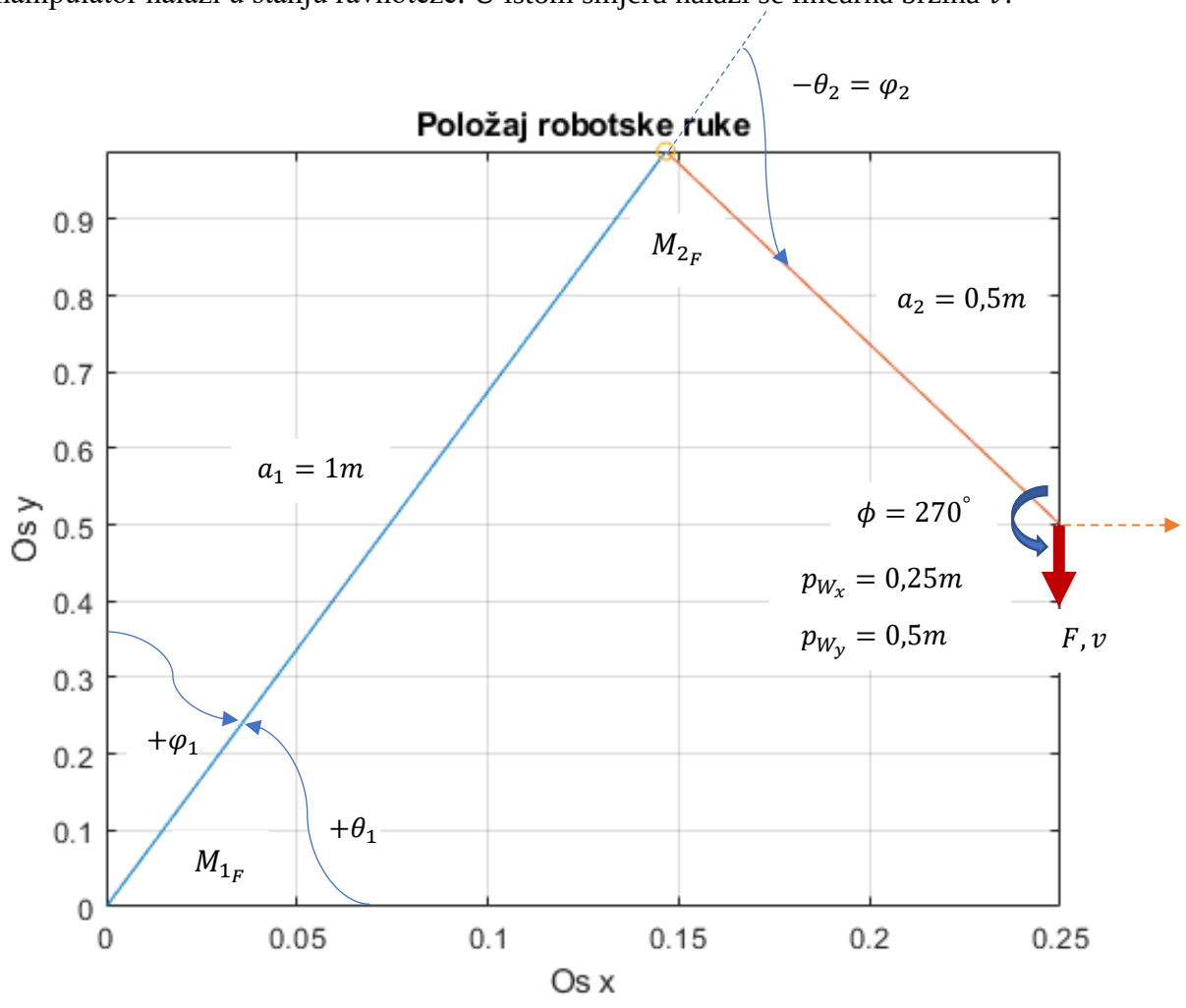
$$Z_2(s) = \frac{b_1 \cdot s + c_{k_{sen}}}{a_4 \cdot s^4 + a_3 \cdot s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0} \cdot F(s)$$

Gdje je:

$$b_2 = m_a$$
$$b_1 = k_{v_{sen}}$$
$$b_0 = c_{k_{sen}} + c_{k_{alat}}$$
$$a_4 = m_s \cdot m_a$$
$$a_3 = (m_s + m_a) \cdot k_{v_{sen}}$$
$$a_2 = \left[(m_s + m_a) \cdot c_{k_{sen}} + m_s \cdot c_{k_{alat}}\right]$$
$$a_1 = k_{v_{sen}} \cdot c_{k_{alat}}$$
$$a_0 = c_{k_{sen}} \cdot c_{k_{alat}}$$

Sila, brzina i moment

Sila F na vrhu troosnog planarnog robota, shematski prikazanog na slici 1.153, ostavruje se pomoću zakretnih momenata zglobova robota M_{1_F} i M_{2_F} koji će tu silu ostvariti kada se robotski manipulator nalazi u stanju ravnoteže. U istom smjeru nalazi se linearna brzina v.



Sl. 1.153 – Položaj robotske ruke troosnog planarnog robota

Na temelju indirektne kinematike mogu se izračunati kutevi θ_1 i θ_2 pod uvjetom da je rješenje moguće tj. da vrijedi:

$$\sqrt{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2} \leq a_1 + a_2$$

Ukoliko isto vrijedi onda je kut θ_1 za konfiguraciju prikazanu na slici 1.153 jednak:

$$\theta_1 = arctan\frac{p_{W_y}}{p_{W_x}} + arccos(\frac{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2 + a_1^2 - a_2^2}{2 \cdot a_1 \cdot \sqrt{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2}})$$

Jednako tako kut θ_2 iznosi:

$$\theta_2 = -\arccos(\frac{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2 - a_1^2 - a_2^2}{2 \cdot a_1 \cdot a_2})$$

Zakretni momenti u zglobovima robota M_{F_1} i M_{F_2} određuje se pomoću Jacobijeve transponirane matrice $J^T(q)$ kako slijedi:

$$\begin{bmatrix} M_{F_1} \\ M_{F_2} \end{bmatrix} = J^T(q) \cdot \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} \text{ gdje je } q = q(\theta_1, \theta_2)$$

Jakobijeva transponirana matrica $J^T(q)$ glasi:

$$J^T(q) = \begin{bmatrix} J_1^T \\ J_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_{W_y} & p_{W_x} \\ -a_2 \cdot S_{12} & a_2 \cdot C_{12} \end{bmatrix}$$

Gdje je:

$$S_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2) \text{ i } C_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

Odnosno:

$$F_x = F \cdot \cos\phi \text{ i } F_y = F \cdot \sin\phi$$

Na temelju prethodno navedenih relacija mogu se odrediti potrebni zakretni moment na temelju zadane sile i orijentacije senzora sile i alata robotskog manipulatora. MatLab rješenje prikazano je u nastavku:

```
'Zadano'
'Koordinate hvatišta W'
pwx=0.25 %metri
pwy=0.5 %metri
'Dužina članaka'
a1=1 %metri
a2=0.5 %metri
'Kut orijentacije senzora i alata'
fi=270 %stupnjevi
'Sila F'
F=500 %Newton
'Kriterije za moguće rješenje'
```

```
h1=sqrt(pwx^2+pwy^2)
h2=a1+a2
'h1 manji od h2 - zadovoljava'


'Rješenje'
'1. Korak: Određujemo vektor konfiguracije zglobova q=q(th1,th2)'
r=sqrt(pwx^2+pwy^2);
alfa=atan(pwy/pwx)*180/pi;
beta=acos((r^2+a1^2-a2^2)/(2*a1*r))*180/pi;
'Kut th1'
th1=alfa+beta
'Kut th2'
th2=-acos((r^2-a1^2-a2^2)/(2*a1*a2))*180/pi
'Konfiguracija 2'
syms x
y=x*tan(th1*pi/180);
fplot(y,[0 a1*cos(th1*pi/180)])
hold on
l=pwy-pwx*tan((th1+th2)*pi/180);
y=x*tan((th1+th2)*pi/180)+l;
fplot(y,[a1*cos(th1*pi/180) pwx])
hold on
x1=a1*cos(th1*pi/180);
y1=a1*sin(th1*pi/180);
plot(x1,y1,'o')
grid
xlabel('Os x')
ylabel('Os y')
title('Položaj robotske ruke')
hold off
'2. Korak: Određujemo momente M1f i M2f';
S12=sin((th1+th2)*pi/180);
C12=cos((th1+th2)*pi/180);
'Transponirani Jacobian'
JT1=[-pwy pwx];
JT2=[-a2*S12 a2*C12];
JT=[JT1;JT2]
'Sile po koordinatnim osima';
Fx=F*cos(fi*pi/180);
Fy=F*sin(fi*pi/180);
'Momenti u zglobovima'
M1f=JT1*[Fx;Fy]
M2f=JT2*[Fx;Fy]
plot(fi,M1f,'*')
hold on
plot(fi,M2f,'*')
hold on
'Graf momenata'
syms fi
Fx=F*cos(fi*pi/180);
Fy=F*sin(fi*pi/180);
JT1=[-pwy pwx];
```

```
JT2=[-a2*S12 a2*C12];
M1=JT1*[Fx;Fy];
M2=JT2*[Fx;Fy];
fplot(M1,[0 360])
hold on
fplot(M2,[0 360])
grid on
xlabel('Kut φ[°]')
ylabel('Moment zglobova M[Nm]')
title('Orijentacija senzora i alata')
hold off
'Graf sile'
syms fi
Fx=F*cos(fi*pi/180);
Fy=F*sin(fi*pi/180);
fplot(Fx,[0 360])
hold on
fplot(Fy,[0 360])
grid on
hold on
F=500
fi=270
Fx=F*cos(fi*pi/180);
Fy=F*sin(fi*pi/180);
plot(fi,Fx,'*')
hold on
plot(fi,Fy,'*')
hold on
xlabel('Kut φ[°]')
ylabel('Sila F[N]')
title('Orijentacija senzora i alata')
hold off
```

Rješenje

```
ans = 'Rješenje'
ans = '1. Korak: Određujemo vektor konfiguracije zglobova q=q(th1,th2)'
ans = 'Kut th1'
th1 = 81.5694
ans = 'Kut th2'
th2 = -159.6359
```

$$q = q(\theta_1, \theta_2)$$

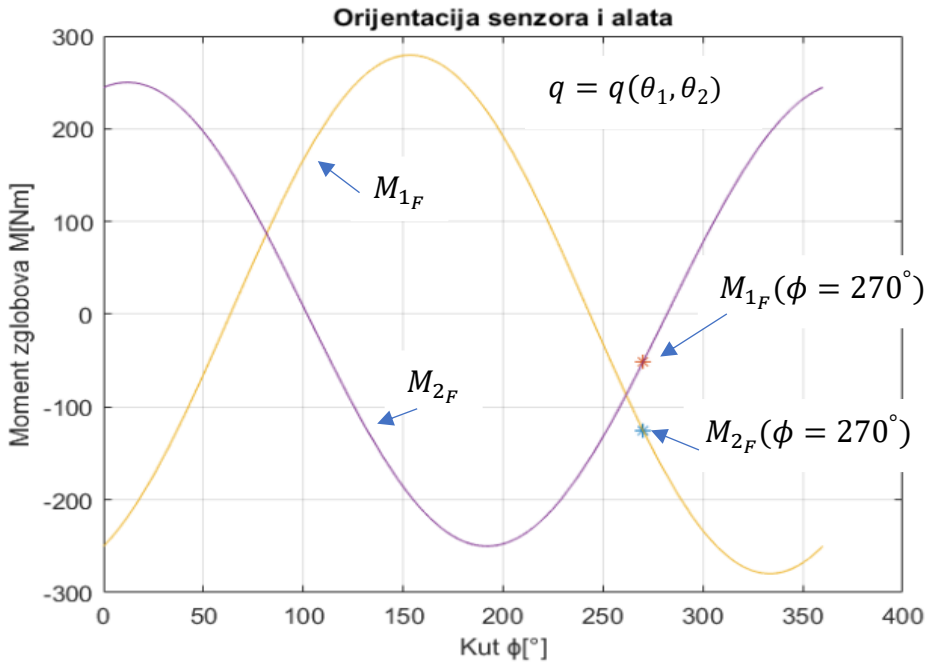
```
JT = 2×2
    -0.5000    0.2500
     0.4892    0.1034

ans = 'Momenti u zglobovima'
M1f = -125.0000
M2f = -51.6941
```

$$M_F = M_F(M_{1_F}, M_{2_F})$$

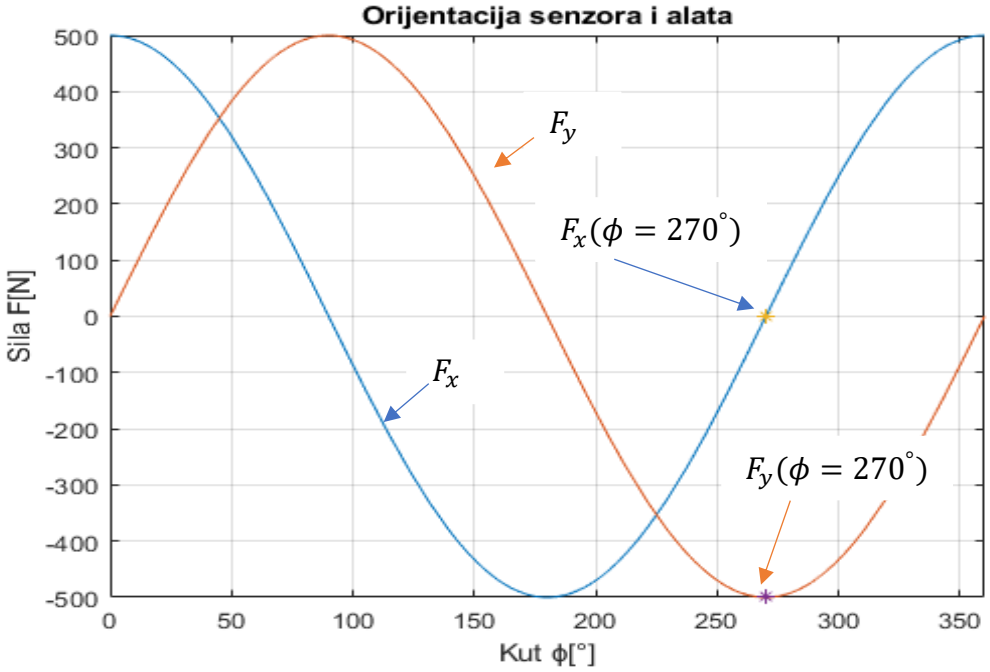
Na slici 1.154 prikazan je graf momenta u zglobovima robota M_{1_F} i M_{2_F} u odnosu na kut senzora sile i alata ϕ pri čemu su momenti orijentirani u suprotnom smjeru od vektora konfiguracije $q = q(\theta_1, \theta_2)$.

```
ans = 'Graf momenata'
```



Sl. 1.154 - Graf momenta u zglobovima robota M_{1_F} i M_{2_F}

Na slici 1.155 prikazan je graf komponenata sile $F = [F_x; F_y]$ u odnosu na kut orijentacije senzora sile i alata ϕ.



Sl. 1.155 - Graf komponenata sile $F = [F_x; F_y]$

Na analogan način moguće je odrediti i kutne brzine u zglobovima robota ω_{1_v} i ω_{2_v} kao i brojeve okretaja u minuti n_1 i n_2 u odnosu na lineranu brzinu gibanja v hvatišta senzora sile i alata W u smjeru sile F. Kutne brzine ω_{1_v} i ω_{2_v} određuju se pomoću Jacobijeve transponirane $J(q)$ kako slijedi:

$$\begin{bmatrix}\omega_{1_v}\\ \omega_{2_v}\end{bmatrix} = J(q)\cdot v \text{ gdje je } q = q(\theta_1, \theta_2)$$

Jakobijeva transponirana matrica $J^T(q)$ glasi:

$$J(q) = \begin{bmatrix}J_1\\ J_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-p_{W_y} & -a_2\cdot S_{12}\\ p_{W_x} & a_2\cdot C_{12}\end{bmatrix}$$

Gdje je:

$$S_{12} = \sin(\theta_1+\theta_2) \text{ i } C_{12} = \cos(\theta_1+\theta_2)$$

Odnosno:

$$v_x = v\cdot\cos\phi \text{ i } v_y = v\cdot\sin\phi$$

MatLab rješenje prikazano je u nastavku za lineranu brzinu $v = 2cm/sek$:

```
'3. Određujemo kutne brzine (om1v i om2v) i broj okretaja (n1 i n2)'
'Zadana linerana brzina'
v=-0.02 %metar/sekundi
fi=270 %stupnjevi
vx=v*cos(fi*pi/180);
vy=v*sin(fi*pi/180);
'Jakobijan'
J1=[-pwy -a2*S12];
J2=[pwx a2*C12];
J=[J1;J2]
'Kutna brzina i okretaji'
om1v=J1*[vx;vy] %rad/sek
n1=om1v*30/pi  %okr/min
om2v=J2*[vx;vy] %rad/sek
n2=om2v*30/pi  %okr/min
plot(fi,n1,'*')
hold on
plot(fi,n2,'*')
hold on
'Graf kutne brzine'
syms fi
vx=v*cos(fi*pi/180);
vy=v*sin(fi*pi/180);
J1=[-pwy -a2*S12];
J2=[pwx a2*C12];
om1v=J1*[vx;vy];
om2v=J2*[vx;vy];
n1=om1v*30/pi;
fplot(n1,[0 360])
hold on
n2=om2v*30/pi;
```

```
fplot(n2,[0 360])
grid on
xlabel('Kut φ[°]')
ylabel('Kutna brzina om[okr/min]')
title('Orijentacija senzora i alata')
hold off
```

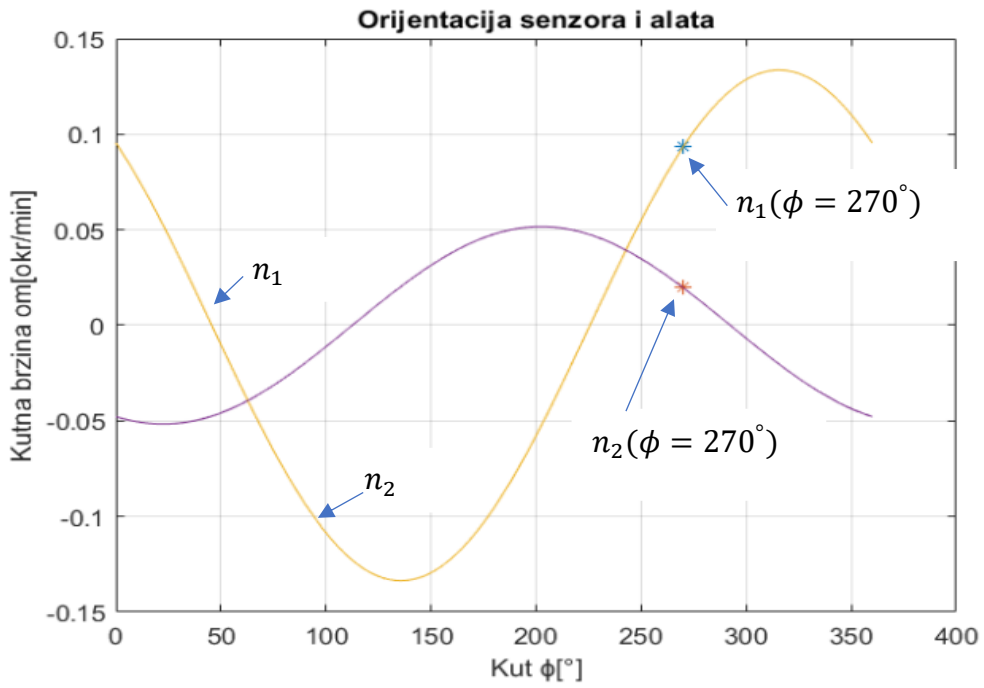
Slijedi:

```
ans = '3. Određujemo kutne brzine (om1v i om2v) i broj okretaja (n1 i n2)'
ans = 'Zadana linerana brzina'
v = -0.0200
fi = 270
ans = 'Jakobijan'
J = 2×2
    -0.5000    0.4892
     0.2500    0.1034

ans = 'Kutna brzina i okretaji'
om1v = 0.0098
n1 = 0.0934
om2v = 0.0021
n2 = 0.0197
```

Na slici 1.156 prikazan je graf broja okretaja u minuti n_1 i n_2 u odnosu na kut orijentacije senzora sile i alata ϕ.

```
ans = 'Graf kutne brzine'
```



Sl. 1.156 - Graf broja okretaja u minuti n_1 i n_2

Na temelju prethodno navedenoga odredit će se jednadžba kretanja robota sukladno zakonu o očuvanju energije.

Jednadžba kretanja robota

Jednadžba kretanja robota određena je sljedećom realcijom:

$$M_{meh} = M_{din} + M_{trenja} + M_{sta} + M_F$$

gdje je:

M_{meh} - mehanički moment u zglobovima osi robota

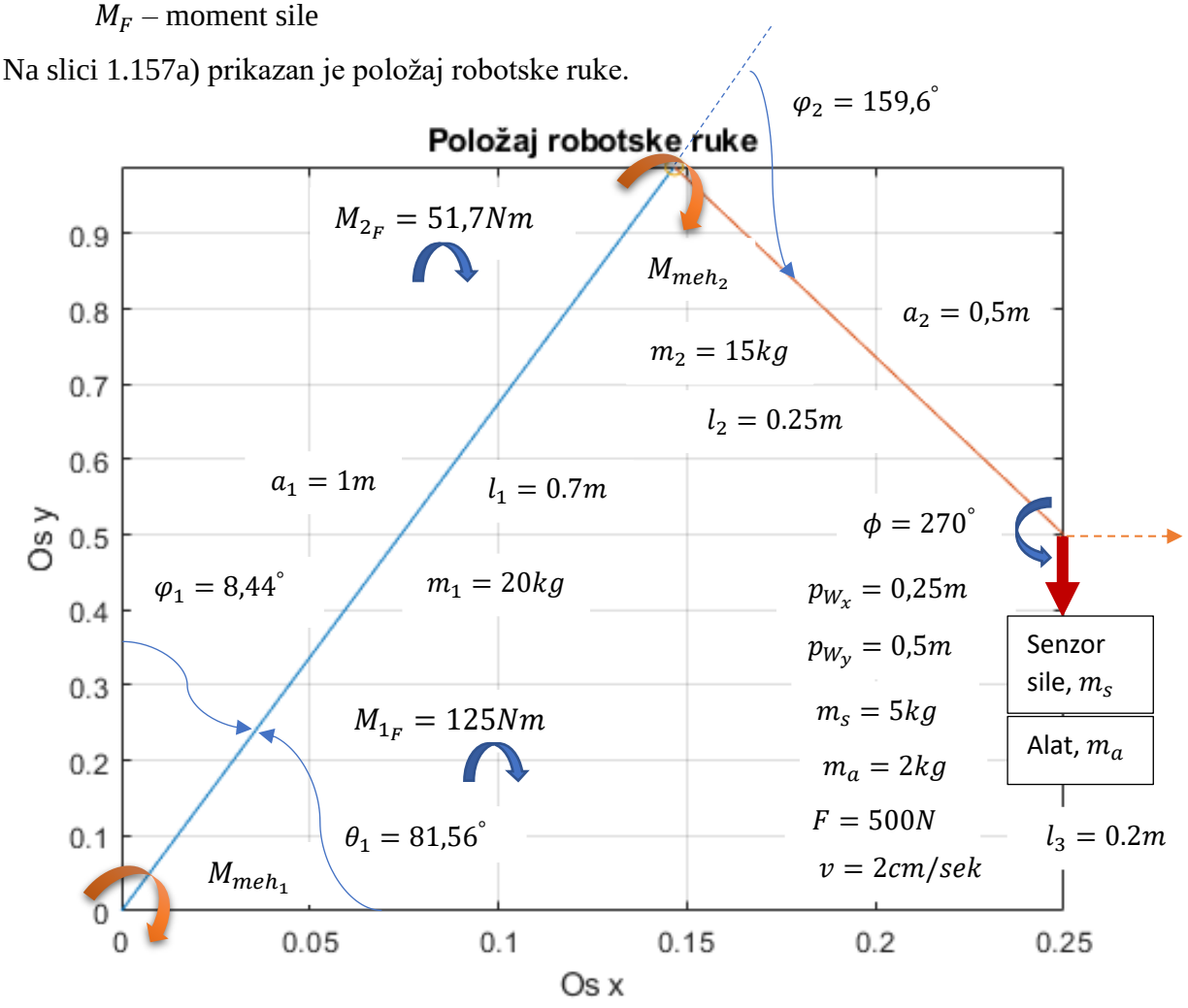
M_{trenja} – moment viskoznog trenja

M_{din} – moment uslijed inercije

M_{sta} – moment uslijed sile gravitacije

M_F – moment sile

Na slici 1.157a) prikazan je položaj robotske ruke.



Sl. 1.157a) - Položaj robotske ruke troosnog planarnog robota sa senzorom sile i alatom

Kako je već prethodno naglašeno u točki 9.1.1 ovog poglavlja u konkretnom slučaju prikazanom na slici 1.153 može se zanemariti utjecaj centripetalne sile, ali je potrebno uzeti u obzir utjeca Coriolisove sile za prvi zglob (B), masu senzora sile m_s i masu alata m_a, i jednako tako potrebno je uzeti u obzir mase pojedinog članka robota m_1 i m_2 odnosno položaje težišta masa članaka l_1 *i* l_2 , kao i senzora i alata l_3 kako je prikazano na slici 1.157a). Pri tome važno

je naglasiti orijentaciju vektora konfiguracije zglobova robota u odnosu na kuteve φ_1, φ_2 i ϕ tj. u smjeru djelovanja sile gravitacije čime se mijenja predznak momenata M_{1_F} i M_{2_F}.

Polazeći od prethodno navedenoga u točki 9.1.1 vrijedi da je:

$$M_{meh_1}(t) \cong J_{u_1} \cdot \dot{\omega}_1(t) + B \cdot \omega_1(t) + M_{g_1} + M_{1_F}$$

$$M_{meh_2}(t) \cong J_{u_2} \cdot \dot{\omega}_2(t) + M_{g_2} + M_{2_F}$$

Tada vrijedi na temelju Lapasove transformacije:

$$G_1(s) = \frac{\Omega_1(s)}{M_{meh_1}(s) - M_{meh_1}} = \frac{1}{J_{u_1} \cdot s + k_{v_1}}$$

$$G_2(s) = \frac{\Omega_2(s)}{M_{meh_2}(s) - M_{meh_2}} = \frac{1}{J_{u_2} \cdot s + k_{v_2}}$$

gdje su ukupni momenti inercije J_{u_1} i J_{u_2} u zglobovima robota jednak:

$$J_{u_1} = J_{m_1} + J_{iner_1} + J_{sa_1}$$

$$J_{u_2} = J_{m_2} + J_{iner_2} + J_{sa_2}$$

Odnosno:

$$M_{meh_1} = M_{g_1} + M_{1_F}$$

$$M_{meh_2} = M_{g_2} + M_{2_F}$$

Pri čemu je za prvi zglob vrijedi:

J_{m_1} – moment inercije motora

$J_{iner_1} = m_1 \cdot l_1^2 + m_2 \cdot (a_1^2 + l_2^2 + 2 \cdot a_1 \cdot l_2 \cdot \cos\varphi_2)$ – moment inercije robotske ruke

$J_{sa_1} = (m_s + m_a) \cdot r_1^2$ – moment inercije senzora sile i alata

Gdje je:

$$r_1^2 = p_{W_x}^2 + \left(p_{w_y} - l_3\right)^2$$

Odnosno

$$k_{v_1} = B + r_1^2 \cdot k_{v_{sen}}$$

Gdje je:

k_{v_1} – ukupni koeficijent trenja

$k_{v_{sen}}$ – koeficijent viskoznog trenja senzora

$B = C \cdot \omega_2(t)$ – utjecaj Coriolisove sile

Pri čemu je:

$C = 2 \cdot m_2 \cdot a_1 \cdot l_2 \cdot \sin\varphi_1$

$\omega_2(t) = \omega_2^{stac}$ – kutna brzina ustaljenog stanja

Jednako tako za drugi zglob vrijedi:

J_{m_2} – moment inercije motora

k_{v_2} – koeficijent viskoznog trenja

$J_{iner_2} = m_2 \cdot l_2^2$ – moment inercije robotske ruke

$J_{sa_2} = (m_s + m_a) \cdot r_2^2$ – moment inercije senzora sile i alata

Gdje je:

$$r_2^2 = a_2^2 + l_3^2 + 2 \cdot a_2 \cdot l_3 \cdot \cos\gamma$$

$$\gamma = 180^{\circ} - \varphi_3$$

$$\varphi_3 = \phi - (\varphi_1 + \varphi_2)$$

Odnosno

$$k_{v_2} = B + r_2^2 \cdot k_{v_{sen}}$$

Gdje je:

k_{v_2} – ukupni koeficijent trenja

$k_{v_{sen}}$ – koeficijent viskoznog trenja senzora

$B = 0$ – utjecaj Coriolisove sile

Ukupni moment gravitacije u zglobovima robota jednak je:

$$M_{g_1} = M_{g_{r1}} + M_{g_{sa}}$$

$$M_{g_2} = M_{g_{r2}} + M_{g_{sa}}$$

Pri čemu vrijedi:

$M_{g_{r1}} = -[(m_1 \cdot l_1 + m_2 \cdot a_1) \cdot sin\,\varphi_1 + m_2 \cdot l_2 \cdot sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \cdot g$ - moment gravitacije robotske ruke prvog zgloba

$M_{g_{r2}} = -m_2 \cdot l_2 \cdot sin(\varphi_1 + \varphi_2) \cdot g$ - moment gravitacije robotske ruke drugog zgloba

$M_{g_{sa}} = -(m_s + m_a) \cdot (p_{W_y} - l_3) \cdot g$ – moment gravitacije senzora i alata

$g = 9{,}81\,{}^{m}/_{s^2}$ – ubrzanje gravitacije

U prethodno prezentiranom slučaju zanemaren je utjecaj Coriolisove i centripetalne sile kao i međuzglobnih momenata inercije. No, ono što je potrebno uzeti u obzir je orijentacija momenta graitacije M_g i momenta sile M_F. U slučaju ravnoteže u stacionarnom stanju vrijedi da je $M_{meh} = M_g$ pri čemu je $M_F = 0$, no u slučaju kada se želi ostvariti sila F u smjeru gravitacije tada vrijedi da je $M_{meh} = M_F + M_g$[18] tj. koristi se sila gravitacije za ostvarenje sile F. Kad bi

[18] Moment gravitacije M_g ima negativan predznak

isto bilo u spurotnom smjeru tada vrijedi $M_{meh} = M_F - M_g$ jer pogon mora svladati silu gravitacije M_g kako bi ostvario potrebnu silu F.

MatLab rješenje prikazano je u nastavku.

```
'Zadano'
'Koordinate hvatišta W'
pwx=0.25 %metri
pwy=0.5 %metri
'Dužina članaka'
a1=1 %metri
a2=0.5 %metri
'Masa članaka, senzora sile i alata'
m1=20 %kilogrami
m2=15 %kilogrami
ms=5 %kilogrami
ma=2 %kilogrami
'Težišta masa'
l1=0.7 %metri
l2=0.25 %metri
l3=0.2 %metri
'Vektor konfiguracije zglobova'
th1=81.5694 %stupnjevi
th2=-159.6359 %stupnjevi
fi1=(90-th1)*pi/180; %radiani
fi2=-th2*pi/180; %radiani
'Kut orijentacije senzora i alata'
fi=270 %radiani
'Sila F'
F=500 %Newton

'Rješenje'
'1. Korak: Određujemo ukupni momenta inercije i moment gravitacije'
'Prvi zglob'
Jm1=0.5;
Jinr1=m1*l1^2+m2*(a2^2+l2^2+2*a1*l2*cos(fi2));
m3=ms+ma;
r1=sqrt(pwx^2+(pwy-l3)^2);
Jsa1=m3*r1^2;
Ju1=Jm1+Jinr1+Jsa1 %ukupni moment inercije
g=9.81;
Mgr1=-g*((m1*l1+m2*a1)*sin(fi1)+m2*l2*sin(fi1+fi2));
Mgsa=-g*m3*(pwy-l3);
Mg1=Mgr1+Mgsa %ukupni moment gravitacije
'Drugi zglob'
Jm2=0.5;
Jinr2=m2*l2^2;
fi3=fi1-(fi1+fi2);
delta=pi-fi3;
r2=sqrt(a2^2+l3^2+2*a2*l3*cos(delta));
Jsa2=m3*r2^2;
Ju2=Jm2+Jinr2+Jsa2 %ukupni moment inercije
Mgr2=-g*m2*l2*sin(fi1+fi2);
Mg2=Mgr2+Mgsa %ukupni moment gravitacije
```

```
'2. Korak: Određujemo momente M1f i M2f'
S12=sin((th1+th2)*pi/180);
C12=cos((th1+th2)*pi/180);
'Transponirani Jacobian';
JT1=[-pwy pwx];
JT2=[-a2*S12 a2*C12];
JT=[JT1;JT2];
'Sile po koordinatnim osima';
Fx=F*cos(fi*pi/180);
Fy=F*sin(fi*pi/180);
'Momenti u zglobovima'
M1f=-JT1*[Fx;Fy]
M2f=-JT2*[Fx;Fy]
'3. Određujedmo mehaničke momente Mmeh1 i Mmeh2'
Mmeh1=M1f+Mg1
Mmeh2=M2f+Mg2

'Zadana linerana brzina';
v=-0.02; %metar/sekundu
fi=270; %stupnjevi
vx=v*cos(fi*pi/180);
vy=v*sin(fi*pi/180);
'Jakobijan';
J1=[-pwy -a2*S12];
J2=[pwx a2*C12];
J=[J1;J2];
'Kutna brzina'
om1v=J1*[vx;vy] %rad/sek
om2v=J2*[vx;vy] %rad/sek
'Utjecaj Coriolisove sile'
C=2*m2*a1*l2*sin(fi2);
B=C*om2v

'Utjecaj viskoznog trenja senzora sile'
kvs=5 %viskozno trenje senzora sile
kv1=B+r1^2*kvs
kv2=r2^2*kvs
```

Rješenje:

```
ans = '1. Korak: Određujemo ukupni momenta inercije i moment gravitacije'

Ju1 = 9.0237

Ju2 = 4.7800

ans = '3. Određujedmo mehaničke momente Mmeh1 i Mmeh2'

Mmeh1 = 55.0828

Mmeh2 = 23.4863


ans = 'Utjecaj viskoznog trenja senzora sile'

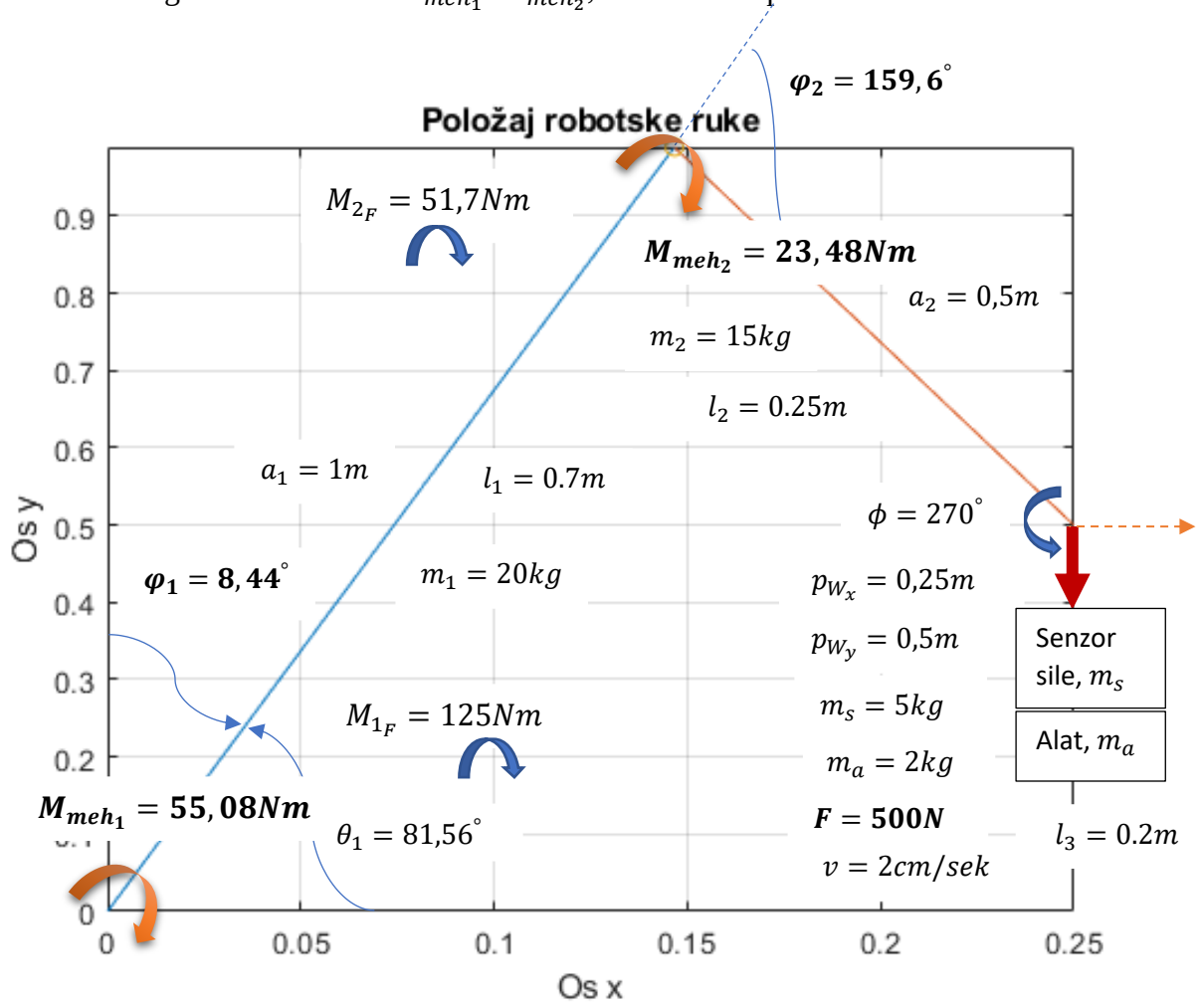
kvs = 5

kv1 = 0.7679

kv2 = 2.3875
```

Na slici 1.157b) prikazan je položaj robotske ruke s upisanim vrijednostima potrebnih momenata u zglobovima robota M_{meh_1} i M_{meh_2}, kao i ostalih parametara.

.



Sl. 1.157b) - Položaj robotske ruke troosnog planarnog robota sa senzorom sile i alatom

Na temelju prethodno izračunatog vrijedi:

$$G_1(s) = \frac{\Omega_1(s)}{M_{meh_1}(s) - 55,08} = \frac{1}{9,023 \cdot s + 0,768}$$

$$G_2(s) = \frac{\Omega_2(s)}{M_{meh_2}(s) - 23,48} = \frac{1}{4,78 \cdot s + 2.387}$$

Pri čemu je koeficijent viskoznog trenja senzor sile iznosi $k_{v_{sen}} = 5Ns/m$.

Utjecaj koeficijenta viskoznog trenja (viskoznosti) senzora sile

Utjecaj koeficijenta viskoznog trenja (viskoznosti) senzora sile određuje se na temelju podataka o koeficijentima krutosti senzora sile i alata (objekta) koji može biti izrađen od različitih materijal. Kako je prethodno definirano na slici 1.152 model dodira senzora sile i alata s okolinom opisano je sljedećim prijenosnim funkcijama:

$$G_s(s) = \frac{Z_1(s)}{F(s)} = \frac{b_2 \cdot s^2 + b_1 \cdot s + b_0}{a_4 \cdot s^4 + a_3 \cdot s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0} \cdot F(s)$$

$$G_a(s) = \frac{Z_2(s)}{F(s)} = \frac{b_1 \cdot s + c_{k_{sen}}}{a_4 \cdot s^4 + a_3 \cdot s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0} \cdot F(s)$$

Gdje je:

$b_2 = m_a$

$b_1 = k_{v_{sen}}$

$b_0 = c_{k_{sen}} + c_{k_{alat}}$

$a_4 = m_s \cdot m_a$

$a_3 = (m_s + m_a) \cdot k_{v_{sen}}$

$a_2 = \left[(m_s + m_a) \cdot c_{k_{sen}} + m_s \cdot c_{k_{alat}}\right]$

$a_1 = k_{v_{sen}} \cdot c_{k_{alat}}$

$a_0 = c_{k_{sen}} \cdot c_{k_{alat}}$

U nastavku će se odrediti prijenosne funkcije $G_s(s)$ i $G_a(s)$ na sljedećih parametra senzora sile i alata kako slijedi:

$m_s = 5kg$ – masa senzora

$m_a = 2kg$ – masa alata

$k_{v_{sen}} = 1 \cdot 10^3 Ns/m^2$- koeficijent viskoznosti senzora

$c_{k_{sen}} = 1 \cdot 10^5 N/m$ – koeficijent krztosti senzora

$c_{k_{alat}} = 6 \cdot 10^3 N/m$ – koeficijent krutosti materijala alata (guma)

$c_{k_{alat}} = 6 \cdot 10^4 N/m$ – koeficijent krutosti materijala alata (aluminij)

$c_{k_{alat}} = 8 \cdot 10^5 N/m$ – koeficijent krutosti materijala alata (čelik)

Na temelju prijelaznih karkteristika $Z_1(s)$ i $Z_2(s)$ odredit će se prijelazna funkcija sile $F_s(s)$ i $F_a(s)$ na step pobudu F$\cdot \frac{1}{s}$ gdje $F = 500N$. Prijelazne funkcije sile $F_s(s)$ i $F_a(s)$ određene su sjedećim mrelacijama:

$$F_s(s) = c_{k_{sen}} \cdot [\, Z_1(s) - \, Z_2(s)] \cdot \frac{F}{s}$$

$$F_a(s) = c_{k_{alat}} \cdot [\, Z_2(s) - \, Z_3(s)] \cdot \frac{F}{s}$$

Sila F_s je sila koju registrira senzor sile, a F_a je sila koja se manifestira u alatu i djeluje na objekt. Idelano bi bilo da nakon prijelaznog procesa vrijedi:

$$F_s(s) = F_a(s)$$

No, to nije uvijek tako zabog vanjskih poremećaja - prijelazna karakteristikom pomaka $Z_3(s)$.

Potrebno je naglasiti kako prijelazna karakteristika pomaka $Z_3(s)$ predstavlja profil objekta s kojim je alat u kontaktu, ali jednako tako to može biti hrapavost obradne površine, promjena dimenzije alata zbog istrošenosti ili neki drugi poremećaj koji u općem slučaju nije poznat.

MatLab rješenje prikazano je u nastavku.

```
'Zadani parametri'
ms=5 %masa senzora
ma=2 %masa alata
kvs=1e3 %koeficijent viskoznosti senzora
Cks=1e5 %koeficijent krutosti senzora sile
Cka=6e3 % koeficijent krutosti alata (guma)
F=500 %zahtjevana sila
z3=0.001 %hrapavost površine

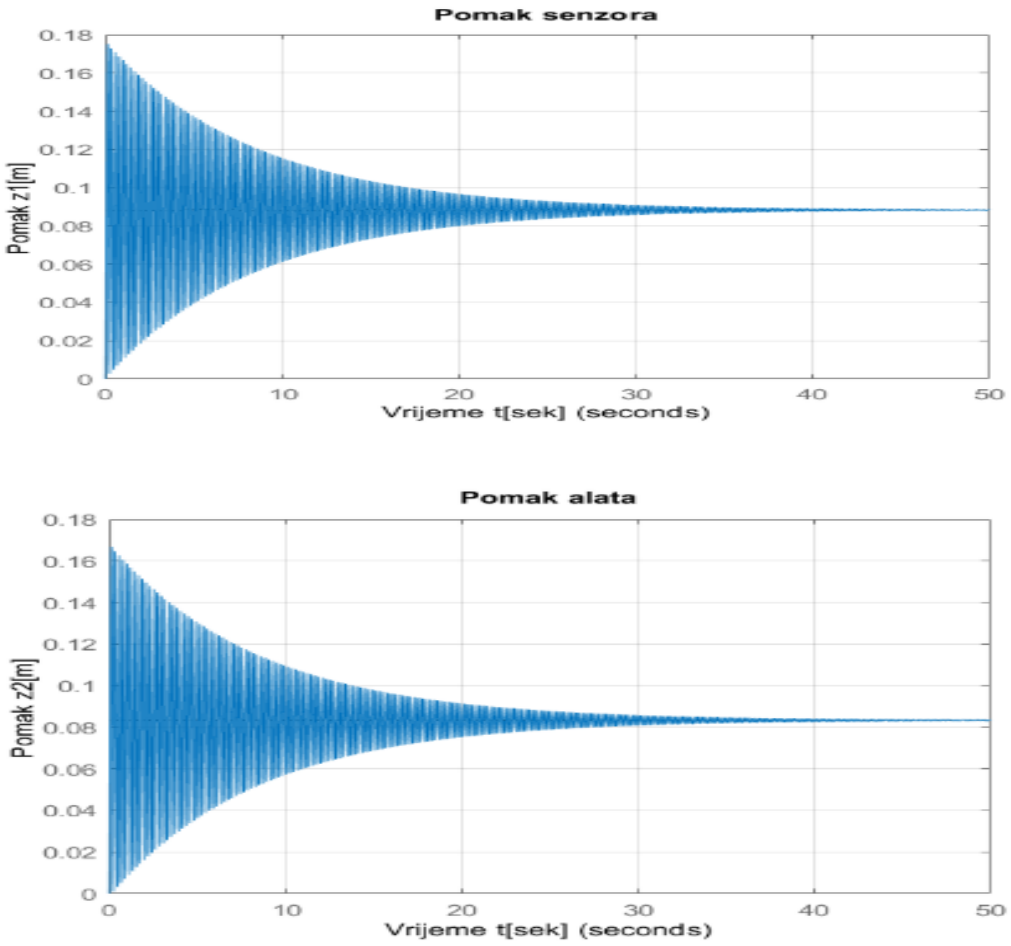

'Rješenje'
'1. Korak: Određivanje prijenosnih funkcija Gs i Ga';
b2=ma;
b1=kvs;
b0=Cka+Cks;
a0=Cka*Cks;
a1=kvs*Cka;
a2=(Cks*(ms+ma)+Cka*ms);
a3=kvs*(ms+ma);
a4=ms*ma;
'Određivanje prijenosne funkcije Gs';
Gs=tf([b2 b1 b0],[a4 a3 a2 a1 a0]);
'Određivanje prijenosne funkcije Ga';
Ga=tf([b1 Cks],[a4 a3 a2 a1 a0]);
'Graf pomaka z1 i z2 na step funkcij F/s';
z1=F*Gs;
step(z1)
xlabel('Vrijeme t[sek]')
ylabel('Pomak z1[m]')
title('Pomak senzora')
grid
z2=F*Ga;
step(z2)
xlabel('Vrijeme t[sek]')
ylabel('Pomak z2[m]')
title('Pomak alata')
grid
'Dinamički proces sile na snezoru sile Fs'
Fs=Cks*(z1-z2);
step(Fs)
Fs=dcgain(Fs)
xlabel('Vrijeme t[sek]')
ylabel('Sila Fs[N]')
title('Sila na senzoru')
grid
'Dinamički proces sile na alatu Fa'
```

```
Fa=Cka*(z2-z3);
step(Fa)
Fa=dcgain(Fa)
xlabel('Vrijeme t[sek]')
ylabel('Sila Fa[N]')
title('Sila na alatu')
grid
```

U prvom slučaju ***„guma“*** zadani su sljedeći parametri pri čemu je hrapavost površine iznoslila 0,001m (1mm), a koeficijent krutosti (guma) iznosio je $c_{k_{alat}} = 6 \cdot 10^3 N/m$.

```
ans = 'Zadani parametri'
ms = 5
ma = 2
kvs = 1000
Cks = 100000
Cka = 6000
F = 500
z3 = 0.0100
```

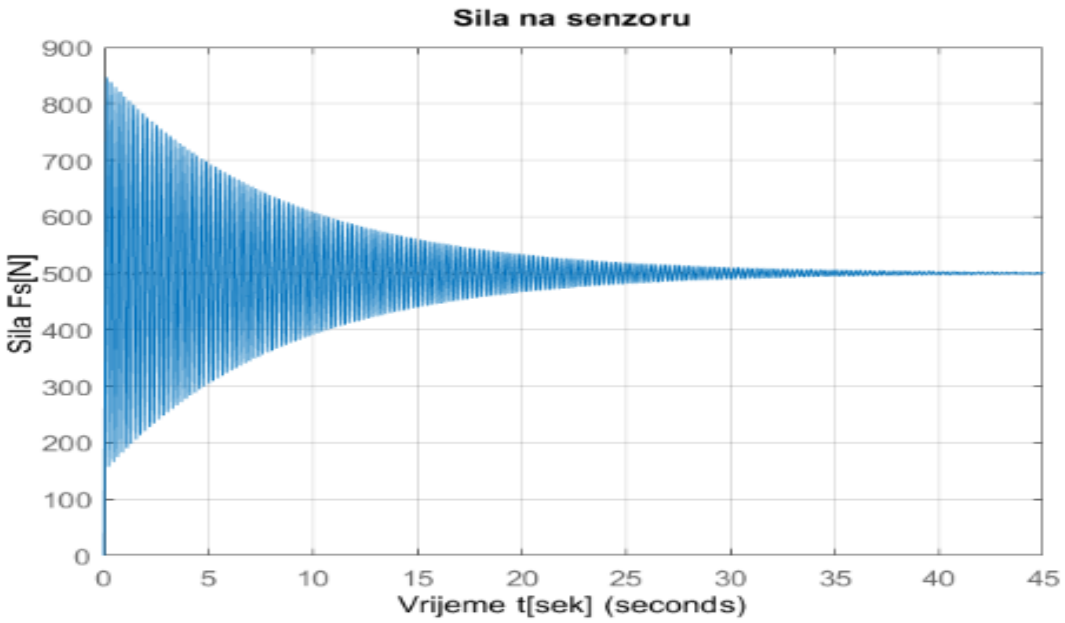
Na slici 1.158 a) i b) prikazan je pomak senzora sile $z_1(t)$ i pomaka alata $z_2(t)$. Isti imaju značajan oscilirajući odziv u trajanju od cca 40 sekundi.



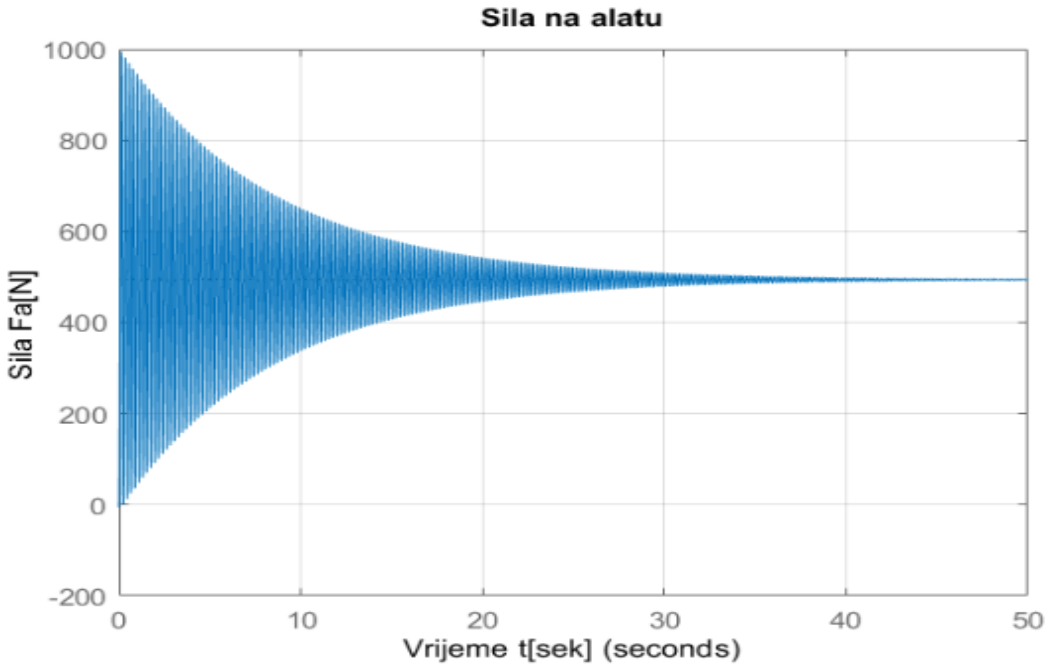
Sl. 1.158 a) i b) - Pomak senzora sile $z_1(t)$ i pomaka alata $z_2(t)$

Na slici 1.159 a) i b) prikazan je odziv sile $F_s(t)$ izmjerene na senzoru sile i odziv sile na alatu $F_a(t)$ pri čemu je hrapovost površine 0.001m (1mm)

```
ans = 'Dinamički proces sile na snezoru sile Fs'
Fs = 500
```




```
ans = 'Dinamički proces sile na alatu Fa'
Fa = 494
```



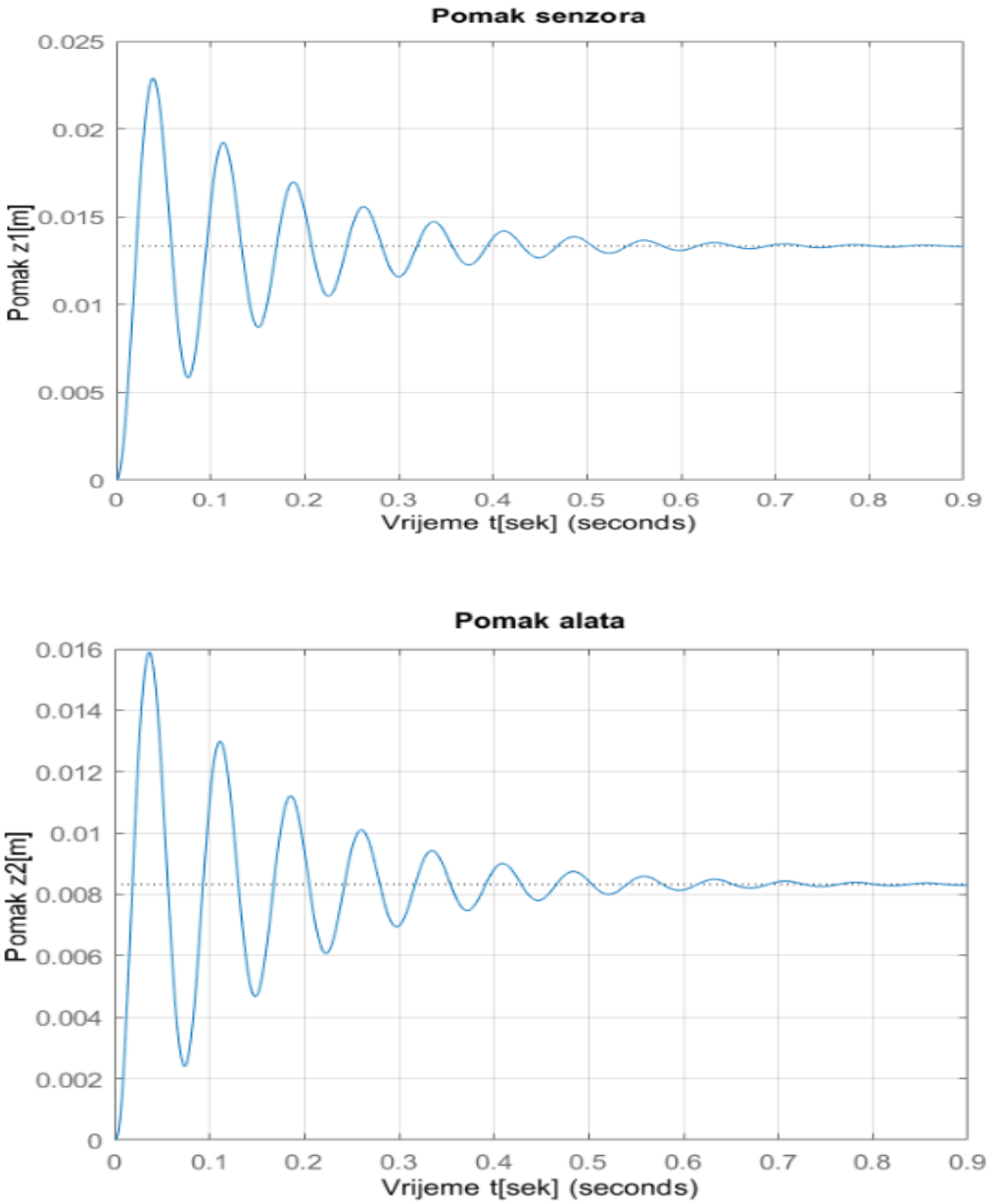
Sl. 1.159 a) i b) – Odziv sile na senzoru sile $F_s(t)$ i na alatu $F_a(t)$

Uočava se kako je zbog hrapavosti provršine od 1mm sila na alatu F_a smanjena za 6N.

U drugom slučaju ***„aluminij“*** zadani su sljedeći parametri pri čemu je hrapavost površine iznoslila 0,001m (1mm), a koeficijent krutosti (aluminij) iznosio je $c_{k_{alat}} = 6 \cdot 10^4 N/m$.

```
ans = 'Zadani parametri'
ms = 5
ma = 2
kvs = 1000
Cks = 100000
Cka = 60000
F = 500
z3 = 1.0000e-03
```

Na slici 1.160 a) i b) prikazan je pomak senzora sile $z_1(t)$ i pomaka alata $z_2(t)$. Isti imaju oscilirajući odziv u trajanju od cca 0,7 sekundi.



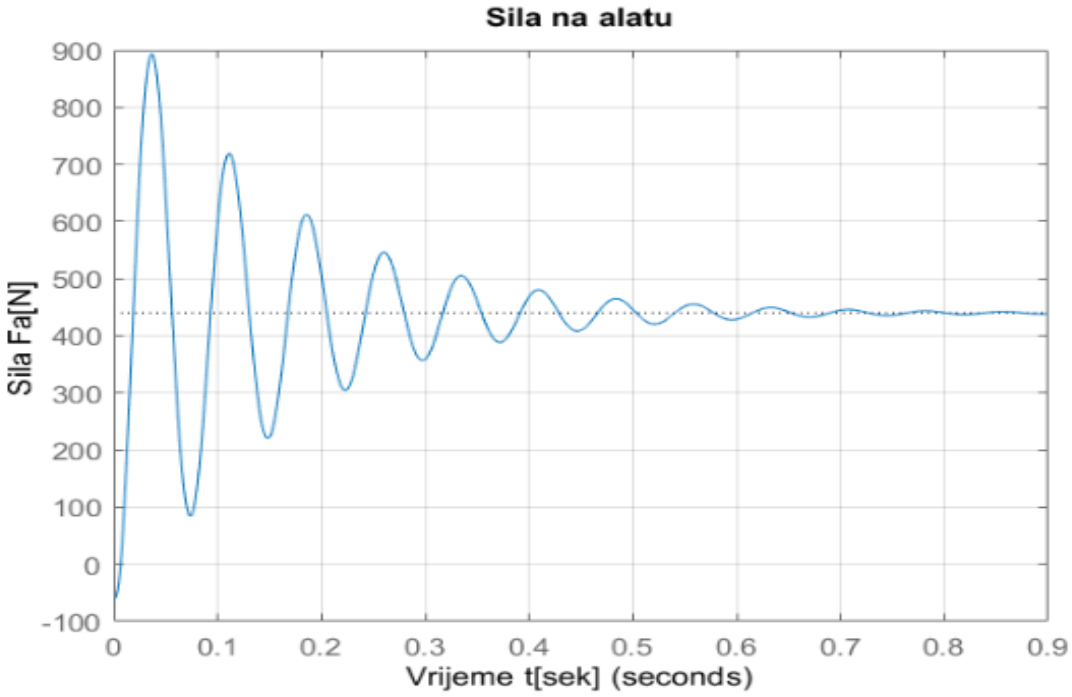
Sl. 1.160 a) i b) - Pomak senzora sile $z_1(t)$ i pomaka alata $z_2(t)$

Na slici 1.161 a) i b) prikazan je odziv sile $F_s(t)$ izmjerene na senzoru sile i odziv sile na alatu $F_a(t)$ pri čemu je hrapovost površine 0.001m (1mm)

```
ans = 'Dinamički proces sile na snezoru sile Fs'
Fs = 500
```




```
ans = 'Dinamički proces sile na alatu Fa'
Fa = 440
```



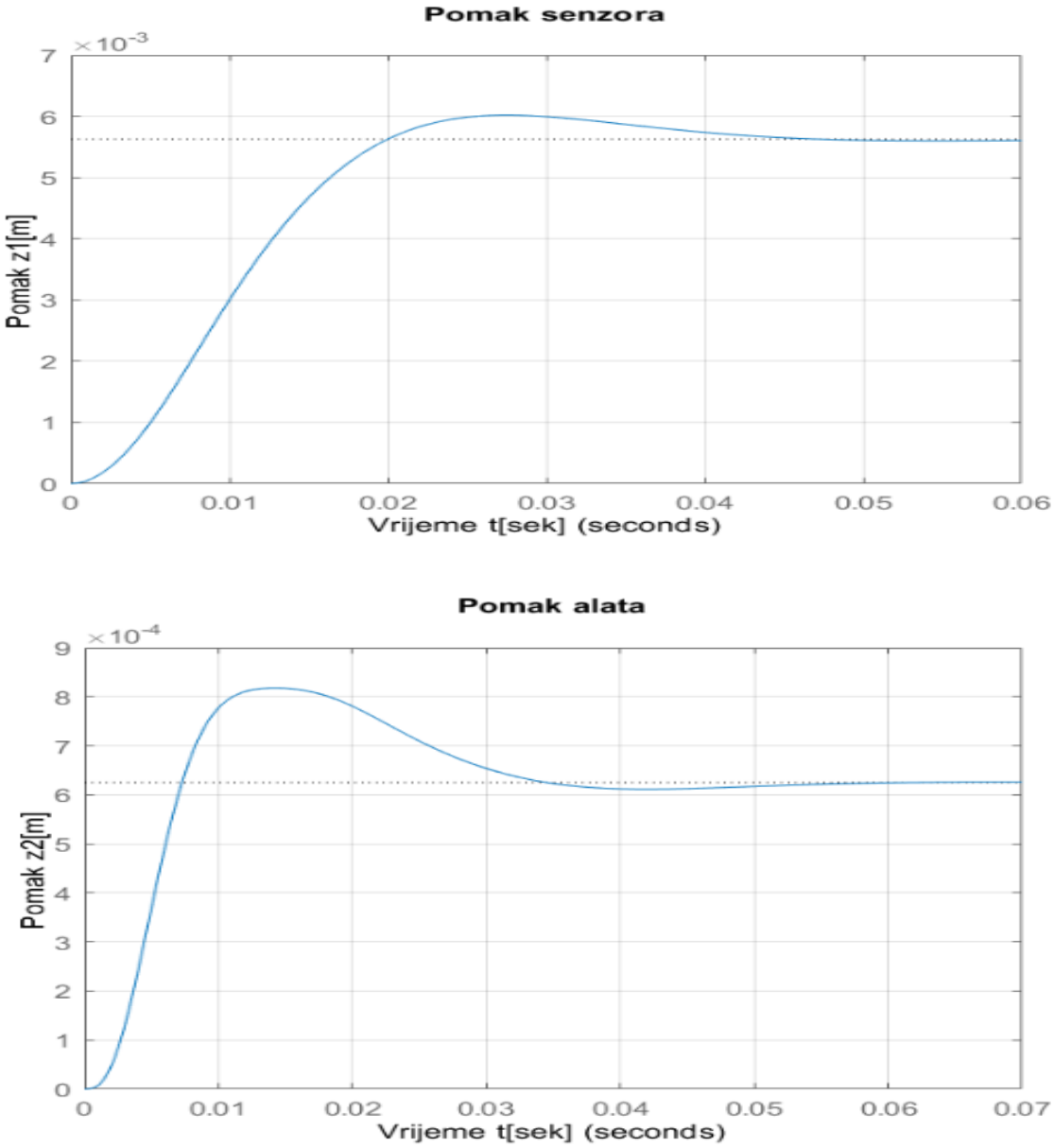
Sl. 1.161 a) i b) – Odziv sile na senzoru sile $F_s(t)$ i na alatu $F_a(t)$

Uočava se kako je zbog hrapavosti provršine od 1mm sila na alatu F_a smanjena za 60N.

U drugom slučaju ***„čelik“*** zadani su sljedeći parametri pri čemu je hrapavost površine iznoslila 0,1mm, a koeficijent krutosti (čelik) iznosio je $c_{k_{alat}} = 8 \cdot 10^5 N/m$.

```
ans = 'Zadani parametri'
ms = 5
ma = 2
kvs = 1000
Cks = 100000
Cka = 800000
F = 500
z3 = 1.0000e-04
```

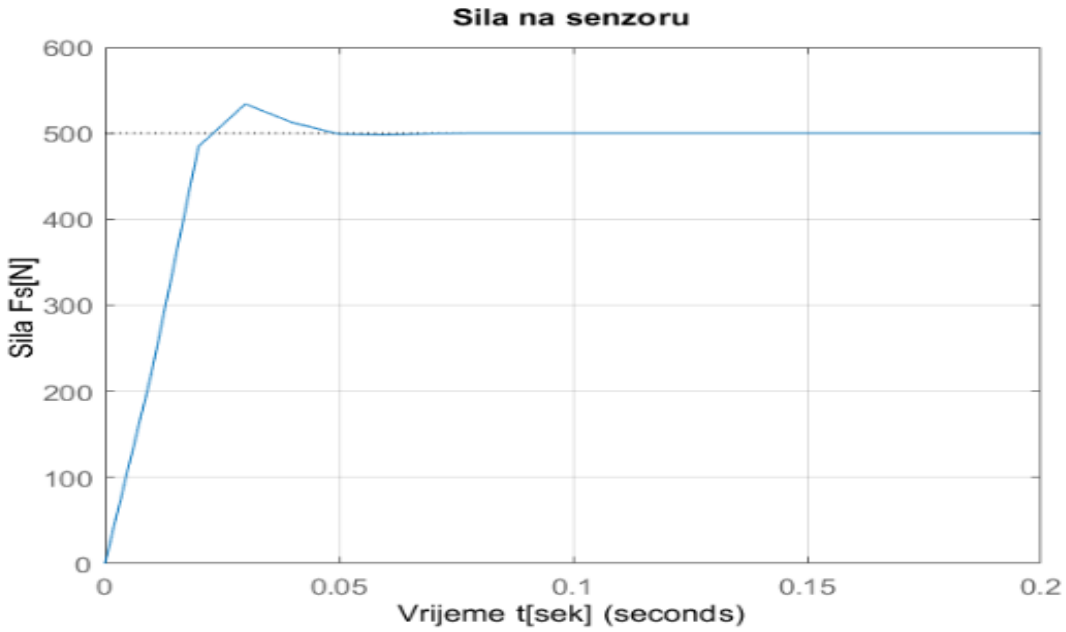
Na slici 1.162 a) i b) prikazan je pomak senzora sile $z_1(t)$ i pomaka alata $z_2(t)$. Isti imaju oscilirajući odziv u trajanju od cca 0,05 sekundi.



Sl. 1.162 a) i b) - Pomak senzora sile $z_1(t)$ i pomaka alata $z_2(t)$

Na slici 1.163 a) i b) prikazan je odziv sile $F_s(t)$ izmjerene na senzoru sile i odziv sile na alatu $F_a(t)$ pri čemu je hrapovost površine 0.1mm.

```
ans = 'Dinamički proces sile na snezoru sile Fs'
Fs = 500.0000
```




```
ans = 'Dinamički proces sile na alatu Fa'
Fa = 420
```



Sl. 1.161 a) i b) – Odziv sile na senzoru sile $F_s(t)$ i na alatu $F_a(t)$

Uočava se kako je zbog hrapavosti provršine od 0,1mm sila na alatu F_a smanjena za 60N.

Sustav upravljanja silom dodira

Sustav upravljanja silom dodira sastoji se od dvije regulacijske petelje:

- podređene petlje regulacije brzine vrtnje motora, i
- nadređene petlje regulacije neposredne sile dodira robotske ruke.

Neposredno upravljanje silom dodira podrazumijeva korištenje mjernog signala dobivenog iz senzora sile, a ne podatka o položaju robotske ruke.

Istosmjerni motor i čoper

Kao motor za pokretanje članaka robotskog manipulatora koristit će se istosmjerni motor s permanentnim magnetima, a kao energetski pretvarač koristit će se čoper. U Tablici 1.5.1 i 1.5.2 prikazani su parametri robotskog manipulatora potrebni za proračun i realizaciju simulacijskog modela dva istosmjernoa motora s čoperom koji se nalaze u zglobovima robotskog manupulatora.

Tablica 1.5 – Parametri robotskog manipulatora prema člancima s utjecajem senzora i alata

Parametar	**Članka 1**	**Članak 2**
Dužina članka a $[m]$	1	0,5
Težište članka l $[m]$	0,7	0,25
Masa članaka m $[kg]$	20	15
Ukupni moment inercije J_u $[kgm^2]$	9,023	4,78
Ukupno trenje k_v $[Ns/m]$	152,5	477,5
Ukupni moment gravitacije M_g $[Nm]$	-69,17	-28,2
Konfiguracija zgloba $\theta[°]$	81,57	-159,636
Moment za ostvarenje sile M_F $[Nm]$	125	51,69
Kutna brzina za ostvarenje linearne brzine $\omega_v[\frac{rad}{sek}]$	0,0098	0,0021

Tablica 1.6 – Prametri istosmjernog motora i čopera

Parametar	**Članka 1**	**Članak 2**
Konstanta motora $k[Vs]$	0,93	0,93
Otpor aramture $R[\Omega]$	0,5	0,5
Induktivitet armature $L[mH]$	1	1
Konstanta čopera K_c	1	1
Vremenska konstanta čopera $T_c[ms]$	0,05	0,05

Vrijednost viskoznog trenja se promjenila iz sljedećih razloga:

```
'Utjecaj viskoznog trenja senzora sile'
kvs=1000 %viskozno trenje senzora sile
kv1=B+r1^2*kvs
kv2=r2^2*kvs
```

```
ans = 'Utjecaj viskoznog trenja senzora sile'
kvs = 1000
kv1 = 152.5054
kv2 = 477.5000
```

Na temelju prethodno prikazanih podataka određen je potrebni napon na ulazu u istosmjerne motore polazeći od statističke karakteristike istosmjernog motora. Relacija za izračun napona U_m glasi:

$$U_m = \frac{1}{k} \cdot [R \cdot M_{meh} + \omega_v \cdot (k^2 + k_v \cdot R)]$$

Kako vrijedi:

$$M_{meh} = M_F + M_g$$

jer je smjer sile gravitacije G i sile F isti, mehanički moment M_{meh} bit će manji od momenta M_F. Tada vrijedi:

$$M_{meh_1} = 125 - 69{,}17 = 55{,}83\ Nm$$

$$M_{meh_2} = 51{,}69 - 28{,}2 = 24{,}49\ Nm$$

Odnosno:

$$U_{m_1} = 30{,}82V$$

$$U_{m_2} = 13{,}17V$$

Kako vrijedi da je:

$$\begin{bmatrix} M_{F_1} \\ M_{F_2} \end{bmatrix} = J^T(q) \cdot \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} \text{ gdje je } q = q(\theta_1, \theta_2)$$

Pri čemu za $\phi = 270^\circ$ vrijedi F_x=0 i $F_y = F$ tada se može pisati da je:

$$F = inv[J^T(q)] \cdot \begin{bmatrix} M_{F_1} \\ M_{F_2} \end{bmatrix}$$

Gdje je:

$I = inv[J^T(q)]$ – inverzna matrica transponiranog Jacobijana

Inverzna matrica iznosi:

```
'Zadano'
th1=81.57
th2=-159.636
S12=sin((th1+th2)*pi/180);
C12=cos((th1+th2)*pi/180);
```

```
'Transponirani Jacobian'
JT1=[-pwy pwx];
JT2=[-a2*S12 a2*C12];
JT=[JT1;JT2]
'Inverzna matrica sile F'
I=inv(JT)
```

```
ans = 'Transponirani Jacobian'
JT = 2×2
   -0.5000    0.2500
    0.4892    0.1034

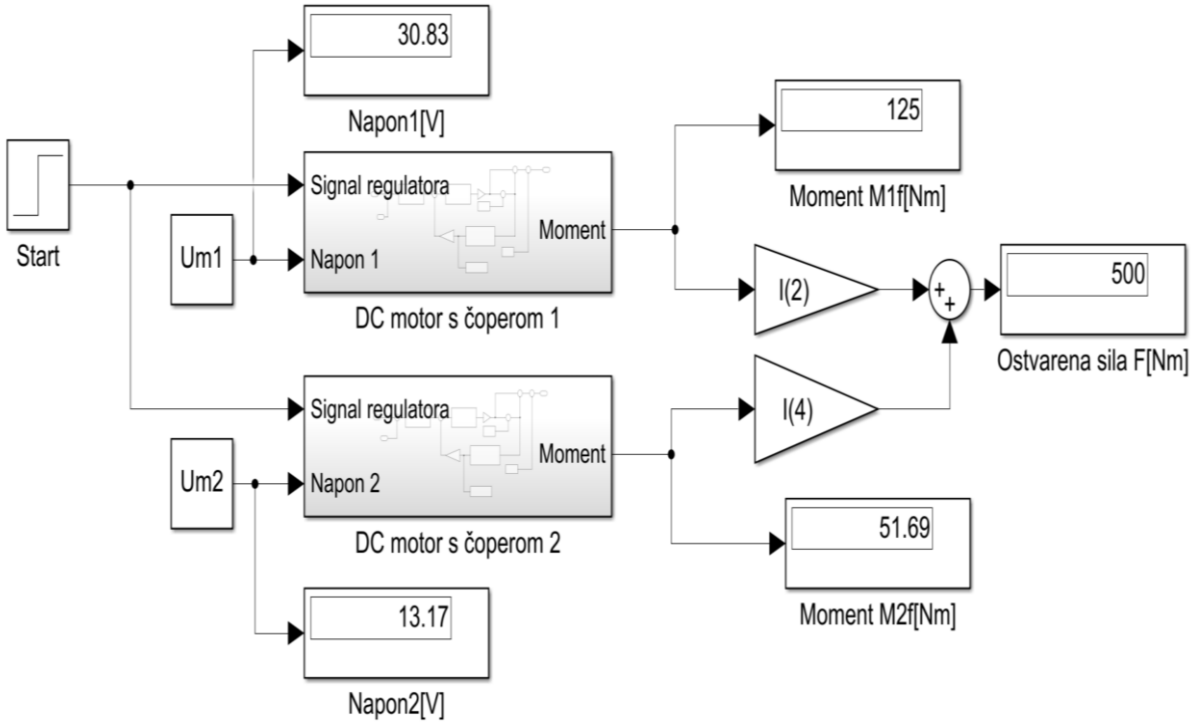
I = 2×2
   -0.5942    1.4368
    2.8115    2.8737
```

Važne su vrijednosti:

$$I(2) = 2.8115$$

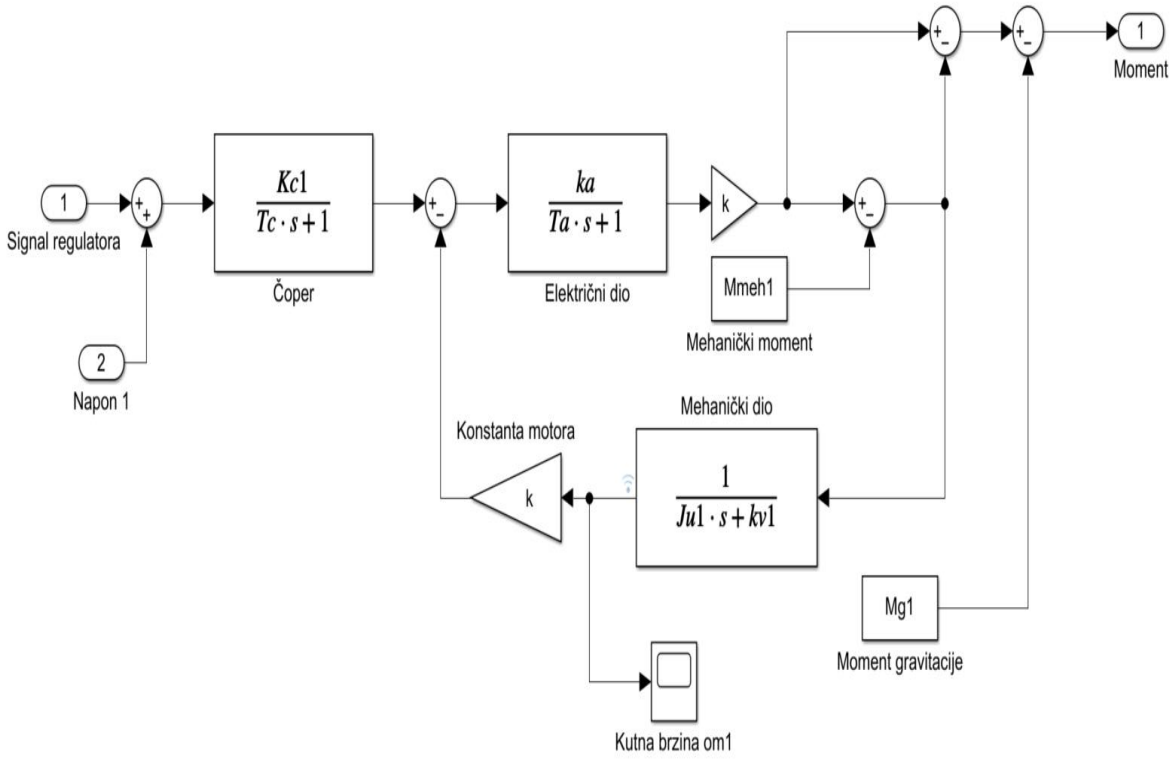
$$I(4) = 2{,}8737$$

Polezeći od prije navedeenog izrađen je simulacijski model u SimuLinku kako je prikazano na slici 1.162.

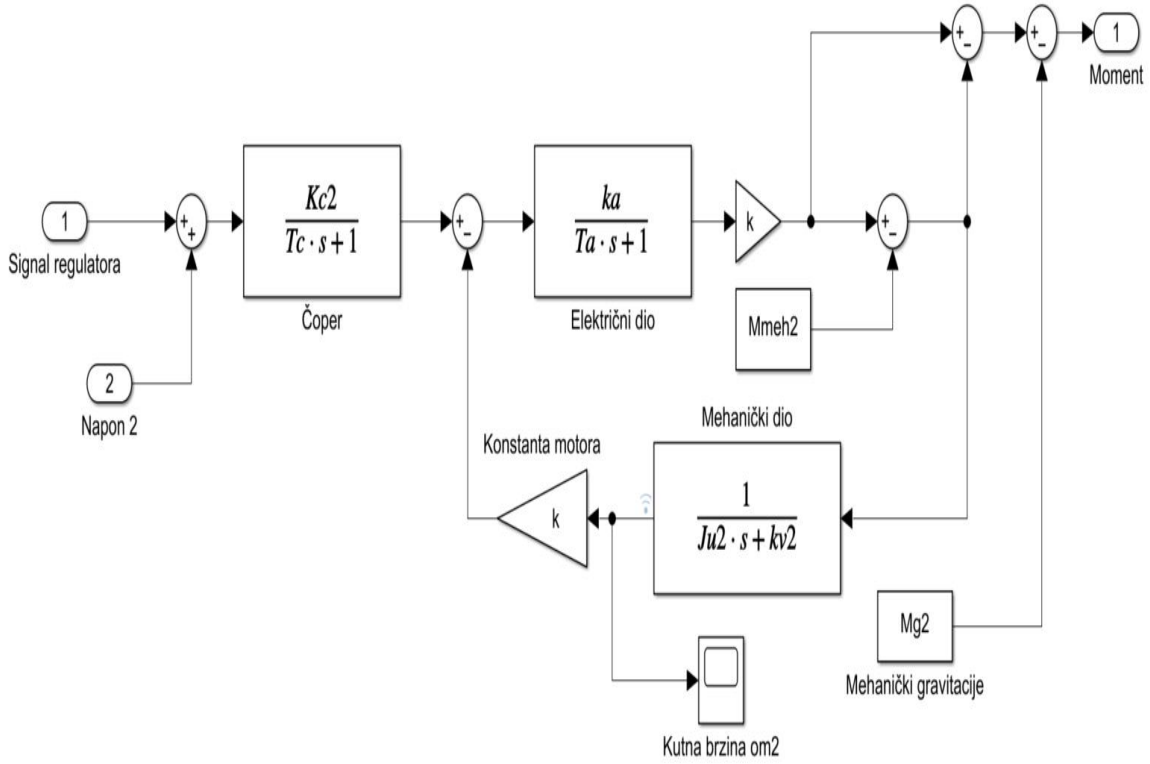


Sl. 1.162 – Simulacijski model pogona robotskog manipulatora

Na sljedeći slikama 1.163 a) i b) prikazani su simulacijski modeli pojedinog istosmjernog motora s čoperom.



Sl. 1.163a) – Simulcijski model istosmjernog motora s čoperom u zglobu 1



Sl. 1.163b) – Simulcijski model istosmjernog motora s čoperom u zglobu 2

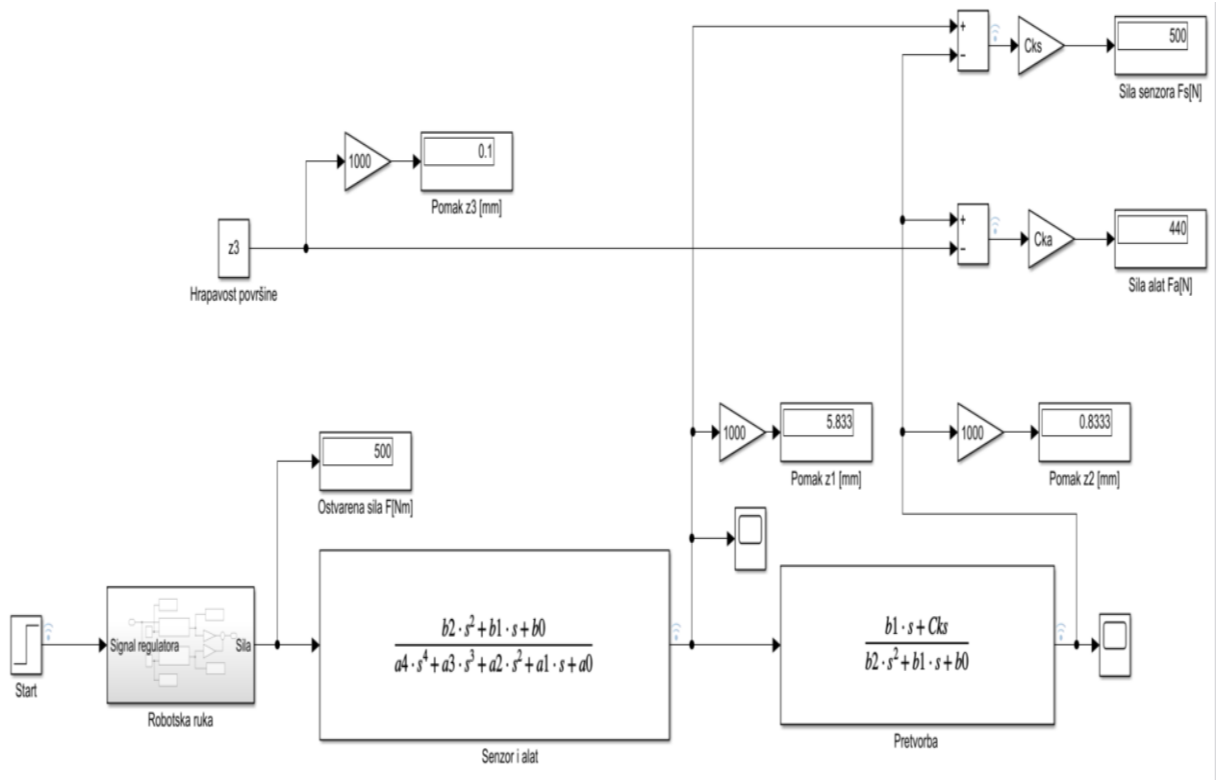
Matlab program prikazan je u nastavku.

```
'Zadano'
M1f=125
M2f=51.69
Mg1=-69.17
Mg2=-28.2
Mmeh1=M1f+Mg1
Mmeh2=M2f+Mg2
'Zadano'
R=0.5
k=0.93
om1v=0.0098
om2v=0.0021
kv1=152.5
kv2=477.5
'Napon motora'
Um1=1/k*(R*Mmeh1+om1v*(k^2+kv1*R))
Um2=1/k*(R*Mmeh2+om2v*(k^2+kv2*R))
'Parametri čopera'
Kc1=1
Kc2=1
Tc=0.05e-3
'Parametri motora'
k=0.93
R=0.5
L=1e-3
ka=1/R
Ta=L/R
'Moment inercije ukupni robota'
Ju1=9.023
Ju2=4.78
'Zadano'
th1=81.57
th2=-159.636
'Inverzna matrica sile F'
S12=sin((th1+th2)*pi/180);
C12=cos((th1+th2)*pi/180);
'Koordinate hvatišta W'
pwx=0.25 %metri
pwy=0.5 %metri
'Dužina članaka'
a1=1 %metri
a2=0.5 %metri

'Transponirani Jacobian'
JT1=[-pwy pwx];
JT2=[-a2*S12 a2*C12];
JT=[JT1;JT2]
I=inv(JT)

"SimuLink"
DCc
```

Na slici 1.164 prikazan je simulacijski model upravljanja silom dodira u otvorenom krugu na kojem „robotska ruka“ predstavljam simulacijski model robotskog manipulatora prethodno datog na slici 1.162.



Sl. 1.164 - Simulacijski model upravljanja u otvorenom krugu

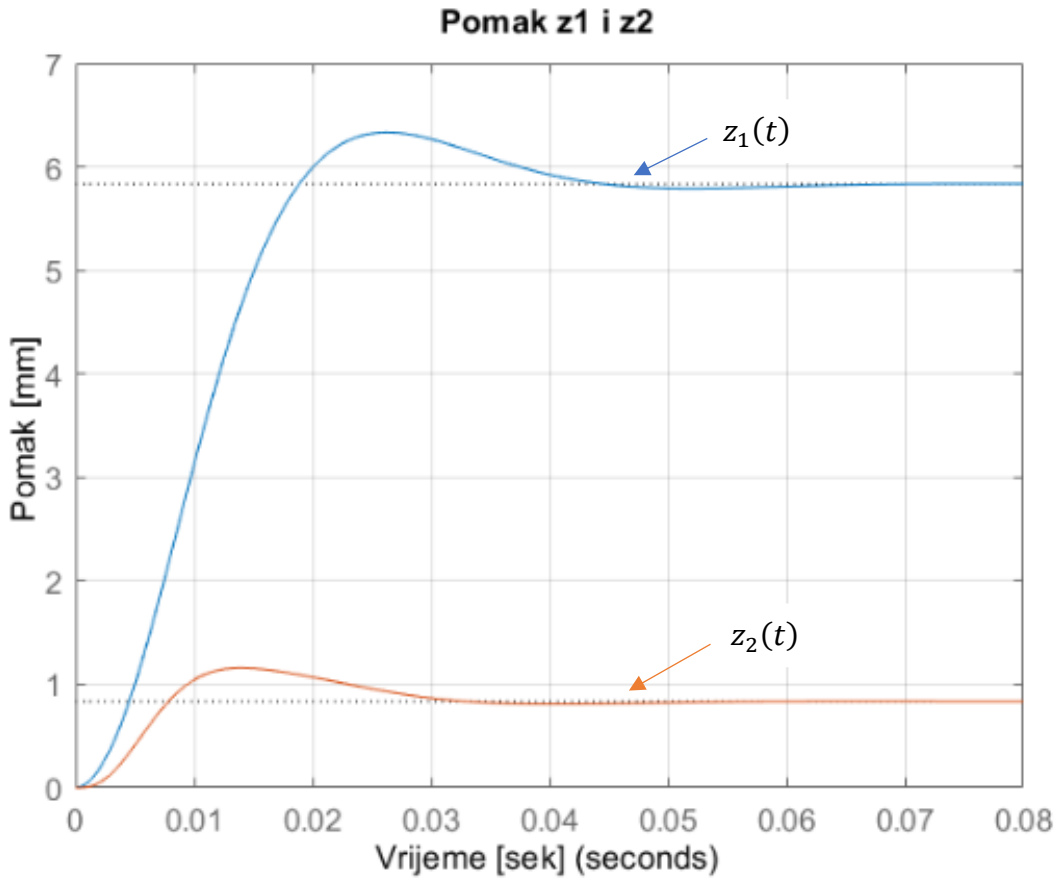
Prametri senzora sile i alata bili su sljedeći:

```
'Prametri senzora sile i alata'
ms=5 %masa senzora
ma=2 %masa alata
kvs=1e3 %koeficijent viskoznosti senzora
Cks=1e5 %koeficijent krutosti senzora sile
Cka=6e5 % koeficijent krutosti alata
F=500 %zahtjevana sila
b2=ma;
b1=kvs;
b0=Cka+Cks;
a0=Cka*Cks;
a1=kvs*Cka;
a2=(Cks*(ms+ma)+Cka*ms);
a3=kvs*(ms+ma);
a4=ms*ma;
'Određivanje prijenosne funkcije Gs';
Gs=1000*F*tf([b2 b1 b0],[a4 a3 a2 a1 a0]);
Gsstac=dcgain(Gs) %vrijednost u stacionarnom stanju [mm]
'Određivanje prijenosne funkcije Ga';
Ga=1000*F*tf([b1 Cks],[a4 a3 a2 a1 a0]);
Gastac=dcgain(Ga) %vrijednost u stacioarnom stanju [mm]
step(Gs,Ga)
grid
```

```
xlabel('Vrijeme [sek]')
ylabel('Pomak [mm]')
title ('Pomak z1 i z2')
```

Na slici 1.165 prikazan je odziv sustava (pomak $z_1(t)$ *i* $z_2(t)$ na pobudnu silu od $F = 500\ N$.

```
ans = 'Prametri senzora sile i alata'
ms = 5
ma = 2
kvs = 1000
Cks = 100000
Cka = 600000
F = 500
Gsstac = 5.8333
Gastac = 0.8333
```



Sl. 1.165 - Odziv sustava (pomak $z_1(t)$ *i* $z_2(t)$ na pobudnu silu od $F = 500\ N$

Robotskoj ruci pridružen je senzor dodira s alatom i određen je pomak z_1 koji iznosi 5,833mm. Jednako tako određen je pomak z_2 koji iznosi 0,8333mm. Razlika dva pomaka $(z_1 - z_2)$ pomnožena s krutošću senzora C_{ks} daje vrijednost sile na senzoru koja je jednaka zadanoj sili

$F = 500N$. Ukoliko je površina hrapava i neka je hrapavost $z_3 = 0{,}1\ mm$ tada se sila na alatu određuje umnoškom razlike pomaka $(z_2 - z_3)$ s krutošću alata C_{ks} što daje vrijednost sile od $F = 440N$.

Automatsko upravljanje

Kako bi se sustav automatski upravljao potrebno je dodati PI regulator odnosno senzor pomaka kao i ulazni filter čije su prijenosne funkcije opisane sljedećim relacijama:

$$G_{PI}(s) = k_p + \frac{k_i}{s}$$

$$G_{se}(s) = \frac{k_{se}}{T_{se} \cdot s + 1}$$

$$G_{se}(s) = \frac{k_f}{T_f \cdot s + 1}$$

Pri ćemu vrijedi: $k_f = k_{se}$ i $T_f = T_{se}$ gdje su:

$k_p\ i\ k_i$ – koeficijenti regulatora

k_{se} – pojačanje senzora

T_{se} – vremenska konstanta senzora [sek]

k_f – pojačanje filtera

T_f – vremenska konstanta filtera [sek]

Jednako tako potrebno je definirati kriterij za izbor parametara PI regulatora. U prezentiranom slučaju primjenit će se *kriteriji robusne regulacije u otvorenom krugu*, a odnosi sa na amplituno i fazno osiguranje. Kriterije glasi:

a) $6dB \leq G_m \leq 20\ dB$ – interval amplitudnog pojačanja

b) $30^\circ \leq P_m \leq 60^\circ$ - interval fazne pričuve

U određivanju parametara PI regulatora primjenjene su odgovarajuće MatLab rutine kako slijedi:

```
'Zadano'
'Parametri motora'
R=0.5 %otpor aramature
L=1e-3 %induktivitet armature
k=0.93 %konstanta motora
Ta=L/R %električna vremenska konstanta
ka=1/R
'Sila'
F=500 %zahtjevana sila
'Moment inercije i trenje'
kv1=154
Ju1=9
```

```
Ju2=4.78
kv2=477.5
Jusr=(Ju1+Ju2)/2
kvsr=(kv1+kv2)/2
'Prametri senzora sile i alata'
ms=5 %masa senzora
ma=2 %masa alata
kvs=1e3 %koeficijent viskoznosti senzora
Cks=1e5 %koeficijent krutosti senzora sile
Cka=6e5 % koeficijent krutosti alata
'Koeficijenti senzora i alat'
b2=ma;
b1=kvs;
b0=Cka+Cks;
a0=Cka*Cks;
a1=kvs*Cka;
a2=(Cks*(ms+ma)+Cka*ms);
a3=kvs*(ms+ma);
a4=ms*ma;
'Određivanje prijenosne funkcije Gs';
Gs=F*tf([b2 b1 b0],[a4 a3 a2 a1 a0]);
'Određivanje parametara PI regulatora'
Um1=30.83 %napon motora [V]
Um2=13.17 %napon motora [V]
'Električni dio motora'
Ge=tf(ka,[Ta 1])
'Mehanički dio motora'
Gm=tf(1,[Jusr kvsr])
'Motor'
Gme1=feedback(k*Ge,k*Gm)
'Čoper'
Kc1=1
Kc2=1
Tc=0.05e-3
Gc=tf(Kc1,[Tc 1])
'Senzor'
kse=0.5
Tse=2.5e-2
Gse=tf(kse,[Tse 1])
'Ulazni filter'
kf=kse
Tf=Tse
'Prijenosna funkcija Otvorenog kruga'
Go=Gc*Gme1*Gs*Gse
'Određivanje parametara regulatora'
C=pidtune(Go,'PI')
[kp,ki]=piddata(C)
Gz=feedback(C*Go,1)
step(F*Gz)
grid
margin(C*Go)
margin(Gz)
grid
```

Rezultat je sljedeći

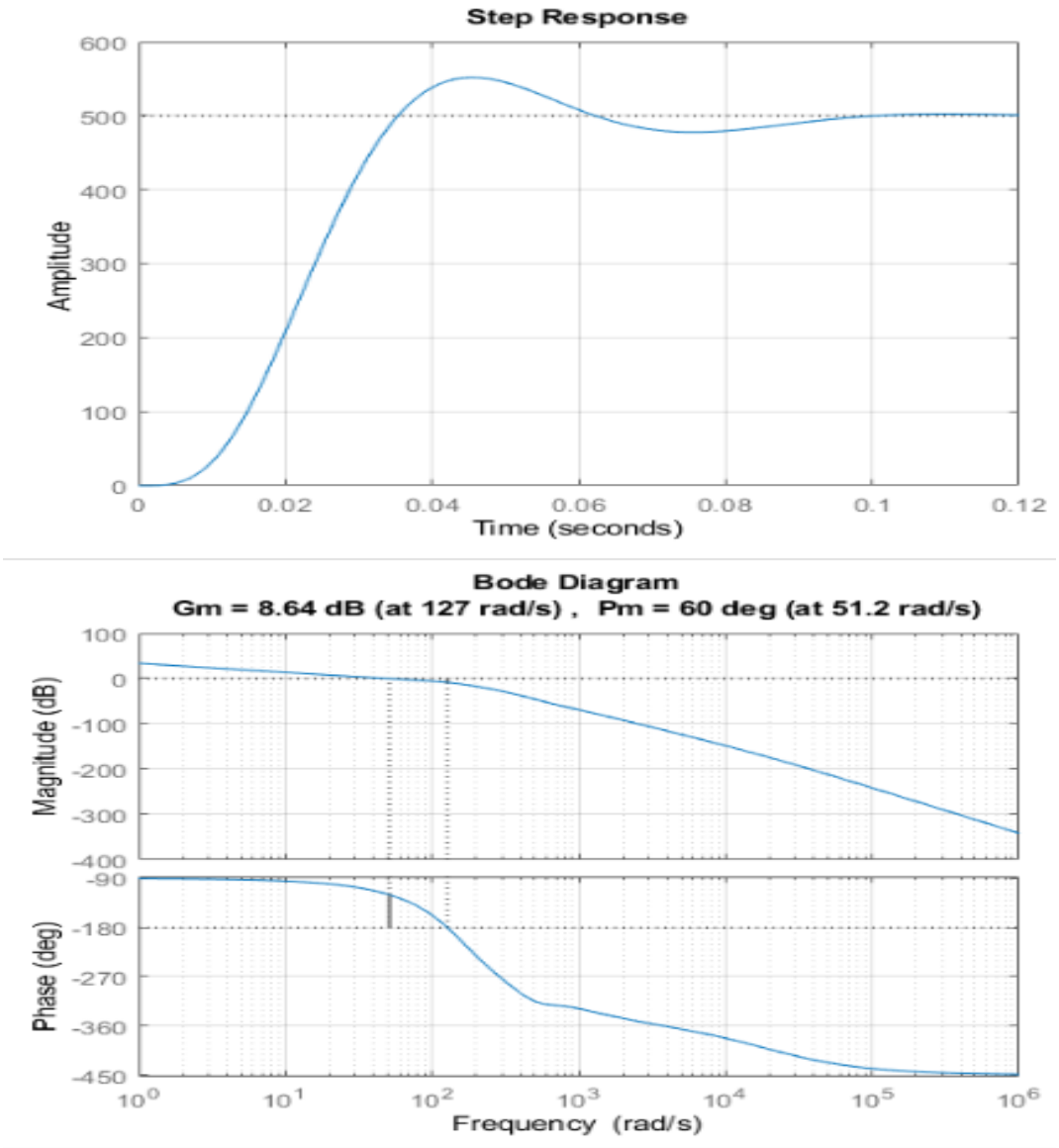
```
ans = 'Određivanje parametara regulatora'
C =

             1
  Kp + Ki * ---
             s

  with Kp = 240, Ki = 8.85e+03

Continuous-time PI controller in parallel form.
kp = 239.7592
ki = 8.8514e+03
```

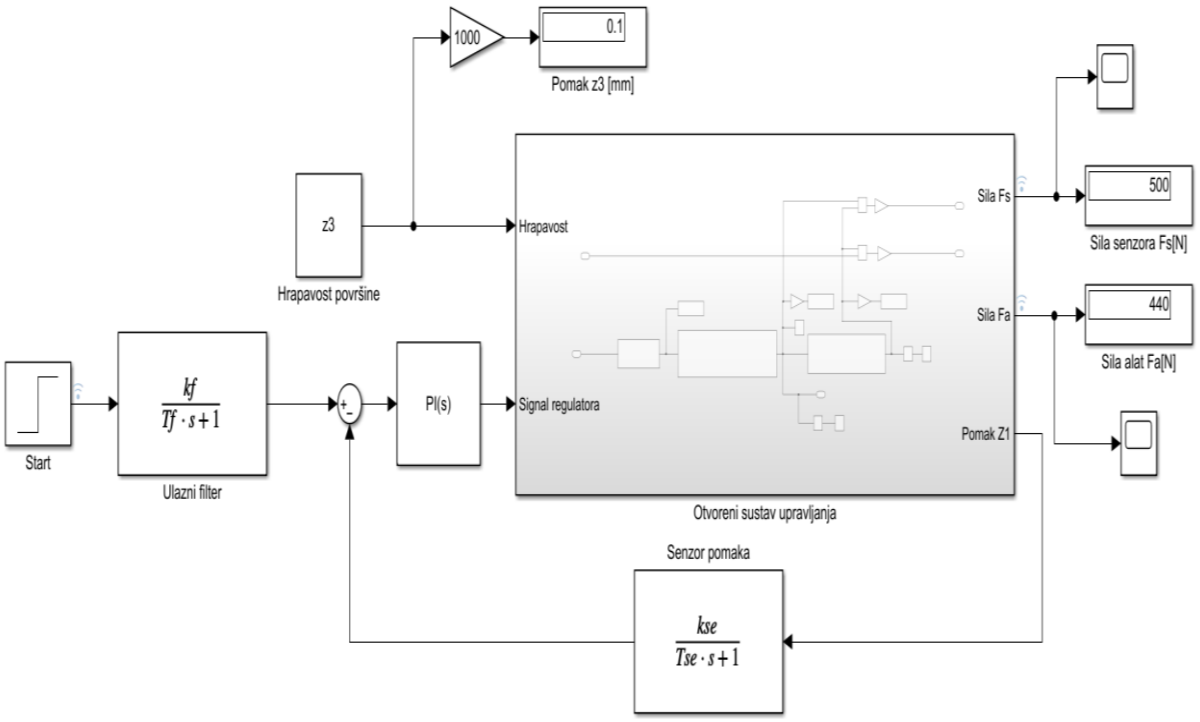
Na slici 1.165 prikazan je odziv sustava i Bodeov dijagram.



Sl. 1.165 – Odziva i Bodeov dijegram

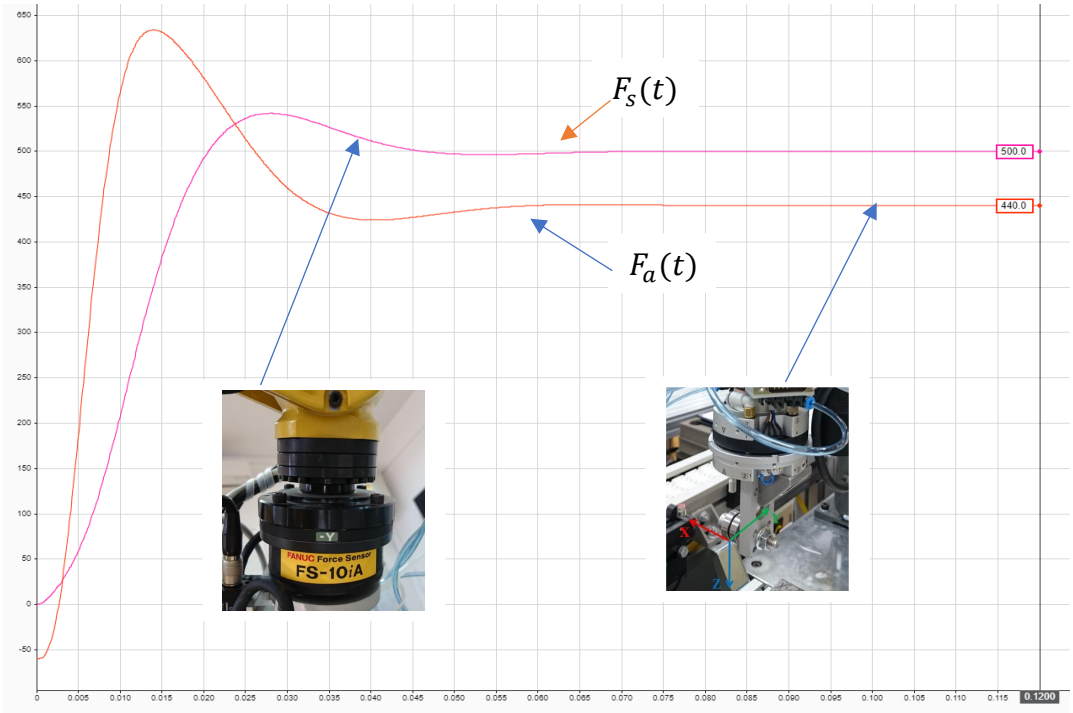
Amplitudne pričuva iznosi $G_m = 8{,}86\ dB$, a fazna pričuva iznosi $P_m = 60^{\circ}$ što znači da zadovoljen kruterij robusne regulacije.

Na slici 1.166 prikazan je sustav automatskog upravljanja robotskog manipulatora silom dodira F na radnu okolinu putem alata izrađenog od čelika u SimuLinku.



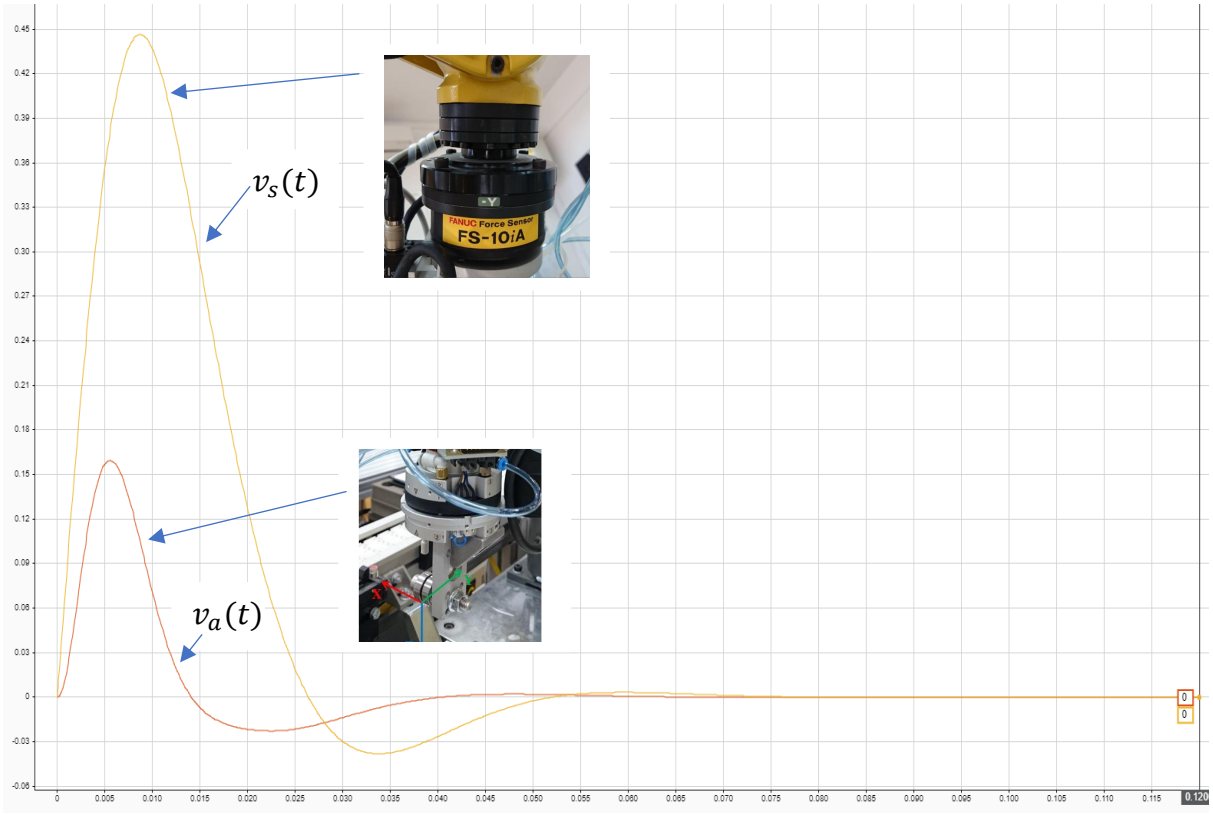
Sl. 1.166 - Sustav automatskog upravljanja robotskog manipulatora silom dodira F na radnu okolinu putem alata izrađenog od čelika

Na slici 1.167 prikazana je odziv sile na senzoru F_s i na alatu F_a.



Sl. 1.167 - Odziv sile na senzoru F_s i na alatu F_a

Na slici 1.168 prikazan je odziv linearne brzine kretanja senzora sile $v_s(t)$ i alata v_a , koja se još naziva *brzina posmaka*, pri čemu se uočava vrijeme trajanja kretanja od 0,08 sekundi.



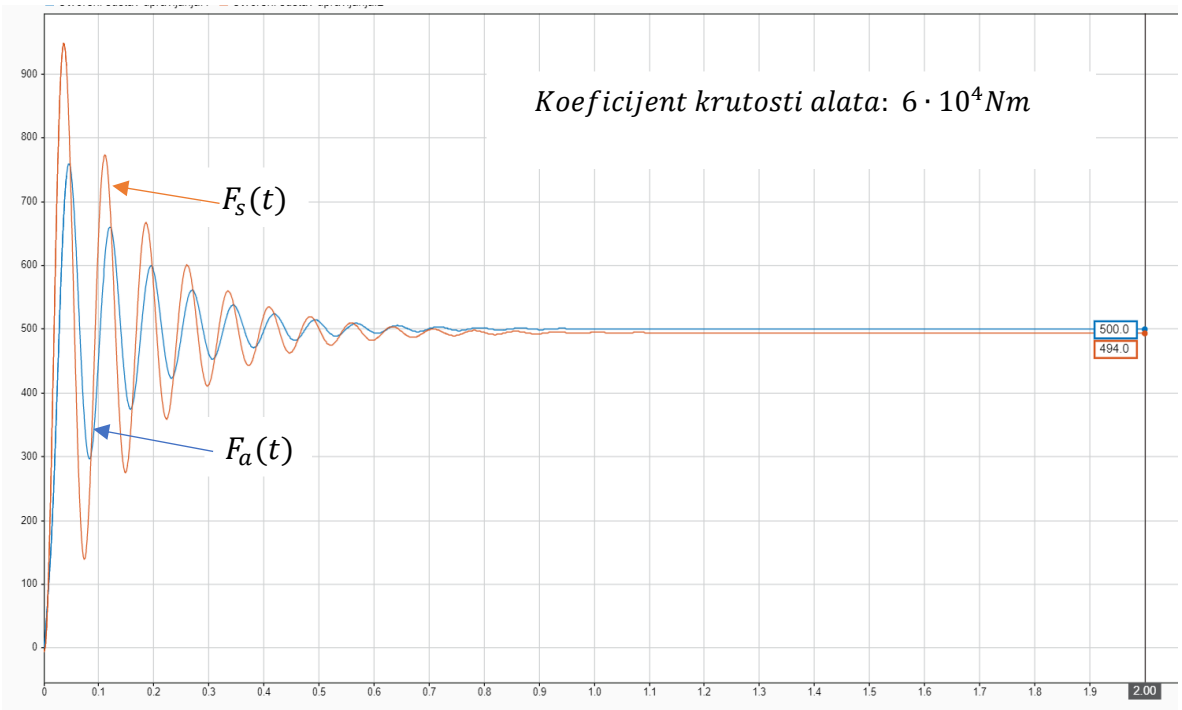
Sl. 1.168 – Odziv linearne brzine kretanja senzora sile v_s i alata v_a

U Tablici 1.7 prikazana su prametri senzora i alata, ostvarene sile i pomaci, kao i hrapavost površine.

Tablica 1.17 – Parametri senzora sile i alata

Parametri	Senzor sile	Alat
Koeficijent krutosti [N/m]	$1 \cdot 10^3$	$6 \cdot 10^5$
Koeficijent viskoznosti [Ns/m]	$1 \cdot 10^5$	-
Ostvarena sila [N]	500	440
Ostvareni pomak [mm]	5,833	0,833
Hrapavost površine [mm]	-	0,1

Kako se može uočiti na prethodnim dijagramima odziv sile je apriodski s nadvišenjem od 44% u slučaju sile na alatu od 440N i nadvišenjem od 8,2% u slučaju sile na senzoru koja iznosi 500N. Zbog hrapavosti površine od 0,1 mm na koju djeluje alat sila je smanjena za 60N, a alat je izrađen od čvrstog materijala (čelik). U slučaju nekog drugom materijala (gume ili aluminija) odziv sustava bio bi oscilatoran, kako je prikazano na slici 1.169.



Sl. 1.169 – Oscilatorni odziva sile na senzoru i alatu

Kako se krutost predmet (guma, metal, drvo i sl.) s kojima raobotski manipulator dolazi u dodir to bi značilo kako bi senzor sile i alat trebalo podešavati prema svakomm predmetu (materijalu) kako bi se moglo osigurati željeno dinamičko ponašanje. U određenim slučajevima, ako se ne kalibrira sustav, moguće je prouzročiti nestabilnost robotskog manipulatora i time uništiti djelove robota (zupčanici, senzor sile, alat i sl.). Navedeno ukazuje kako se standranim regulatorima (PID regulatorima) s konstantim parametrima nemože uspješno riješiti problem promjene krutosti materijala stoga se primjenjuju druge metode za upravljanje silom dodira robotskog manipulatora koje mogu smanjiti osjetljivost upravljačkog sustava na promjenu krutosti alat i obradnih predmeta koji se nalaze u radnoj okolini robota.

Završno je potrebno naglasiti kako senzor sile omogućuje mjerenje vrjednosti stvarno ostvarene sile. No, kako bi senzo rmogao zadovoljavajuće mjeriti potrebno je prethodno podesiti senzor i uskladiti njegiv rad se ostalim djelovima robotskog manipulatora. Kako bi pozicioniranje robota bilo precizno potrebno je prethodno izvršiti kalibriranje (podešavanje i umjeravanje) pozicije s korištenim alatom, ali jednako tako i kompenzaciju utjecaja gravitacije na rad robota. Kako je prethodno prikazanao različiti materijali dovode do oscilacije sile, stoga je potrebno koristiti složenije algoritme automatskog upravljanja.

Popis određenih oznaka i skraćenica

ABB - oznaka švedske tvrtke (https://global.abb/group/en)

AMF - American Machine and Foundry

ARTE – A Robotics Toolbox for Education (https://arvc.umh.es/arte/index_en.html)

IRB – Industrial RoBots (https://new.abb.com/products/robotics/industrial-robots)

CNC – Computer Numerical Control

FER – Fakultete elektrotehnike i računalstva

IFR – International Federation of Robotics

KUKA – Keller und Knappich Augsburg (https://www.kuka.com/en-de)

SCARA – Selective Compliance Assembly Robot Arm

UNIMAT - UNIversal aniMATion

VERSTRAN - VERSatile TRANsfer

Popis određenih varijabli i fizikalnih veličina

a – akceleracija zgloba

a_k – dužina k-tog članka

$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})$ ili $\boldsymbol{M_{inercije}}$– matrica inercije

$\boldsymbol{C}(\dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q})$ – matrica fizikalnih svojstava

d_k – širina (debljina) zgloba

$EMS(t)$ - elektromotorna sila

E_k – kinetička energija

E_p - potencijalna energija

e_s – statička popgreška

$\boldsymbol{F}$ – vektor sile na vrhu alata

f - frekvencija mreže

$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{g})$ ili $\boldsymbol{M_q}$- moment gravitacije

i_d – struja statora u d osi

i_q – struja rotora u q osi

i_a, i_b, i_c –fazne struje statora

i_a, i_b, i_c –fazne struje statora

I – struja motora

I_m – maksimalna struja

I_m – maksimalna struja

$i_{sd,ref}$ – referentna struja statora u d osi

$i_{sq,ref}$ – referntna struja rotora u q osi

i_{sd} – trenutna vrijednost struje u d osi

i_{sq} – trenutna vrijednost struje u q osi

$i_{s\alpha}$ – trenutna vrijednost struje u α osi

$i_{s\beta}$ – trenutna vrijednost struje u βosi

i_{sa} – trenutna vrijednost fazne struje statora

i_{sb} – trenutna vrijednost fazne struje statora

$\boldsymbol{J(q)}$ – Jacobijeva matrica

$\boldsymbol{J_P(q)}$ – Jacobijeva matrica pozicije

$\boldsymbol{J_o(q)}$ – Jacobijeva matrica orijentacije

$\boldsymbol{J_A(q)}$ – Jacobijeva analitička matrica

$\boldsymbol{J_\phi(q)}$ - Jacobijeva matrica orijentacije alata

$\boldsymbol{J^T(q)}$ - Jacobijeva transponirana matrica

J – moment inercije

J_{u_i} – ukupni moment inercije motora s i-tim člankom robota

J_{m_i} – moment inercije i -tog električnog motora

J_{c_i} – međuzglobni moment inercije

k – konstanta motora

k_a - koeficijent pojačanja armaturnog kruga

k_m – pojačanje motora

K_p i K_d – koeficijenti regulatora

k_{poj} – koeficijent pojačnja pojačala

k_v – koeficijent viskoznog trenja

$L_{A.O.} = -G_m$ – amplitudno osiguranje

L_a – induktivitet armature statora ili rotora

L_d – induktivitet statora u d osi

L_q – induktivitet statora u q osi

$\mathrm{L}(\dot{q}, q)$ - Langrangeova funkcija

$\boldsymbol{M}$ – matrica momenta robota

$\boldsymbol{M_{cor}}$ - matrica Coriolisove sile

$\boldsymbol{M_{cp}}$ – matrica centripetalne sile

$\boldsymbol{M_{din}}$ – dinamički moment

$\boldsymbol{M_{sta}}$ – statički moment

$\boldsymbol{M_{trenja}}$ – moment trenja

M_{el} – električni moment

M_{meh} - mehanički moment

M_{ref} – referentni moment motora

R_a – otpor aramature rotora motora

$\boldsymbol{R_1}(\varphi), \boldsymbol{R_2}(\theta), \boldsymbol{R_3}(\psi)$ – matrice osnovne rotacije

$\boldsymbol{Rot}(\varphi, \theta, \psi)$ – složenea rotacija

$\boldsymbol{p}$ ili $\boldsymbol{Poz}$ – vektor pozicije alata

p – broj pari polova

P_u – ukupna snaga

P_g – snaga toplinskih gubitaka

P_{pr} – dinamička snaga prijelaznog procesa

P_i – izlazna snaga

$\boldsymbol{Spir}(\varphi, x)$, $\boldsymbol{Spir}(\psi, z)$ – spiralno gibanje

t_c - vrijeme maksimalnog kutnog ubrzanja

t_f - zadano vrijeme kretanja od početne do konačne točke

T_a – vremenska konstanta armaturnog kruga

T_f – kratka vremenska konstanta

T_m – mehanička vremenska konstanta motora

T_{poj} – vremenska konstanta pojačala

$\boldsymbol{Trans}(x, y, z)$ – translacija

$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{q})$ – matrica složene homogene transfromacije

u_a, u_b, u_c –fazni naponi statora

$U_m(t)$ – napon motora

$U_{sd,ref}$ – referentni napon motora u d osi

$U_{sq,ref}$ – referentni napon motora u q osi

v – translacijska brzina

$\boldsymbol{v}^0$ – vektor početne brzine kretanja hvatišta alata

$\boldsymbol{v}^1$ - vektor završne brzine kretanja hvatišta alata

$\boldsymbol{w}$ ili $\boldsymbol{W}$ – vektor pozicije hvatišta alata

$\boldsymbol{w^0}$ - vektor početne točke kretanja hvatišta alata

$\boldsymbol{w^1}$ - vektor završne točke kretanja hvatišta alata

$\boldsymbol{q}$ – vektor konfiguracije zglobova robota

$\boldsymbol{Q}$ – kvarternion (quaternion) orijentacije alata

x, y, z – osi Kartezijevog koordinatnog sustava

α_k - kut rotacije k-tog zgloba oko osi x

$\varphi_{F.O.} = P_m$ - fazno osiguranje jednako

$\boldsymbol{\phi}$ – matrica orijentacije alata

θ_k – kut rotacije k-tog zgloba oko osi z

Ψ_d – magnetski tog u d osi

Ψ_q – magntski tok u q osi

Ψ_m - ulančani magnetski tok

ϑ – vektor konfiguracije zgloba (indirektna kinematika)

ω – kutna brzina motora

ω_m – trenutrna vrijednost mehaničke kutne brzine motora

ω_r – električna kutna brzina motora

φ, θ, ψ – kutevi rotacije u Kartezijevom koordinatnom sustavu

Literatura

1. ARTE – A Robotics Toolbox for Educationa (https://arvc.umh.es/arte/index_en.html)
2. ABB RobotStudio (https://new.abb.com/products/robotics/robotstudio)
3. Baj T., Mihelj M., Muhin M., „Introduction to Robotics“, SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology, 2013 (ISBN 978-94-007-6101-8)
4. Corke P., „Robotics Toobox for MATLAB“, 2015 (https://petercorke.com/toolboxes/robotics-toolbox/)
5. Ćorluka V., „Modeliranje sinkronog motora s unutarnjim permanentnim magnetima i koncentriranim namotom“, Doktorska disertacija, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Fakultet elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija Osijek, 2018.
6. Kovačić Z., Bogdan S., Krajči V., „Osnove robotike“, Graphis Zagreb, 2000
7. Karabegović I., „Industrial Robots: Design, Applications and Technology“, Nova Science Publishers, Inc. 2020
8. Murray M.R., Li Z., Sastry S.S., „A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation“, CRC Press, 1994
9. Perlberg J., „Industrial Robotics“, Cengage Leaening, 2016
10. Pravica l., „Strukture upravljanja sinkronim motorom s permanentnim magnetima“, FER Zagreb, diplomski rad 2012
11. Rosenbecker L., „Vibration Attenuation for Satellite Reaction Wheels through the use of Field-Oriented Control“, Lund University, 2020
12. Zhang D., Bib Z., „Development of Reconfigurable Parallel Kinematic Machines using Modular Design Approach“, Faculty of Engineering and Applied Science, University of Ontario Institute of Technology Oshawa, Ontario, L1H 7K4, 2006.
13. Velagić J., „Uvod u robotiku“, Laboratorij za robotiku i autonomne sustave, Univerzitet u Sarajevu, 2013
14. Vitez N., „Robotsko praćenje kontura korištenjem senzora sile“, Fakultete strojarstva i brodogradnje Zagreb, Završni rad 2022