



**TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U
ZAGREBU ZAGREB UNIVERSITY
OF APPLIED SCIENCES**

Dario Matika

ELEKTROMOTORNI POGONI

Matematičko modeliranje, simulacija i programiranje automatskog upravljanja istosmjernih i izmjeničnih pogona

Svibanj, 2022. godine

Mojoj dragoj obitelji (Eva, Mario i Nevenka)

PREDGOVOR

Pred vama je izdanje udžbenika „Elektromotorni pogoni – matematičko modeliranje, simulacija i programiranje automatskog upravljanja istosmjernih i izmjeničnih strojeva “ koji je nastao na iskustvima u nastavnom procesu kao i kroz mnoge stručne kontakte s kolegama nastavnicima i asistentima na Tehničkom veleučilištu u Zagrebu. Kroz zajednički dugogodišnji rad ustanovili smo kako postoji prijemna potreba za razumijevanje tehnika matematičkog modeliranja, simulacije i programiranja automatskog upravljanja istosmjernih i izmjeničnih strojeva upotrebom programskih rutina u programskom paketu MATLAB & Simulink – MathWorks (MatLab). Radi se o važnim znanjima i vještinama koja služe za dostizanje ishoda učenja na prediplomskim stručnim studijima Tehničkog veleučilišta u Zagrebu sukladno Hrvatskom klasifikacijskom okviru.

Ovaj udžbenik namjenjen je prije svega studentima studija mehatronike i strojarstva Tehničkog veleučilišta u Zagrebu u cilj usvajanje znanja i vještina samostalnog rada pomoću programa MatLab-a s primjenom različitih modela upravljanja. Udžbenik pokriva odgovarajuće ishode učenja kolegija Elektromotorni pogoni u mehatronici, ali obuhvaća i ishode automatskog upravljanja kroz analizu i sintezu linearnih kontinuiranih sustava upravljanja u vremenskom i frekvencijskom području, primjenu PID regulatora, kaskadnog upravljanja i drugih analitičkih i grafoanalitičkih postupaka upravljanja složenim sustavima kao što su pogoni. U udžbeniku se obrađuju strukture i svojstva upravljanja, stabilnost linearnih kontinuiranih sustava, konvencionalni regulatori i postupci sinteze linearnih kontinuiranih sustava, kao i tehnički i simetrični optimum u kaskadnom upravljanju, te sinteza linearnih kontinuiranih sustava upravljanja u prostoru stanja. Dodatno se u udžbeniku daje i usporedba analize i sinteze linearnih sustava u diskretnom području.

Tijekom izrade ove knjige imao sam mogućnost koristiti se iskustvima mojih kolega profesora, predavača i asistenata na čemu sam im jako zahvalan. Moja je iskrena želja da studenti u ovom udžbeniku pronađu dovoljno korisnih i zanimljivih informacija koje će im pomoći pri studiranju i usavršavanju na Tehničkom veleučilištu u Zagrebu.

AUTOR

O autoru

Dario Matika, redoviti je profesor u trajnom zvanju na Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci, profesor visoke škole na Tehničkom veleučilištu u Zagrebu i vanjski suradnik na Hrvatskom vojnom učilištu „Dr. Franjo Tuđman“ u Zagrebu kao profesor i brigadir Hrvatske vojske u mirovini.

Područje njegovog znanstvenog i stručnog djelovanja je automatizacija postrojenja i procesa, primjena industrijske robotike i fleksibilni proizvodni sustavi. Autor je i koautor više članaka objavljenih u najviše rangiranim časopisima, te je samostalno ili koautorstvo napisao tri udžbenika i jednu znanstvenu monografiju.

U području društvenih znanosti, znanstveno polje sigurnosne i obrambene znanosti, izabran je u znanstveno zvanje znanstvenog savjetnika u trajnom zvanju i profesora visoke škole.

Sadržaj		str.
	UVOD	8
1.	OSNOVNE AUTOMATIZACIJE SUSTAVA	9
1.1	Temeljni pojmovi	9
1.2	Prirodni zakoni i fizikalne veličine	20
1.3	Matematičko modeliranje	22
1.4	Odziv sustava na standardne pobudne funkcije	30
1.5	Matematički model linearizacije	33
1.6	Matematičko modeliranje pomoću parcijalnih diferencijalnih jednadžbi	42
1.7	Amplitudno-fazna frekvencijska karakteristika	46
1.8	Regulacija sustava	61
2.	AUTOMATIZACIJA POGONA	89
2.1	Istosmjerni stroj	93
2.1.1	Statička karakteristika istosmjernog stroja.....	95
2.1.2	Dinamička karakteristika istosmjernog stroja	102
2.2	Učinski (energetski) pretvarači istosmjernog stroja	114
2.2.1	Usmjerivač	114
2.2.2	Čoper	126
2.3	Kočenje istosmjernog stroja	132
2.3.1	Generatorsko (rekuperativno) kočenje	132
2.3.2	Protustrujno kočenje	139
2.3.3	Elektrodinamičko (otporno) kočenje	144
2.3.4	Dinamička karakteristika kočenja	149
2.4	Izmjenični asinhroni (indukcijski) stroj	165
2.4.1	Radna točka asinhronog stroja	186

2.4.2	Varijabilni (promjenljivi) frekvencijski pretvarač (AC/AC)	190
2.4.3	Dinamička karakteristika asinhronog stroja	193
2.4.4	Kočenje asinhronog stroja	196
2.4.5	Proširena statička karakteristika snage	199
2.4.6	Vrijeme zaleta asinhronog stroja i gubici	207
2.4.7	Izbor snage asinhronog stroja	208
2.5	Zagrijavanje i termička zaštita stroja	211
3.	UPRAVLJAČKE KARAKTERISTIKE I AUTOMATSKA REGULACIJA POGONA	217
3.1	Upravljačka karakteristika istosmjernog stroja	217
3.2	Upravljačka karakteristika izmjeničnog (asinhronog) stroja	220
3.3	Automatska regulacija istosmjernog stroja	228
3.3.1	Analogni regulator	242
3.3.2	Digitalni regulator	243
3.3.3	Modeliranje pogona u diskretnom području	253
3.4	Vektorska regulacija asinhronog stroja	255
3.5	Kaskadna regulacija	281
3.6	Regulacija u prostoru stanja	295
3.6.1	Upravljivost i osmotrivost sustava	306
3.6.2	Observer u prostoru stanja i potpuni regulator	307
	Literatura	318
	Popis određenih oznaka i skraćenica	319

UVOD

Udžbenik „Elektromotorni pogoni – matematičko modeliranje, simulacija i programiranje automatskog upravljanja istosmjernih i izmjeničnih strojeva“ podjeljen je u tri djela. U prvom djelu pod naslovom „Osnovne automatizacije sustava“ predstavljaju se osnovni pojmovi automatizacije, definiraju se određeni prirodni zakoni i fizikalne veličine važne za automatizaciju, te se objašnjava matematičko modeliranje, matematički modeli linearizacije i matematičko modeliranje pomoću parcijalnih diferencijalnih jednažbi. Jednako tako obrađuje se odziv sustava na standardne pobudne funkcije, amplitudno-fazna frekvencijska karakteristika i temeljne značajke s matematičkim opisom robusne regulacije sustava automatskog upravljanja. U drugom djelu pod naslovom „Automatizacija pogona“ pozornost je usmjerena na dva tipa stroja: istosmjerni i izmjenični (asinhroni) stroj. Opisuje se automatizirani elektromotorni pogon i njegova regulacija, klasificiraju se elektromotori, predstavljaju se jednažbe električne i mehaničke ravnoteže istosmjernog stroja, zatim statička i dinamička karakteristika istosmjernog stroja, učinski (energetski) pretvarači kao što je usmjerivač i čoper. Posebno se obrađuje kočenje istosmjernog stroja i to generatorsko (rekuperativno) kočenje, prostustrujno kočenje i elektrodinamičko (otporno) kočenje, te se prezentira dinamička karakteristika kočenja. Na isti način obrađuje se i izmjenični (asinhroni) stroj, predstavljaju se osnovne jednažbe ravnoteže i transformacije, kao i statička i dinamička karakteristika trofaznog asinhronog stroja, obrađuje se radna točka asinhronog stroja i varijabilni (promjenljivi) frekvencijski pretvarača. Jednako kao i kod istosmjernog stroja prezentira se dinamička karakteristika asinhronog stroja i karakteristika kočenja asinhronog stroja, te se dodatno obrađuje proširena statička karakteristika snage, vrijeme zaleta stroja i gubici, kao i izbor snage asinhronog stroja. U sklopu navedenoga obrađuje se zagrijavanje i termička zaštita stroja. U trećem dijelu pod naslovom „Upravljačke karakteristike i automatska regulacija pogona“ obrađuje se upravljačka karakteristika istosmjernog stroja i upravljačka karakteristika izmjeničnog (asinhronog) stroja. Povezano se time obrađuje se automatska regulacija strojeva tako što se određuju parametri analognog i digitalnog regulatora, te se modelira regulacija istosmjernog pogona u diskretnom području. Jednako se tako modelira i simulira vektorska regulacija asinhronog stroja u odnosu na brzinu i pomak, te kaskadna regulacija istosmjernog stroja. Na kraju se obrađuje regulacija u prostoru stanja s naglaskom na upravljivost i osmotrivost sustava pomoću varijabli stanja, kao i određivanje regulatoru u povrtanoj vezi na način da se dinamika zatvorenog sustava ostvari bez povećanja reda sustava. U udžbeniku se rješavaju odgovarajući zadaci uz pomoć MatLab rutina i SimuLinka.

1. OSNOVNE AUTOMATIZACIJE SUSTAVA

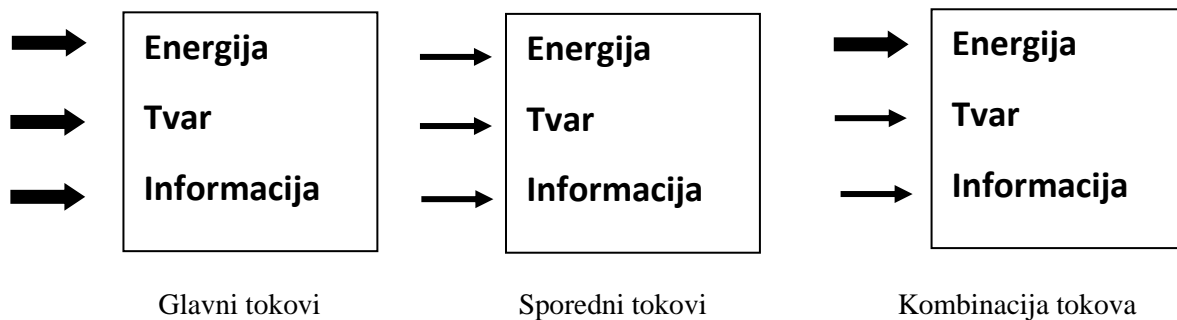
Kako bi se razumio širi kontekst automatizacije potrebno je odmah na početku definirati temeljne pojmove i zadaću automatskog upravljanja. Naime u najširem smislu automatsko upravljanje je postizanje ili ostvarenje željenog upravljanja s nekim objektom upravljanja (sustav, postrojenje, proces, pokretni objekt i sl.) bez prisustnosti i angažmana čovjeka. S druge strane, zadaća *automatičara* je određivanje algoritma upravljanja koji će pružati potrebne informacije izvršnim mehanizmima, a oni će djelovati na objekt upravljanja u ostvarenju željenog upravljanja. Kod sustav automatskog upravljanja postoje dva međusobno povezana djela, to je niskoenergetski dio koji obrađuje informacije važne za ostvarenje željenog upravljanja i visokoenergetski koji generira energiju nužnu za upravljanje. Automatičari su uglavnom usmjereni na niskoenergetski dio sustava, dok je visokoenergetski dio unaprijed zadan. Prema tome, može se najjednostavnije reći kako se sustav automatskog upravljanja sastoji od upravljačkog dijela i objekta upravljanja.

1.1 Temeljni pojmovi

Prvi pojam je svakako *sustav* (eng. *System*) koji ne mora uvijek imati poveznicu s tehničkim rješenjima. U najširem smislu sustav je skup povezanih elemenata koji svojim djelovanjem čine složenu cjelinu. Sustave susrećemo u vrlo raznolikim okolnostima i okruženjima, ali njihovo je zajedničko svojstvo da se njima *upravlja*. Upravljanje sustavima može biti ostvareno od strane čovjeka, ali tada nije automatsko (bez sudjelovanja čovjeka). Stoga kada se govori o *tehničkim sustavima*, što je ovdje slučaj, tada je sustav „*uređeni ustroj koji čini funkcionalnu cjelinu i može imati jedan ili više ulaza te jedan ili više izlaza*“.

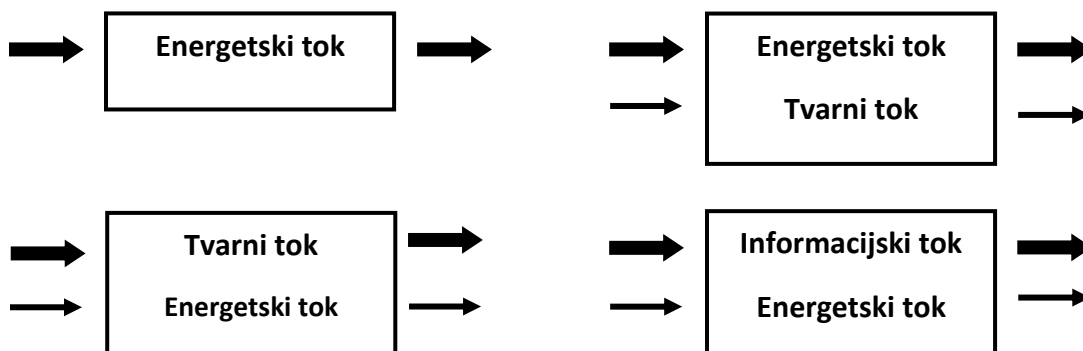
Model sustava s „*jednim izlazom i jednim ulazom*“ naziva se „eng. *Single Input Single Output, SISO*“ ili SISO model, a model sustava s „*više ulaza i više izlaza*“ naziva se „eng. *Multiple Input Multiple Output, MIMO*) ili MIMO model. Bitno svojstvo ovakve definicije tehničkog sustava su ulazi i izlazi putem kojih se ostvaruje interakcija s okolinom odnosno interakcija s nadređenim sustavom. Tehnički sustav koji nema ulaze i izlaze nije moguće ni upravljati i ni promatrati jer tada nema tehničkog načina da se prepoznaju ili uopće vide efekte njegovog djelovanja.

Ulazi i izlazi tehničkog sustava su zapravo točke između kojih se odvijaju tokovi energije, tvari i informacija. Zato je zadatak automatičara voditi računa o ograničenjima, a ta ograničenja mogu biti energetska, tvarna i informacijska, te se očitavaju kao tokovi (eng. *Flow*). Na slici 1.1a) prikazani su glavni, sporedni i kombinacija tokova u tehničkom sustavu.



Sl. 1.1a) – Tokovi u tehničkom sustavu

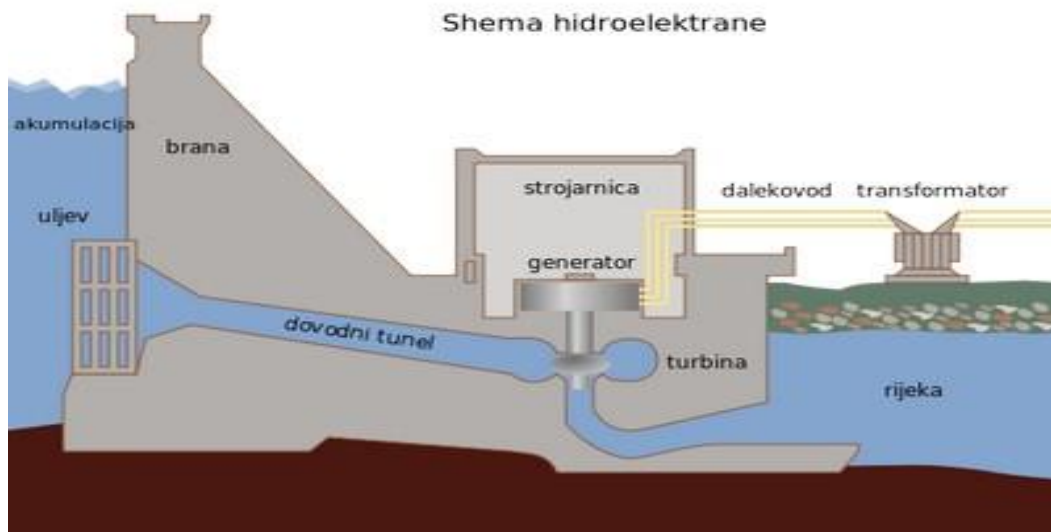
Često jedan o tokova (energetski, tvarni ili informacijski) dominira ovisno o problemu ili rješenju. Tako se npr. u nekom tehničkom sustavu može prepoznati niz glavnih tokova bez sporednih tokova, ili se može prepoznati jedan glavni tok s nizom sporednih tokova. Postoji niz tehničkih sustava u kojim se energetski tok prepoznaje kao glavni tok i koji djeluju bez ostala dva toka (tvarnog i informacijskog). To su npr. mehanički, toplinski i električni procesi. U slučaju kada je glavni tok tvarni tok, tada npr. govorimo o termodinamičkim ili hidrauličnim procesima. Na slici 1.1 b) prikazane su različite kombinacije tokova tehnološkog procesa u nekom postrojenju, od samo energetskog toka do kombinacije energetske kao glavnog i tvarnog kao sporednog toka, i obrnuto, informacijskog kao glavnog toka i energetskog kao sporednog.



Sl. 1.1 b) – Različite kombinacije tokova tehnološkog procesa u postrojenju

Može se ustvrditi da tehnološki procesi s tvarnim tokom ili informacijskim tokom uvijek u sebi imaju integrirani energetski tok kao sporedni tok, prema tome energetski tok skoro je uvijek involviran u neki od tehnoloških procesa u postrojenju. Sagledavajući prezentirano može se reći da se automatizacija postojenja zapravo svodi na automatiziranu regulaciju tokova (engl. *flow*) pojedinog tehničkog sustava, a ti tokovi mogu biti energetske (engl. *energy*), tvarne (eng. *matter*) ili informacijske (engl. *information*) odnosno njihova kombinacija kako je prethodno prikazano. Primjer jednog tehničkog sustava je hidorelektre koja potencijalnu energiju vode

pretvara u električnu energiju i putem dalekovoda dovodi neposredno do potrošača. Energetski tok je zapravo glavni tok takvog tehničkog sustva (shema hidroelektrane prikazana je na slici 1.2).



Sl. 1.2 - Shema hidroelektrane (Izvor: www.osijek031.com/osijek.php?topic_id=40662)

Upravljanje hidroelektranom zapravo se svodi na upravljanje energetskim tokom i njegovom pretvorbom (transformacijom). Potencijalna energija akumulacije kroz uljev u dovodni tunel pretvara se u kinetičku energiju, zatim kroz turbine u mehaničku energiju rotacije, a na kraju putem generatora u električnu energiju koja se putem transformatora dovodi do potrošača u obliku i na način koji je potrošač može iskoristiti. Sustavi upravljanja ovakvim postrojenjima u prošlosti bili su uglavnom mehaničkog karaktera s nizom mjernih uređaja i rotirajućih sklopki kako zorno prikazuje slika 1.3. na kojoj je prikazan upravljački pult hidrocentrale Ozalj iz 1908. godine.



Sl.1.3 - Upravljački pult hidrocentrale Ozalj, izgrađen 1908. godine
(Izvor: www.mdc.hr/tehnicki/hr/03-energija/03-energija-10.htm)

Uvođenjem procesnih računala i digitalne tehnologije u sustave upravljanja značajno se mijenja oblik i princip upravljanja takvim postrojenjima odnosno uvodi se informacijski tok kao osnovni tok za potrebe automatskog upravljanja. Hidrocentrala kao složeno postrojenje upravlja se danas uz pomoć procesnih računala i radi u automatskom modu. Svaki dio postrojenja može se upravljati uz pomoć operatorske stanice, a upravljanje uključuje upravljanje turbinama, generatorima, prekidačima, transformatorima, podsustavima i sl.

Jedna od primjera je i upravljanje tenkovskom platformom, kako je prikazano na slici 1.4.



1.4 Upravljanje tenkovskom platformom¹

Naime, topnici u tenku uvijek su imali problem s balansiranjem cijevi tijekom vožnje preko rovova i općenito neravnog terena, i zato je konstruirana žiroskopska platforma koja kompenzira nastale oscilacije i održava preciznost ciljanja tenkovske cijevi. I u ovom primjeru vidimo kako je zadaća „ciljanja“ potpomognuta automatskim upravljanjem i naprednim računalnim sustavima koji kompenziraju utjecaj kretanja tenka i oscilacija zbog neravnog terena s pozicijom cilja (mete gađanja) čime se postiže brže vrijeme reakcije. Bez dovoljne preciznosti ciljanja, sama snaga projektila postaje zapravo irelevantna.

Proces

Neki od tehničkih sustava mogu biti *procesne naravi* pa ih se može nazvati *tehnički procesni sustavi*. Njihova je glavna značajka ili svojstvo da se u njima odvija pretvorba energije, tvari ili

¹ <https://ironbull.hr/wp-content/uploads/2021/08/WhatsApp-Image-2021-08-20-at-09.02.48-1.jpeg>

informacije na kontrolirani način i kroz zadani slijed događaja. Takav primjer je i hidrocentrala i žiroskopska platforma za upravljanje paljbom tenka. Prema tome „*proces je niz kontroliranih događaja koji točno određenim slijedom pretvaraju ulaze u izlaze*“, a u tehničkom smislu taj se niz događaja može odvijati *trajno, ciklički (kružno) ili u šaržama (isprekidano)*.

- *Trajno odvijanje tehničkog procesa* podrazumijeva da se sve faze procesa zapravo događaju istovremeno, a materija, energija ili informacije koje „teku“ od ulaza do izlaza prolaze transformaciju do svog konačnog oblika. Takve tehničke procese uobičajno nazivamo *kontinuiranim procesima*.
- *Kružno odvijanje tehničkog procesa* podrazumijeva kontinuirani proces s više ulaza i više izlaza kod kojih neki izlaz npr. tvar postaje opet ulaz u taj isti proces i zato se naziva kružnim, a njihovo odvijanje ciličkim. U kružnim procesima najčešće se energija na izlazu koristi kao proizvod tog procesa, dok se tvar kao drugi izlaz iz tog procesa koristi i vraća na ulaz u proces.
- *Odvijanje procesa u šaržama (isprekidano)* podrazumijeva odvijanje procesa na način da se na početku priprema zadana količina tvari (tzv. šarža) i zatim se pokreće proces koji traje do konačne pretvorbe cijele početne količine tvari sa ulaza. Takvi se procesi nazivaju šaržnim procesima (engl. *Batch Process*)

Nepokretna i pokretna tvar međusobno se razlikuje, razlika postoji i između krute tvari, tekućina i plinova odnosno razlika je i u sastavu pojedine tvari. S tim u svezi, ovisno o pojavnim oblicima tvari, postoje i različiti oblici energije i načini prijenosa i/ili transformacije te energije. Postoji mehanička, toplinska, električna, kemijska ili nuklearna energija, dok u nekim procesima uglavnom nalazimo mehaničku, toplinsku i električnu energiju, a povremeno kemijsku i energiju izgaranja. Mnogi tehnološki procesi zapravo predstavljaju međusobnu povezanost protoka energije, tvari i informacija.

Postrojenje

Općenito se pod postrojenjem (eng. *plant, installation or facility*) podrazumijeva niz ili kombinacija strojeva, uređaja, sklopova i senzora međusobno povezanih u cilju ispunjenja određene funkcije. Postrojenja se javljaju u različitim oblicima i zasigurno je jedno od najslabijih postrojenja – nuklearno postrojenje. U osnovi se postrojenja mogu kategorizirati na energetska (termoenergetska), procesna, tremotehnička i telekomunikacijska postrojenja. Postoje i drugačije podjele i kategorizacije postrojenja.

- *Energetska postrojenja* pretvaraju energiju (eng. *energy*) zatečenu u prirodi u pogodniji oblik za transport od izvora do mjesta potrošnje kao npr. električnu energiju.

Energetskim postrojenjima pripadaju hidroelektrane, termoelektrane, termotoplane, industrijske energane, vjetroelektrane i sl. U tu kategoriju mogu se ubrojiti i kogeneracijska postrojenja (engl. *Combined Heat and Power*, CHP) koja u jedinstvenom termoenergetskom procesu proizvode električnu i toplinsku energiju. U slučaju trigeneracije dio energije koristi se za hlađenje.

- *Procesna postrojenja* prerađuju različite tvari (eng. *matter*) u oblik veće uporabne vrijednosti, stoga takvim postrojenjima pripadaju industrijska postrojenja, kemijska postrojenja, postrojenja za preradu nafte, postrojenja za proizvodnju hrane, i sl. Neka su procesna postrojenja izuzetno opasna za ljude i okoliš ukoliko se njihov tehnološki proces konstantno ne nadzire.
- *Termotehnička postrojenja* održavaju u određenim prostorima odgovarajuće mikroklimatske uvjete stoga toj kategoriji postrojenja pripadaju ona za grijanje, hlađenje i klimatizaciju.
- *Telekomunikacijska postrojenja* su ona postrojenja koja prenose i šire informacije putem telekomunikacijskih mreža i odašiljača. U tu se kategoriju mogu ubrojiti teleoperatori stacionarnih i mobilnih usluga, televizijska i radio industrija, i sl.

Jedna od najvažnijih zajedničkih značajki postrojenja je njegov kontinuirani rad u zadanom vremenskom intervalu uporabe, zato se funkcioniranje postrojenja temelji na kontinuiranim procesima pretvorbe energije, tvari i informacije u oblik namjenjenom za široku potrošnju. Kako se radi o kontinuiranim procesima pretvorbe energije, ali jednako tako i opasnih tvari (npr. kemijska postrojenja), rad postrojenja ne bi smio ugrožavati sigurnost, zdravlje i živote ljudi, okolinu i same podsustave i opremu od koje je sastavljeno. Dakle, postrojenje mora funkcionirati pouzdano, dok utjecaj njegovog funkcioniranja na okoliš nesmije biti izvan dozvoljenih granica. U većini slučajeva karakter postrojenja je proizvodni, a postrojenja djeluju u gospodarskom okruženju koje je izloženo tržišnim pravilima. To znači da krajnji proizvod postrojenja mora biti kvalitetan i mora pratiti potrebe tržišta, mora biti konkurentan i ukupni troškovi proizvodnje trebali bi biti proporcionalni ostvarenoj prodajnoj cijeni proizvoda na tržištu. Stoga je ispravno postaviti pitanje što je npr. *krajnji proizvod energetskog ili termotehničkog postrojenja?*

U prvom slučaju to je energija namijenjena potrošačima, a kvaliteta te isporučene energije ovisi o parametrima uporabljivosti na mjestu potrošnje. Npr. kada se radi o izmjeničnoj električnoj energiji ti parametri jesu: napon i frekvencija, a kada je riječ o toplinskoj energiji to su temperatura, tlak i protok. Kada je riječ npr. o termotehničkim postrojenjima kvalitetu određuju

parametri kao što je temperatura, vlažnost zraka, razina buke i sl. Kako bi se ostvarila kvaliteta izlaznog proizvoda, u postrojenjima se u osnovi istodobno odvija niz tehnoloških procesa čiji je krajnji cilj finalizacija proizvoda uz poštivanje proizvodne djelotvornosti i ekonomskog učinka, te uz dopušteno djelovanje na okolinu.

Osim postrojenja, mogu se automatizirati strojevi i sprave kojima se obavljaju određene radnje. Neki primjeri postrojenja, strojeva i sprava koji se mogu automatizirati, pa kao takvi predstavljaju objekt upravljanja, jesu: postrojenja za proizvodnju i distribuciju električne energije, postrojenja za opskrbu plinom, skladišna postrojenja, postrojenja kemijske industrije, postrojenja za klimatizaciju, laboratorijska postrojenja i sl., sustavi za grijanje, elektromotorni pogoni, elektroagregati, kompresorske stanice, automobili, željeznički i brodski promet, trafostanice, robotski uređaji, alatni strojevi, aparati, alarmni uređaji, i sl. Prema tome, da bi funkcioniranje postrojenja, stroja, sprave ili uređaja u svim pogonskim uvjetima bilo sigurno, pouzdano, djelotvorno, ekonomično i ekonomski prihvatljivo tehnološki procesi moraju biti - uz pomoć odgovarajućih uređaja i opreme - regulirani, upravljani, nadzirani i zaštićeni od havarije.

Regulacija i upravljanje

Zadaća regulacije je održavanje određenih fizikalnih veličina tehnološkog procesa na zadanoj razini bez obzira na promjenu inteziteta tehnološkog procesa i usprkos promjeni utjecaja okoline na taj proces. Automatska regulacija tehnološkog procesa predstavlja takvu regulaciju u kojoj se operator zamjenjuje tehničkim rješenjima i sredstvima kojima se ona ostvaruje, a u suprotnome ona se naziva ručna regulacija. Informacije o vrijednostima reguliranih veličina dobivaju se putem mjerne opreme i senzora (osjetila), a prosudbu putem koje se donosi odluka o izjednačavanju reguliranih veličina s njihovim zadanim veličinama prepušta se regulatoru (eng. *Controller*). Oni mogu biti izrađeni na razini relejne logike, kao mehanički, pneumatski, hidraulični ili električni regulatori, odnosno u obliku procesnih računala razne razine složenosti (jednočipno, jednokartično, mikroracunalo i sl.)

Zadaća upravljanja povezana je s funkcioniranjem pogona tijekom cijelog radnog vijeka. Tehnološki procesi se povremeno prekidaju da bi se nakon određenog vremena ponovno pokrenuli. Takvo cikličko pokretanje i zaustavljanje tehnoloških procesa sastoji se od manjeg ili većeg broja radnji (npr. otvaranje ili zatvaranje ventila, uključivanje ili isključivanje aktuatora, i sl.), stoga kako bi se u postrojenju uspostavio ručno ili automatski regulirani tehnološki proces potrebno je operativne radnje provoditi određenim redoslijedom (ili

međusobno paralelno) tako da se dostigne zahtjevani stupanj djelotvornosti. Zbir tih postupaka kojima se provodi promjena pogonskog stanja postrojenja odnosno prekidanje i ponovno uspostavljanja nekog tehnološkog procesa, naziva se *upravljanje*, a suvremena oprema i/ili uređaji kojima se to automatski provodi su danas *PLC-ovi* (eng. *Programmable Logic Controller*, PLC) i mikro-računala odnosno ugrađena računala (eng. *embedded computers*). Za tu namjenu, kao i namjenu regulacije, koriste se i integrirana operacijska pojačala, preklopni sklopovi i digitalni logički sklopovi, a za složenije tehničke sustave jedno ili više procesnih računala.

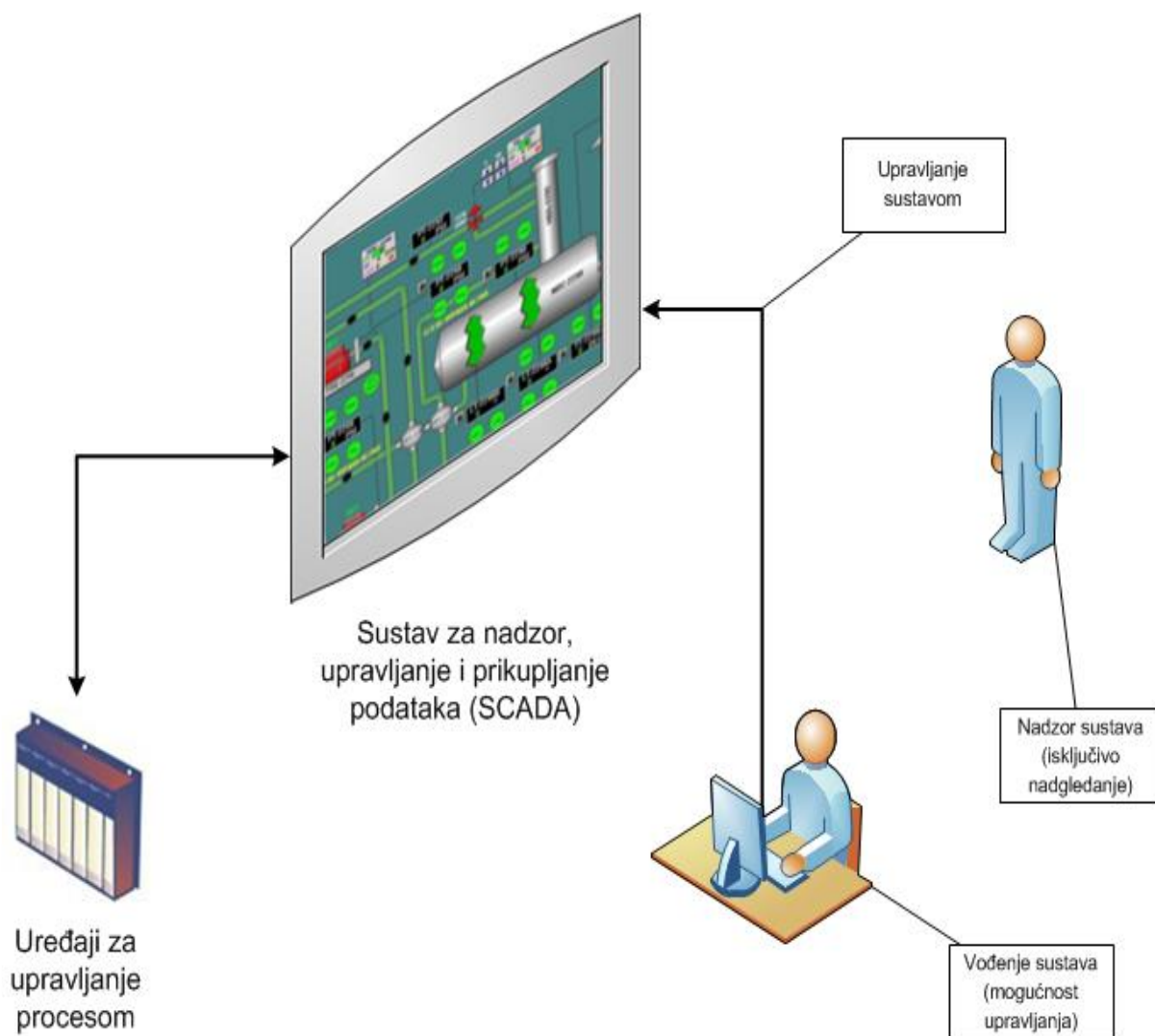
Nadzor i vođenje

Zadaca nadzora povezana je se mogućnošću uvida u funkcioniranje i rad postrojenja bez obzira na stupanj automatizacije regulacije i upravljanja. Operatoru i pogonskom osoblju potrebne su informacije o stanju tehnoloških procesa, stanju podsustava i opreme, stanju izlaznog proizvoda, kao i druge informacije kako bi imali mogućnost djelovanja u slučaju poremećaja i nepridivivih kvarova na uređajima, opremi ili sredstvima. Jednom riječju potrebno je prikupiti takve informacije s uređaja za signalizaciju koje upozoravaju operatera na pojavu neuobičajenog ili nenormalnog stanja i ukazuju na mjesto i prirodu smetnje ili kvara. U situacijama koje zahtjevaju brzu i preciznu reakciju na nenormalno stanje ili kvar postrojenja, prisutan je veliki rizik od pogrešnog postupanja operatora. Stoga se nadzoru pridružuje i zaštita od nastanka i posljedica štetnog događaja. Ona može biti pasivna, a to znači da postoje nezavisni integrirani tehnički uređaji koji sprječavaju operatora u provođenju postupka kojim može ugroziti sigurnost postrojenja, ili aktivna tako da se posebnim mjernim uređajim i sensorima kontinuirano nadziru kritične veličine tehnološkog procesa sa stanovišta sigurnosti, te čijim se prekoračenjem automatski uključuje zaštita u smislu sprječavanje štetnih posljedica.

Suvremna regulacija, upravljanje, nadzor i zaštita postrojenja zahatjevala je uvođenje jedne *nove tehnologije* koja omogućuje prikupljanje i pohranu podataka iz jednog ili više udaljenih postrojenja, te slanje upravljačkih naredbi u ta postrojenja. Zbirni naziv za takvu tehnologiju je SCADA (eng. *Supervisory Control And Data Acquisition*, SCADA). Za razliku od sinoptičkih ploča, koje su bile jednostavne bez računala i programa, i gdje su se izravno spajali senzori s panel indikatorima, što je zahtjevalo niz električnih žica i kablova za povezivanje senzora i aktuatora (izvršnih uređaja), SCADA omogućava jednostavno dodavanje senzora i aktuatora, mogućnost rekonfiguracije sustava i spremanja velike količine podataka, kao i povezivanja senzora s udaljenih lokacija. Najvažnija je činjenica da se prikupljeni podaci mogu prikazati na

sučelju (ekranu) po želji korisnika, a moguća je simulacija sustava korištenjem stvarnih podataka. No, potrebno je naglasiti da upravljački sustav postaje složeniji od sinoptičkih ploča i zahtjeva različita dodatna znanja operatora kao što je programiranje, analize, i sl.

U realnim situacijama i u najvećem broju slučajeva automatiziraju se kombinirani tokovi tj. tehnološki procesi koji se ostvaruju pretvorabama i prijenosom energije i tvari, a ključnu ulogu u tim procesima u realizaciji funkcije regulacije, upravljanja, nadzora i zaštite nose informacije i njihova pretvorba tj. informacijski tok. Određeni broj informacija dobija se mjerenjem, druge su pohranjene u pojedinim uređajima (npr. granične vrijednosti uporabe uređaja, i sl.), dok treće unosi operator tijekom rada sa postrojenjem putem odgovarajućeg HMI sučelja (eng. *Human Machine Interface, HMI*). Na slici 1.5 prikazan je primjer ekrana sustava za nadzor, upravljanje i prikupljanje podataka (SCADA) s pripadajućim funkcija upravljanja, nadzora i vođenja.



Sl. 1.5 – SCADA sustav [Izvor: E. Prpić, skripta]

U nastavku će se kratko opisati prije korišteni pojmovi iz prethodno citirane literature[E. Prpić, skripta].

Pojmovi

<p>Upravljanje</p>	<p>Upravljanje je aktivnost izravnog utjecaja na elemente sustava ili procesa u svrhu postizanja točno željenih osobina izlaza,</p> <ul style="list-style-type: none"> ✓ svako upravljanje nije automatsko ✓ upravljanje može biti u potpunosti izvedeno ručnim akcijama operatera na bazi njegovog vlastitog opažanja okolnosti u sustavu (ili procesu) i okolišu, ✓ upravljanje može biti dijelom ručno, a dijelom automatsko, ili može biti potpuno automatsko ✓ upravljanje koje nije potpuno automatsko ponekad se (ovisno o razini složenosti) naziva i rukovanje.
<p>Automatsko upravljanje</p>	<p>Automatsko upravljanje je izravno utjecanje jednih elemenata na druge elemente sustava ili procesa u svrhu postizanja izlaza točno željenih osobina, na temelju unaprijed zadanih pravila, bez izravnog i neprekidnog utjecaja čovjeka.</p> <ul style="list-style-type: none"> ✓ automatsko upravljanje specifično upravljanje tehničkim sustavom ili procesom koje se odvija bez neprekidnog nadzora i djelovanja čovjeka ✓ svakim automatiziranim procesom ili sustavom na kraju na neki način upravlja čovjek, ali kod automatski upravljanih sustava i procesa ta se ljudska interakcija svodi na nadzor i vođenje
<p>Automatska regulacija</p>	<p>Automatsko upravljanje i automatska regulacija mogu biti istoznačnice</p> <ul style="list-style-type: none"> ✓ "regulacija" podrazumijeva naprednije automatsko upravljanje koje se temelji na preciznom mjerenju fizikalnih veličina i preciznom djelovanju na analogne izvršne elemente.
<p>Nadzor</p>	<p>Nadzor je funkcija koja prikuplja mjerenja i statuse sustava ili procesa te ih na prikladan način prikazuje korisniku i alarmira u slučaju prekoračenja dozvoljenih vrijednosti.</p> <ul style="list-style-type: none"> ✓ kod automatski upravljanih sustava i procesa postoji određena interakcija s korisnikom, odnosno s operaterom. Kad se radi o jednostavnijim primjenama, kao što su dizalo, klima-uređaj ili tempomat u automobilu, ta je interakcija sasvim jednostavna, no kod složenijih automatiziranih sustava i procesa operateri su osobe s posebnom obukom i poznavanjem tehnologije. Sučelja koja su im na raspolaganju mogu se podijeliti na ona koja služe nadzoru i ona koja služe vođenju.

	<ul style="list-style-type: none"> ✓ funkcija nadzora ima za svrhu samo u pogledu uvida u stanje sustava odnosno njegovih mjerljivih veličina, a ne omogućava djelovanje nad tim sustavom ili procesom u svrhu njegova upravljanja. ✓ funkcija nadzora ne omogućava djelovanje nad automatiziranim sustavom ili procesom, nego samo uvid u njegovo stanje ✓ funkcija nadzora nad automatiziranim sustavom ili procesom izvodi se zasebnim (posebnim) sustavom. Takav sustav stavljen u okvir cjelovitog automatiziranog sustav ili procesa, poprima svrhu nadzora cjelokupnog tehničkog sustav ili nekog njegovog dijela.
Vodenje	<p>Vodenje podrazumijeva takvu interakciju operatera s automatiziranim sustavom koja operateru omogućava djelovanje na sustav i mijenjanje njegova stanja.</p> <ul style="list-style-type: none"> ✓ kod jednostavnijih primjera automatiziranih sustava ili procesa, djelovanje korisnika se može svesti na puko postavljanje željenih vrijednosti (temperature, tlaka, brzine, smjera kretanja, i sl.), što je tada primjerenije zvati korištenjem ili rukovanjem. ✓ kad se radi o složenijim sustavima, i samo vodenje može biti vrlo složeno i omogućavati operateru izravan upliv na svaku pojedinu upravljaju veličinu automatiziranog sustava ili procesa. Funkcija vođenja u takvim primjerima uvijek podrazumijeva i funkciju nadzora te se uvijek izvodi kao poseban podsustav vođenja, koji predstavlja integralni dio cijelog sustava ili procesa čijem vođenju služi. ✓ kad se radi o visokoj razni složenosti vođenja, tada se zapravo radi o velikom broju podsustava, odnosno podprocesa, od kojih je svaki za sebe automatski upravljani te svi zajedno predstavljaju zaokruženi tehnološki proces pri čemu sustav vođenja služi operaterima za upravljanje svime podsustavima s visoke razine (nadzora i vođenja).

Za razliku od *tehnološkog procesa* kojeg karakterizira proizvodnja, pretvorba i/ili prijenos energije, tvari ili informacija, *tehnički sustav* označava cjelinu sastavljeno od elemenata (djelova, komponenti) između kojih postoji uzajamno djelovanje, i određen je rasporedom tih elemenata i njihovom međusobnom utjecaju. Suštinsko je svojstvo tehničkog sustava da njegova svojstva kao cjeline ne ovise samo o svojstvima svih njegovih elemenata, već i o njihovim interakcijama. Potpuno isti elementi tehničkog sustava, ali s različitim interakcijama između njih mogu tvoriti potpuno novi sustav. Ako se postrojenje promatra kao tehnički sustav u kojem se odvijaju tehnološki procesi, onda na interakciju elemenata tehničkog sustava izravno djeluju prirodni zakoni i fizikalne veličine, o čemu će biti više riječi u točki 1.8.

1.2 Prirodni zakoni i fizikalne veličine

Matematičko modeliranje i simulacija rada tržničkog sustava opisuju se prirodnim zakonima i fizikalnim veličinama. Prirodni zakoni su pravila (ili skup pravila) koja proizlaze iz prirode, i kao takva ta su pravila univerzalna. Fizika se temelji na prirodnim zakonima, a bavi se tvarima, gibanjem, energijom i među djelovanjem. Fizikalni zakoni izražavaju se u matematičkom obliku, a fizikalne veličine imaju svoje mjerne jedinice.

U matematičkom modeliranju tehničkih sustava koristi se klasična fizika odnosno klasična mehanika. Klasična fizika razvijena je još u 16. i 17. stoljeću otkrivanjem zakona mehanike, dok se klasična fizika temelji na Newtonovim zakonima mehanike (zakoni gibanja i gravitacije) i Maxwellovim zakonima elektromagnetizma. U pogledu klasične mehanike i tehničkih sustava najvažnija su discipline kinematika i dinamika, od kojih prva definira oblike gibanja dok druga definira djelovanje sile za tijela koja se gibaju. U pogledu elektromagnetizma to je povezanost električnih i magnetskih pojava koje rezultiraju elektromagnetskim (električnim) momentom M_{el} . Za ispravno razumjevanje matematičkog modeliranja i simulacije rada automatiziranih pogona kao tehničkih sustava potrebno je prvo definirati pojam rada (engl. Work) kao fizikalne veličine. Rad W je djelovanje sile na putu odnosno momenta na kutu. Znači rad stroja W je proizvod sile F (engl. Force) na pomaku s (engl. Shift) ili momenta M na kutnom pomaku φ . Prema tome vrijedi relacija:

$$W = F \cdot s = F \cdot r \cdot \varphi = M \cdot \varphi$$

gdje je : r – radijus

Jedinica rada je Joul [$J=Nm$] i dobila je ime po engleskom fizičaru Jamesu Prescottu Jouleu. Tijelo obavljanjem rada oslobađa energiju i prenosi je na drugo tijelo, stoga je jednadžba za rad i energiju postpuno ista. Ako sila ili moment djeluju u smjeru gibanja, i ako je brzina gibanja v ili ω konstantna, tada vrijed relacije za rad W :

$$W = F \cdot v \cdot t = P \cdot t$$

odnosno

$$W = M \cdot \omega \cdot t = P \cdot t$$

gdje je:

- P – mehanička snaga (engl. Power) - jedinica je Watt [$W=J/s$] po Škotskom inženjeru Jamesu Wattu
- v - linearna brzina [m/s]
- ω – kutna brzina [rad/s]
- t – vrijeme [s]

Kada brzina nije konstantna onda vrijedi relacija za snagu P :

$$P = \frac{dW}{dt}$$

Odnosno definira se prosječna (srednja) snaga P_{sr} :

$$P_{sr} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Sa stanovišta električne enregija koja je npr. potrebna za rad stroje mjerna jedinica energije određena je na sljedeći način:

$$E = E_{el}[kWh]$$

gdje je jedinica: $[kWh]$ - kilovatsat

Slijedom prije navedenoga, električna snaga P_{el} istosmjernog napajanja određena je relacijom:

$$P_{el} = U \cdot I$$

gdje je:

U – napon (eng. *Voltage*, V),

I – istosmjerna struja (eng. *DC current*)

Električna snaga P_{el} izmjeničnog napjanja određena je relacijom:

$$P_{el} = U \cdot I \cdot \cos \varphi$$

gdje je:

U – efektivni napon [V],

I – efektivna struja [A],

$\cos \varphi$ – faktor snage

Ako npr. imamo istosmjerni elektromotor koji pretvara električnu u mehaničku energiju, i kada je moment tog stroja konstantan $M = const.$ i kutna brzina $\omega = const.$, tada je koeficijent iskoristivosti stroja η jednak:

$$\eta = \frac{P_{meh}}{P_{el}} = \frac{M \cdot \omega}{U \cdot I}$$

gdje je:

P_{meh} - mehanička snaga stroja [W]

P_{el} – električna snaga stroja [W]

1.3 Matematičko modeliranje

Matematičko modeliranje temelji se na Newtonovim zakonima gibanja odnosno na poznatim Newtonovim aksiomima klasične mehanike koji su objavljeni još 1687. godine. Ti aksiomi su: zakon inercije, zakon gibanja i zakon akcije i reakcije. Prvi aksiom govori kako se tijelo nalazi u stanju mirovanja ili jednolikog gibanja po pravcu sve dok vanjske sile ne uzrokuju promjenu tog stanja, drugi aksiom govori da kada na tijelo mase m djeluje sila F tada ona daje ubrzanje a , i treći aksiom govori ako jedno tijelo djeluje silom F na drugo tijelo, tada i to tijelo djeluje istom silom na prvo tijelo. Te dvije sile su istog iznosa i na istom pravcu, ali su suprotno orijentirane. One se javljaju u paru i jedna od njih zove se sila akcije F_A , a druga sila reakcije F_R , i vrijedi relacija:

$$F_A = F_R$$

Analogno će vrijediti za momente:

$$M_A = M_R$$

U slučaju istosmjernog pogona, aktivni moment je elektromagnetski moment stroja M_{el} i vrijedi:

$$M_A = M_{el}$$

Dok je reaktivni moment zapravo mehanički moment stroja M_{meh} i vrijedi:

$$M_R = M_{meh}$$

Stoga, istosmjerni motor jednoliko gibati kada je:

$$M_{el} = M_{meh}$$

Ukoliko električni i mehanički moment ovise o vremenu t tada vrijedi:

$$M_{el}(t) = M_{meh}(t)$$

Tada govorimo o odzivu sustava na ulazni poticaj i primjenjuje se princip *superpozicije*. To je princip po kojem je ukupni odziv fizičkih veličina jednak zbroju odziva pojedinih fizičkih veličina sustava.

Reaktivne veličine mogu biti reaktivni momenti kao posljedica akceleracije sustava, brzine sustava i pomaka sustava. U konkretnom slučaju to je kutna akceleracija α , kutna brzina ω i kut pomaka φ odnosno moment tereta M_t .

U tom slučaju vrijedi da je:

$$M_{el}(t) = M_a(t) + M_v(t) + M_\varphi(t) + M_t(t)$$

odnosno

$$M_{el}(t) = J \cdot \alpha(t) + k_\omega \cdot \omega(t) + k_\varphi \cdot \varphi(t) + M_t(t)$$

Može se stoga napisati:

$$J \cdot \alpha(t) + k_\omega \cdot \omega(t) + k_\varphi \cdot \varphi(t) = M_{el}(t) - M_t(t)$$

Sređivanjem slijedi:

$$\alpha(t) + \frac{k_\omega}{J} \cdot \omega(t) + \frac{k_\varphi}{J} \cdot \varphi(t) = \frac{M_{el}(t) - M_t(t)}{J}$$

gdje je:

J – moment inercije

k_ω – konstanta kutne brzine

k_φ – konstanta kutnog pomaka

Uvođenjem koeficijenta $a_1 = \frac{k_\omega}{J}$ i $a_2 = \frac{k_\varphi}{J}$ odnosno funkcije $f(t) = \frac{M_{el}(t) - M_t(t)}{J}$ može se pisati:

$$\alpha(t) + a_1 \cdot \omega(t) + a_2 \cdot \varphi(t) = f(t)$$

Kako kutna akceleracija $\alpha(t)$ i kutna brzina $\omega(t)$ proizlaze (deriviraju) iz kutnog pomaka $\varphi(t)$ slijedi nehomogena diferencijalna jednadžba drugog reda s konstantnim koeficijentima:

$$\ddot{\varphi}(t) + a_1 \cdot \dot{\varphi}(t) + a_2 \cdot \varphi(t) = f(t)$$

Uzme li se u obzir da je koeficijent kutnog pomaka zbog čvrstoće vratila približno jednak nuli tj. vrijedi $a_2 \cong 0$, tada se može pisati:

$$\ddot{\varphi}(t) + a_1 \cdot \dot{\varphi}(t) = f(t)$$

Odnosno

$$\dot{\omega}(t) + a_1 \cdot \omega(t) = f(t)$$

Dakle, slijedi nehomogena diferencijalna jednadžba prvog reda s konstantnim koeficijentima. Analogno će vrijediti i za struju I u slučaju istosmjerne struje:

$$\dot{I}(t) + b_1 \cdot I(t) = g(t)$$

Općenito se može tvrditi kako se rad električnih strojeva može dovoljno dobro matematički modelirati pomoću diferencijalnih jednadžbi s konstantnim koeficijentom, uz određena manja ograničenja. Stoga, je poznavanje rješavanja takvih diferencijalnih jednadžbi od posebne važnosti.

Naka je npr. zadana sljedeća nehomogena diferencijalna jednadžba s konstantnim koeficijentom p :

$$\dot{y}(t) + p \cdot y(t) = f(t)$$

gdje je:

$$y(0) = y_0 - \text{početni uvjet}$$

Prvi korak je rješenje homogene diferencijalne jednadžbe, a zatim nehomogene kako slijedi.

Homogena diferencijalna jednadžba glasi:

$$\dot{y}(t) + p \cdot y(t) = 0$$

pri čemu je: $y(0) = 0$

Za rješenje diferencijalne jednadžbe potrebno je koristiti formulu Jana D' Alemberta koja glasi:

$$\dot{y}(t) = \frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}$$

Homogena diferencijalna jednadžba može se napisati i u sljedećem obliku:

$$\dot{y}(t) = -p \cdot y(t)$$

Ako je npr. $p = -1$ onda vrijedi kako je derivacija jednaka originalnoj funkciji i vrijedi:

$$\dot{y}(t) = y(t)$$

Slijedom prije napisanog dobijamo:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} = y(t)$$

Neka je npr. $y(t) = a^t$ i tada se može pisati:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{a^{t+\Delta t} - a^t}{\Delta t} = a^t$$

Iz prije navedene relacije slijedi:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (a^{t+\Delta t} - a^t - \Delta t \cdot a^t) = 0$$

Odnosno

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} [a^t (a^{\Delta t} - 1 - \Delta t)] = a^t \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (a^{\Delta t} - 1 - \Delta t) = 0$$

Relaciju $a^{\Delta t} - 1 - \Delta t \rightarrow 0$ moguće je napisati na sljedeći način:

$$a^{\Delta t} \rightarrow 1 + \Delta t$$

Odnosno ako potenciramo sa $\frac{1}{\Delta t}$ vrijedi:

$$a \rightarrow (1 + \Delta t)^{\frac{1}{\Delta t}}$$

Sada se može pisati:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (1 + \Delta t)^{\frac{1}{\Delta t}}$$

Prije napisani limes rješio je Leonhard Euler i on iznosi:

$$\begin{aligned} a &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (1 + \Delta t)^{\frac{1}{\Delta t}} = \\ &= 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995 \end{aligned}$$

Taj broj naziva se prirodni broj i označava se sa $e = 2,71828 \dots$

Rješenje bi sada bilo:

$$\dot{y}(t) = y(t) = e^t$$

U slučaju kada je $y(t) = e^{-p \cdot t}$ tada vrijedi:

$$\dot{y}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{e^{-p \cdot (t + \Delta t)} - e^{-p \cdot t}}{\Delta t}$$

odnosno

$$\dot{y}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{e^{-p \cdot t} (e^{-p \cdot \Delta t} - 1)}{\Delta t} = e^{-p \cdot t} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{e^{-p \cdot \Delta t} - 1}{\Delta t}$$

Analogno prethodnom slučaju može se napisati:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{e^{-p \cdot \Delta t} - 1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{e^{-p \cdot \Delta t} - 1}{-p \cdot \Delta t} \cdot (-p) = -p \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{e^{-p \cdot \Delta t} - 1}{-p \cdot \Delta t} = -p \cdot 1 = -p$$

Derivacija iznosi:

$$\dot{y}(t) = -p \cdot e^{-p \cdot t}$$

Odnosno vrijedi za homogenu diferencijalnu jednadžbu $\dot{y}(t) + p \cdot y(t) = 0$ da je:

$$\dot{y}(t) + p \cdot y(t) = -p \cdot e^{-p \cdot t} + p \cdot e^{-p \cdot t} = 0$$

Koristeći eksponencijalnu funkciju prirodnog broja $e = 2,71828 \dots$ francuski matematičar Pierre-Simone Laplace odredio je način rješavanja nehomogenih diferencijalnih jednadžbi s konstantnim koeficijentom.

Polazište za rješavanje nehomogene diferencijalne jednadžbe je Laplasova kompleksna varijabla $s = \sigma \pm j\omega$ odnosno e^{-st} kao sastavni element L – transformacije. Naime, ako nehomogenu diferencijalnu jednadžbu općeg oblika:

$$\dot{y}(t) + a \cdot y(t) = f(t)$$

pomnožimo sa e^{-st} slijedi:

$$\dot{y}(t) \cdot e^{-st} + a \cdot y(t) \cdot e^{-st} = f(t) \cdot e^{-st}$$

Kako bi se riješila derivacija $\dot{y}(t)$ potrebno je diferencijalnu jednadžbu integrirati, stoga slijedi:

$$\int_0^{\infty} \dot{y}(t) \cdot e^{-st} \cdot dt + \int_0^{\infty} a \cdot y(t) \cdot e^{-st} \cdot dt = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} \cdot dt$$

Laplasov integral tada glasi:

$$Y(s) = \int_0^{\infty} y(t) \cdot e^{-st} \cdot dt$$

Odnosno:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} \cdot dt$$

Prema tome sada vrijedi:

$$\int_0^{\infty} \dot{y}(t) \cdot e^{-st} \cdot dt + a \cdot Y(s) = F(s)$$

Potrebno je riješiti preostali integral, i zato slijedi:

$$\int_0^{\infty} \dot{y}(t) \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{dy}{dt} \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dy$$

Uvodimo supstitucije:

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

I neka je:

$$u = e^{-st}$$

$$v = y(t)$$

Sada vrijedi:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} dy = e^{-st} \cdot y(t) - \int_0^{\infty} y(t) \cdot d(e^{-st})$$

i

$$\int_0^{\infty} e^{-st} dy = e^{-st} \cdot y(t) - \int_0^{\infty} y(t) \cdot (-s \cdot e^{-st}) dt$$

Slijedi rješenje integrala:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} dy = e^{-st} \cdot y(t) + s \int_0^{\infty} y(t) \cdot e^{-st} dt = e^{-st} \cdot y(t) \Big|_0^{\infty} + s \cdot Y(s) = s \cdot Y(s) - y(0)$$

Prema tome Lapasova transformacija opće nehomogene diferencijalne jednadžbe prvog reda s konstantnim koeficijentom glasi:

$$s \cdot Y(s) - y(0) + a \cdot Y(s) = F(s)$$

Sređivanjem dobijamo:

$$Y(s) = \frac{F(s) + y(0)}{s + a}$$

Funkcija $y(t)$ odredit će se inverznom Lapalaskom transformacijom kada je poznat parametar a i funkcija $f(t)$. Neka je $a = 2$ i $f(t) = 3 \cdot t$, a početni uvjet $y(0) = 1,5$. Diferencijalna jednadžba tada glasi:

$$\dot{y}(t) + 2 \cdot y(t) = 3 \cdot t$$

$$y(0) = 1,5$$

Potrebno je odrediti integral:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} \cdot dt = F(s) = \int_0^{\infty} 3 \cdot t \cdot e^{-st} \cdot dt = \frac{3}{s^2}$$

Sada slijedi:

$$Y(s) = \frac{F(s) + y_0}{s + a} = \frac{\frac{3}{s^2} + 1,5}{s + 2} = \frac{3}{s^2(s + 2)} + \frac{1,5}{s + 2}$$

Razlomak $\frac{3}{s^2(s+2)}$ potrebno je pretvoriti u pribrojnike, stoga slijedi:

$$\frac{3}{s^2(s + 2)} = \frac{a_1 \cdot s + a_2}{s^2} + \frac{a_3}{s + 2}$$

Množenjem i izjednačavanjem brojnika dobija se:

$$a_1 \cdot s^2 + a_2 \cdot s + 2 \cdot a_1 \cdot s + 2 \cdot a_2 + a_3 \cdot s = 3$$

Odnosno:

$$(a_1 + a_3) \cdot s^2 + (a_2 + 2 \cdot a_1) \cdot s + 2 \cdot a_2 = 3$$

Sada vrijedi:

$$2 \cdot a_2 = 3 \rightarrow a_2 = \frac{3}{2}$$

$$a_2 + 2 \cdot a_1 = 0 \rightarrow a_1 = -\frac{3}{4}$$

$$a_1 + a_3 = 0 \rightarrow a_3 = \frac{3}{4}$$

Ukupno vrijedi:

$$Y(s) = \frac{3}{s^2(s + 2)} + \frac{1,5}{s + 2} = \frac{-\frac{3}{4} \cdot s + \frac{3}{2}}{s^2} + \frac{\frac{3}{4}}{s + 2} + \frac{\frac{3}{2}}{s + 2}$$

Odnosno

$$Y(s) = -\frac{3}{4} \frac{1}{s} + \frac{3}{2} \frac{1}{s^2} + \frac{9}{4} \frac{1}{s+2}$$

Ili

$$Y(s) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{s+2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s}$$

Inverzna L-transformacija određuje se na temelju svakog pojedinog pribrojka jer je:

$$Y_1(s) = \int_0^{\infty} t^2 \cdot e^{-st} dt = \frac{1}{s^2}$$

$$Y_2(s) = \int_0^{\infty} e^{-2t} \cdot e^{-st} dt = \frac{1}{s+2}$$

$$Y_3(s) = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \frac{1}{s}$$

Stoga rješenje iznosi:

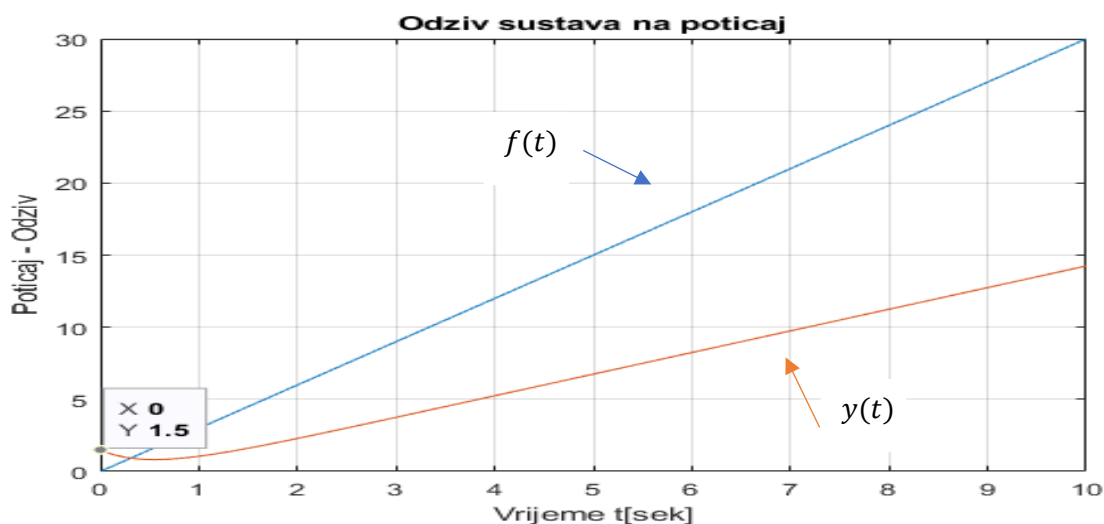
$$y(t) = \frac{3}{2} \cdot t + \frac{9}{4} \cdot e^{-2t} - \frac{3}{4}$$

U nastavku je prikazano MatLab rješenje diferencijalne jednadžbe.

```
syms s
y=3/(s^2*(s+2))+1.5/(s+2)
ilaplace (y)
syms t
f=3*t
fplot (f, [0 10])
hold on
y=3/2*t+9/4*exp(-2*t)-3/4
fplot (y, [0 10])
grid
title ('Odziv sustava na poticaj')
xlabel ('Vrijeme t[sek]')
ylabel ('Poticaj - Odziv')
```

$y =$
 $\frac{3}{2(s+2)} + \frac{3}{s^2(s+2)}$
 $ans =$
 $\frac{3t}{2} + \frac{9e^{-2t}}{4} - \frac{3}{4}$
 $f = 3t$
 $y =$
 $\frac{3t}{2} + \frac{9e^{-2t}}{4} - \frac{3}{4}$

Jednako tako prikazno je i grafičko rješenje kako slijedi na slici 1.6.



Sl. 1. 6 – Grafičko rješenje diferencijalne jednadžbe na zadanu pobudu

U nastavku će se analizirati odziv sustava na standardne pobudne funkcije.

1.4 Odziv sustava na standardne pobudne funkcije

Step funkcija (odskočna funkcija) kao standardna pobudna funkcija primjenjuje se u analizi odziva dinamičkih komponenti koje čine regulacijski krug. Dinamičke komponente jesu pojačalo, senzor, elektromotor, reduktor i sl., matematički se opisuju pomoću diferencijalnih jednadžbi prvog i drugog reda.

Step funkcija definirana je sljedećom relacijom:

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } t < 0 \\ 1 & \text{za } t \geq 0 \end{cases}$$

Slijedom Lapalosoze transformacije vrijedi:

$$S(s) = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} \cdot dt = \frac{1}{s}$$

Na temelju relacija kojima se opisuju nehomogene diferencijalne jednadžbe prvog i drugog stupnja, može se odrediti njihova prijenosna funkcija $G(s)$ (eng. *Transfer Function*), na način kako slijedi:

$$\begin{aligned} L\{\dot{y}(t) + a \cdot y(t)\} &= L\{k \cdot f(t)\} \\ s \cdot Y(s) + a \cdot Y(s) &= k \cdot F(s) \end{aligned}$$

Prema tome vrijedi:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{k}{s + a}$$

gdje su: a i k – konstante

Za diferencijalnu jednadžbu drugog stupnja vrijedi:

$$\begin{aligned} L\{\ddot{y}(t) + a \cdot \dot{y}(t) + b \cdot y(t)\} &= L\{k \cdot f(t)\} \\ s^2 \cdot Y(s) - s \cdot a \cdot Y(s) + b \cdot Y(s) &= k \cdot F(s) \end{aligned}$$

Može se stoga pisati:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{k}{s^2 + a \cdot s + b}$$

gdje su: a , b i k – konstante

Odziv sustava na step funkciju može se odrediti na temelju inverzne Laplasove transformacije kako slijedi:

$$y(t) = L^{-1}\left\{G(s) \cdot \frac{1}{s}\right\}$$

Prema tome vrijedi:

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{k}{s + a} \cdot \frac{1}{s}\right\}$$

odnosno

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{k}{s^2 + a \cdot s + b} \cdot \frac{1}{s}\right\}$$

U prvom slučaju rješenje je:

$$y(t) = \frac{k}{a} \cdot (1 - e^{-a \cdot t})$$

U drugom slučaju rješenje ovisi o korijenima karakteristične jednadžbe:

$$A(s) = s^2 + a \cdot s + b$$

Odnosno:

$$s_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$$

Ukoliko je $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b \geq 0$ tada vrijedi:

$$y(t) = L^{-1} \left\{ \frac{k}{(s + s_1) \cdot (s + s_2)} \cdot \frac{1}{s} \right\}$$

Odnosno rješenje iznosi:

$$y(t) = k \cdot \left[\frac{1}{s_1 \cdot s_2} + \frac{e^{-s_1 \cdot t}}{s_1 \cdot (s_1 - s_2)} - \frac{e^{-s_2 \cdot t}}{s_2 \cdot (s_1 - s_2)} \right]$$

Ukoliko je $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b < 0$ tada uvodimo sljedeće supstitucije:

$$a = 2 \cdot \zeta \cdot \omega$$

$$b = \omega^2$$

gdje je:

ζ – koeficijent prigušenja

ω – prirodna kružna frekvencija [rad/sek]

U ovom slučaju vrijedi:

$$y(t) = L^{-1} \left\{ \frac{k}{s^2 + a \cdot s + b} \cdot \frac{1}{s} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{k}{s^2 + 2\zeta\omega \cdot s + \omega^2} \cdot \frac{1}{s} \right\}$$

Rješenje glasi:

$$y(t) = \frac{k}{\omega^2} \left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cos(\omega \cdot \sqrt{1 - \zeta^2} \cdot t - \Phi) \right]$$

gdje je:

$$\Phi = \text{Arctan}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\right)$$

Slijedom prije izračunatog vrijede, u nastavku su prikazane odgovarajuće matematičke relacije kojima se opisuje sklop kao dinamička karakteristika odnosno odziv tog sklopa na standardnu pobudnu funkciju (step funkciju).

Sklop	Odziv
<p>Pojačalo</p> <p>Senzori</p> $G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{k}{s + a}$	$y(t) = \frac{k}{a} \cdot (1 - e^{-a \cdot t})$
<p>Elektromotor</p> <p>$\zeta \geq 1$</p> $G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{k}{s^2 + a \cdot s + b}$	$y(t) = k \cdot \left[\frac{1}{s_1 \cdot s_2} + \frac{e^{-s_1 \cdot t}}{s_1 \cdot (s_1 - s_2)} - \frac{e^{-s_2 \cdot t}}{s_2 \cdot (s_1 - s_2)} \right]$ $s_{1,2} = \left -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \right $
<p>Elektromotor</p> <p>$0 < \zeta < 1$</p> $G(s) = \frac{k}{s^2 + 2\zeta\omega \cdot s + \omega^2}$	$y(t) = \frac{k}{\omega^2} \left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega \cdot t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cos(\omega \cdot \sqrt{1 - \zeta^2} \cdot t - \Phi) \right]$ $\Phi = \text{Arctan}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\right)$ $s_{1,2} = -\zeta\omega \cdot (1 \pm j\sqrt{1 - \zeta^2})$

U nastavku će se analizirati matematički model linearizacije u slučaju nelinearnih modela automatizacije.

1.5 Matematički model linearizacije

Polazeći od prethodno napisanog, matematičko modeliranje je postupak opisivanja realnog sustava matematičkim jednadžbama s ciljem razvoja i uporabe matematičkog modela za kasnije analize, projektiranja i optimiranja sustava za koji je model izrađen. Matematički model opisuje sustav pomoću skupova varijabli i jednadžbi koje zatim opisuju odnose među varijablama. U modelu mogu postojati različiti tipovi varijabli, pa tako one mogu biti: ulazne i izlazne, zavisne i nezavisne, varijable stanje i slučajne varijable. Modeli se sastoje od varijabli, koeficijenata i matematičkih operatora.

U slučaju linearnog sustava primjenjuje se princip *superpozicije*, kako je i u prethodnom dijelu napomenuto, a riječ je dakle o principu *neovisnosti djelovanja vanjskog opterećenja* tj. djeluje li na sustav više opterećenja, rezultat djelovanja (reakcije, unutarnje sile, naprezanja,

deformacije, pomaka i ostalih) opterećenja zajedno može se izračunati kao zbroj rezultata zasebnih djelovanja pojedinih opterećenja.

Matematički modeli mogu biti linearni i nelinearni. Ako jednačbe modela pokazuju linearnost u promjene varijable od ulaza do izlaza, modele smatramo linearnim, i obrnuto. Nelinearne modele radi pojednostavljenog prikazivanja možemo *linearizirati*. Tada oni gube na točnosti, ali na jednostavan način prikazuju promjene i međusobne zavisnosti među varijablama.

Linearizacija se može primjeniti na sustave s koncentriranim parametrima i sustave s raspodjeljenim parametrima. Ako je sustav sastavljen *od konačno mnogo* idealiziranih pojedinačnih elemenata (npr. omski otpor, kapacitet, induktivitet, prigušivač, masa, opruga i sl.) onda je to sustav s koncentriranim parametrima. Takav sustav opisuje se pomoću *linearnih diferencijalnih jednačbi*. Ako sustav posjeduje beskonačno mnogo beskonačno malih pojedinačnih elemenata, onda je to sustav s raspodjeljenim parametrima. Takav se sustav opisuje se pomoću linearnih *parcijalnih diferencijalnih jednačbi*

Matematički modeli mogu biti *statički i dinamički*. Statički su modeli matematički opisi sustava u stacionarnom stanju, gdje su vrijednosti ulaznih i izlaznih varijabli konstantne, ali ne nužno i jednake jedne drugima. Budući da nema promjena varijabli njihova je derivacija jednaka nuli i one ne zavise o vremenu. Dinamički modeli, za razliku od statičkih, ovise o vremenu pa su promjene varijabli prikazane kao derivacije po vremenu odnosno kao diferencijalne jednačbe.

Matematički modeli mogu biti *kontinuirani i diskretni*. Kontinuirani modeli prikazuju se kao funkcija vremena $f(t)$ i varijable se mijenjaju tijekom vremena. Diskretni modeli uzimaju vrijednosti u određenom trenutku T , a vrijeme T naziva se vrijeme diskreditacije. Slijedom navedenog frekvencija $f = \frac{1}{T}$ naziva se frekvencija diskretizacije

U mnogim primjenama nužno je provesti linearizaciju nelinearnog sustava, a to znači pronaći linearnu aproksimaciju nelinearne funkcije u određenoj točki x_0 . Linearna aproksimacija postiže se uz pomoć Tylorovog reda koji općenito glasi:

$$f(x) = f(x_0) + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \cdot \frac{(x - x_0)}{1!} + \left. \frac{d^2f(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0} \cdot \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots$$

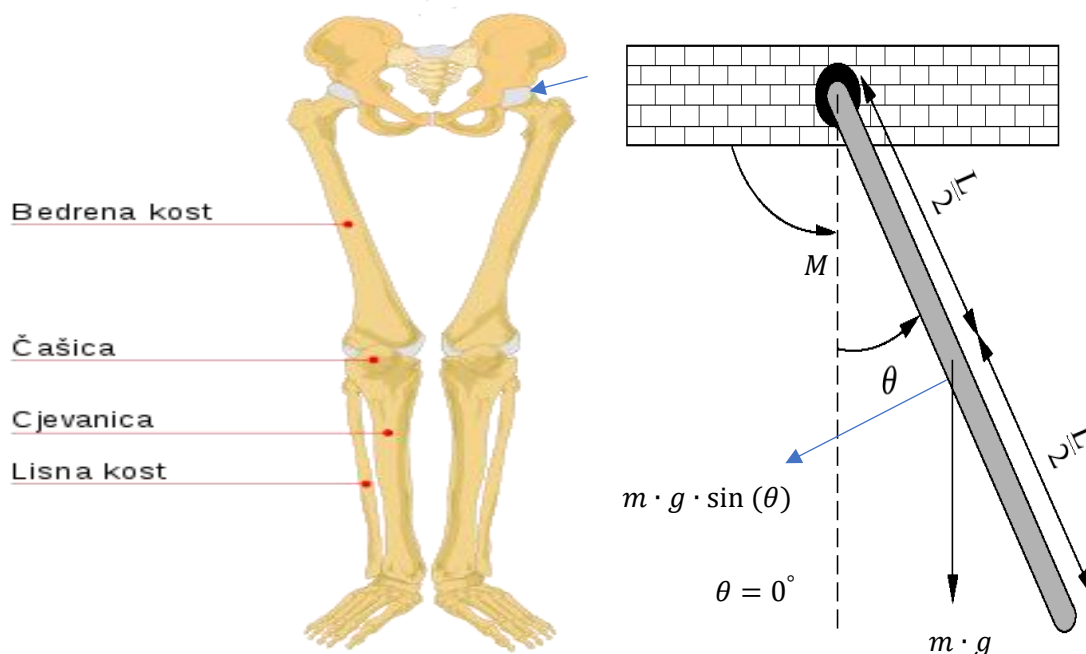
Uobičajeno se koriste prva dva elementa, stog vrijedi relacija.

$$f(x) \cong f(x_0) + (x - x_0) \cdot \dot{f}(x)$$

gdje je:

$$\dot{f}(x) = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$$

Promotrimo primjer dat na slici 1.7 u kojem se linearizira kretanje zgloba.



Sl. 1.7 – Linearizacija kretanja zgloba [Izvor: Norma S. Nise]

Neka su zadane sljedeće vrijednosti kretanja zgloba: masa $m = 5\text{ kg}$, dužina $L = 0,5\text{ m}$ i konstanta viskoznog trenja $k_v = 0,85\text{ Nms/rad}$. Potrebno je provesti linearizaciju sustava u odnosu na kutni pomak θ i odrediti prijednosnu funkciju $G(s)$, gdje je M – moment zgloba i $g = 9,81\text{ m/s}^2$ – gravitacija.

Na temelju superpozicije momenata može se napisati sljedeća diferencijalna jednačina:

$$M_{din}(\theta) + M_{tr}(\theta) + M_{gr}(\theta) = M(t)$$

gdje je:

$$M_{din}(\theta) = J \cdot \ddot{\theta} = m \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 \cdot \ddot{\theta} \text{ – dinamički moment (moment inercije)}$$

$$M_{tr}(\theta) = k_v \cdot \dot{\theta} \text{ – moment viskoznog trenja}$$

$$M_{gr}(\theta) = m \cdot g \cdot \sin(\theta) \text{ – moment gravitacije}$$

$$M(t) \text{ – moment zgloba}$$

Slijedi nelinearna diferencijalna jednačba:

$$m \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 \cdot \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + k_v \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} + \frac{m \cdot g \cdot L}{2} \cdot \sin[\theta(t)] = M(t)$$

Kako je diferencijalna jednačba je nelinearna, potrebno je provesti linealizaciju u okolini kuta $\theta_0 = 0^\circ$. Na temelju Tylorovog reda slijedi:

$$f(\theta) - f(\theta_0) = \Delta(\theta) \cdot \frac{df(\theta)}{dt} \Big|_{\theta=\theta_0}$$

Odnosno

$$\sin(\theta) - \sin(\theta_0) = (\theta - \theta_0) \cdot \frac{d}{dt}(\sin\theta)_{\theta=\theta_0}$$

Kako je $\sin(\theta_0) = \sin(0^\circ) = 0$ i $\frac{d}{dt}(\sin\theta)_{\theta=\theta_0} = \cos\theta_{\theta=\theta_0} = \cos\theta_{\theta=0^\circ} = 1$, tada vrijedi:

$$\sin(\theta) - 0 = (\theta - 0) \cdot 1$$

Odnosno:

$$\sin(\theta) = \theta$$

Stoga, linearizacija nelinearne diferencijalne jednačbe u okolini kuta $\theta_0 = 0^\circ$ glasi:

$$m \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 \cdot \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + k_v \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} + \frac{m \cdot g \cdot L}{2} \cdot \theta(t) = M(t)$$

Lapalsova transformacija glasi:

$$m \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 \cdot s^2 \cdot \Theta(s) + k_v \cdot s \cdot \Theta(s) + \frac{m \cdot g \cdot L}{2} \cdot \Theta(s) = M(s)$$

Prijenosna funkcija glasi:

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{M(s)} = \frac{1}{m \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 \cdot s^2 + k_v \cdot s + \frac{m \cdot g \cdot L}{2}}$$

Odnosno:

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{M(s)} = \frac{\frac{1}{m \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2}}{s^2 + \frac{k_v}{m \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2} \cdot s + \frac{\frac{m \cdot g \cdot L}{2}}{m \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2}}$$

Kako je:

$$J = m \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 = 5 \cdot \left(\frac{0,5}{2}\right)^2 = 0,3125 \text{kgm}^2$$

$$M_g = m \cdot g = 5 \cdot 9,81 = 49,05 \text{N}$$

Može se pisati:

$$G(s) = \frac{\frac{1}{0,3125}}{s^2 + \frac{0,85}{0,3125}s + \frac{49,05 \cdot 0,5}{2 \cdot 0,3125}} = \frac{3,2}{s^2 + 2,72 \cdot s + 39,24}$$

Nadalje, kako se radi o sustavu drugog reda, vrijedi usporedba:

$$G(s) = \frac{k}{s^2 + 2\zeta\omega \cdot s + \omega^2} = \frac{3,2}{s^2 + 2,72 \cdot s + 39,24}$$

Odnosno vrijedi:

$$k = 3,2$$

$$2 \cdot \zeta\omega = 2,72$$

$$\omega^2 = 39,24$$

Stoga je:

$$\omega = \sqrt{39,24} = 6,264 \text{rad} / \text{sek}$$

$$\zeta = \frac{2,72}{2 \cdot \omega} = \frac{2,72}{2 \cdot 6,26} = 0,217$$

$$\Phi = \text{Arctan}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{0,21}{\sqrt{1 - 0,21^2}}\right) = 0,2189 \text{rad ili } 12,54^\circ$$

Prema tome, radi se o oscilatornom procesu čija je prijelazna karakteristika opisana sljedećom relacijom:

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \frac{k}{\omega^2} \left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cos(\omega \cdot \sqrt{1 - \zeta^2} \cdot t - \Phi) \right] \\ &= 0,0815 [1 - 0,263 \cdot \cos(6,115 \cdot t - 0,2189)] \end{aligned}$$

Može se pisati:

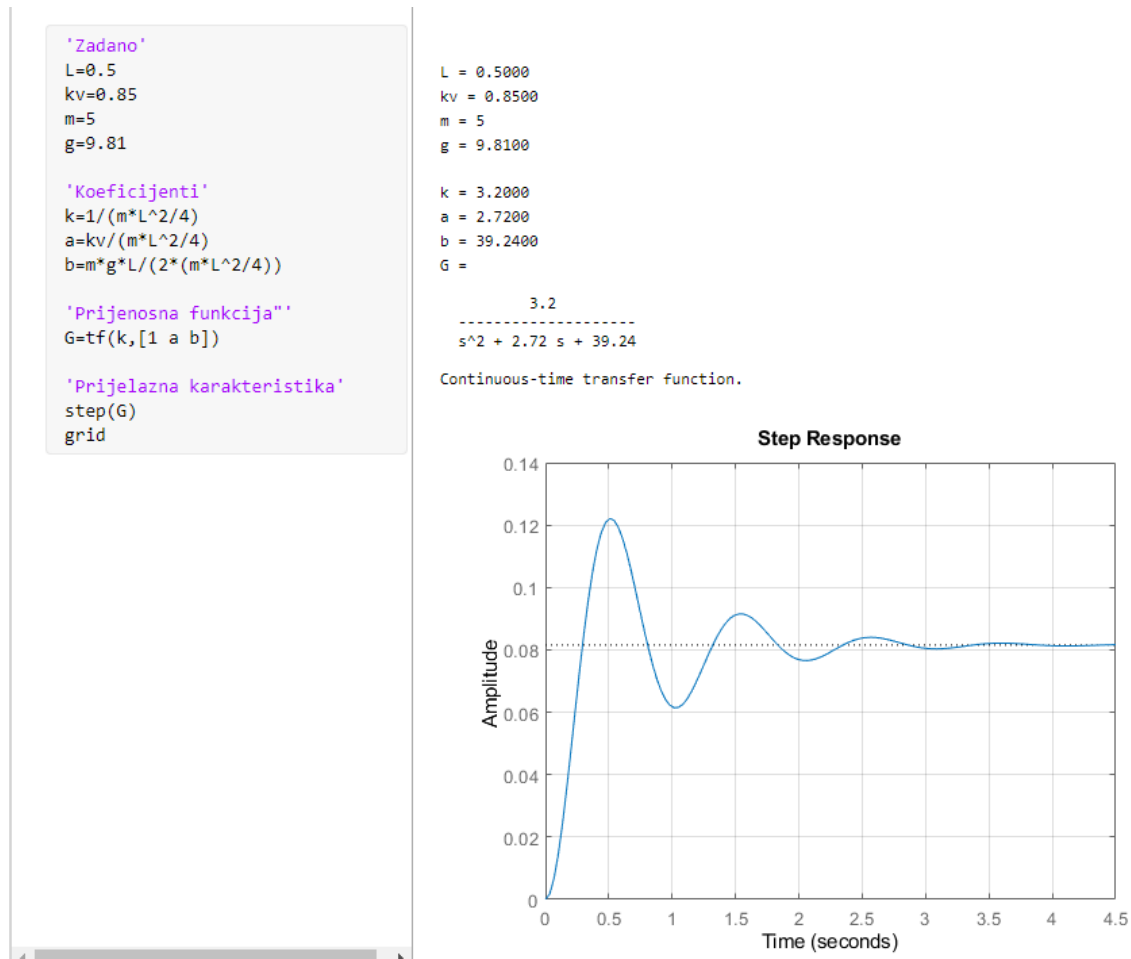
$$\theta(t) = 0,0815 - 0,0214 \cdot \cos(6,115 \cdot t - 0,2189)$$

Rješenje se sastoji od dva dijela i to partikulanog θ_p i homogenog θ_h rješenja, kako slijedi:

$$\theta_p = 0,085$$

$$\theta_h = -0,0214 \cdot \cos(6,115 \cdot t - 0,2189)$$

Rješenje u MaLab-u bilo bi sljedeće, a na slici 1.8 prikazan je oscilatorni odziv sustava.



Sl. 1.8 – Oscilatorni odziv sustava

Izbor monotonog rješenja

U prethodno prikazanom primjeru uočava se oscilatorni prijelazni proces, stoga se postavlja pitanje kako odrediti monotoni prijelazni proces opisan sljedećom realcijom:

$$y(t) = k \cdot \left[\frac{1}{s_1 \cdot s_2} + \frac{e^{-s_1 \cdot t}}{s_1 \cdot (s_1 - s_2)} - \frac{e^{-s_2 \cdot t}}{s_2 \cdot (s_1 - s_2)} \right]$$

Gdje su polovi sustava:

$$s_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$$

Proces će biti monoton ako su polovi $s_{1,2}$ realni brojevi, stoga mora vrijediti nejednadžba:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b > 0$$

Gdje su a i b koeficijenti prijenosne funkcije:

$$G(s) = \frac{k}{s^2 + a \cdot s + b}$$

Slijedom prije navedenog vrijedi usporedba:

$$G(s) = \frac{k}{s^2 + a \cdot s + b} = \frac{\frac{1}{m \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2}}{s^2 + \frac{k_v}{m \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2} \cdot s + \frac{\frac{m \cdot g \cdot L}{2}}{m \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2}}$$

Prema tome može se pisati:

$$a = \frac{k_v}{m \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \frac{4 \cdot k_v}{m \cdot L^2}$$

$$b = \frac{\frac{m \cdot g \cdot L}{2}}{m \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \frac{2 \cdot g}{L}$$

Kako vrijedi da je $a^2 > 4 \cdot b$ može se pisati:

$$\left(\frac{4 \cdot k_v}{m \cdot L^2}\right)^2 > 4 \frac{2 \cdot g}{L}$$

Sređivanjem dobijamo:

$$\frac{2}{L^3} \cdot \left(\frac{k_v}{m}\right)^2 > g$$

Ako odredimo da se dužina $L = 0,5m$ neće mijenjati, tada vrijedi odnos:

$$\frac{k_v}{m} > \sqrt{\frac{L^3 \cdot g}{2}} = \sqrt{\frac{0,5^3 \cdot 9,81}{2}} = 0,783$$

Postojeća vrijednost je:

$$\frac{k_v}{m} = \frac{0,85}{5} = 0,17$$

Kako je $0,17 < 0,783$ proces je oscilatoran. Stoga je potrebno smanjiti masu m koja bi trebala iznositi:

$$m < \frac{k_v}{0,783} = \frac{0,85}{0,783} = 1,0856 \text{ kg}$$

Neka je masa $m = 1 \text{ kg}$ tada vrijedi da je:

$$k = \frac{1}{m \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \frac{1}{1 \cdot \left(\frac{0,5}{2}\right)^2} = 16$$

$$a = \frac{4 \cdot k_v}{m \cdot L^2} = \frac{4 \cdot 0,85}{1 \cdot 0,5^2} = 13,6$$

$$b = \frac{2 \cdot g}{L} = \frac{2 \cdot 9,81}{0,5} = 39,24$$

Prijenosna funkcija glasi:

$$G(s) = \frac{k}{s^2 + a \cdot s + b} = \frac{16}{s^2 + 13,6 \cdot s + 39,24}$$

Korijeni karakteristične jednažbe iznose:

$$s_{1,2} = \left| -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \right| = \left| -\frac{13,6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{13,6}{2}\right)^2 - 39,24} \right|$$

Odnosno apsolutne vrijednosti iznose:

$$s_1 = 4,142 \quad i \quad s_2 = 9,445$$

Prijenosna funkcija glasi:

$$\theta(t) = k \cdot \left[\frac{1}{s_1 \cdot s_2} + \frac{e^{-s_1 \cdot t}}{s_1 \cdot (s_1 - s_2)} - \frac{e^{-s_2 \cdot t}}{s_2 \cdot (s_1 - s_2)} \right]$$

Odnosno

$$\theta(t) = 16 \cdot \left[\frac{1}{4,142 \cdot 9,445} + \frac{e^{-4,142 \cdot t}}{4,142 \cdot (4,142 - 9,445)} - \frac{e^{-9,445 \cdot t}}{9,445 \cdot (4,142 - 9,445)} \right]$$

Vrijedi:

$$\theta(t) = 16 \cdot (0,0256 - 0,0455 \cdot e^{-4,142 \cdot t} + 0,02 e^{-9,445 \cdot t})$$

Odnosno:

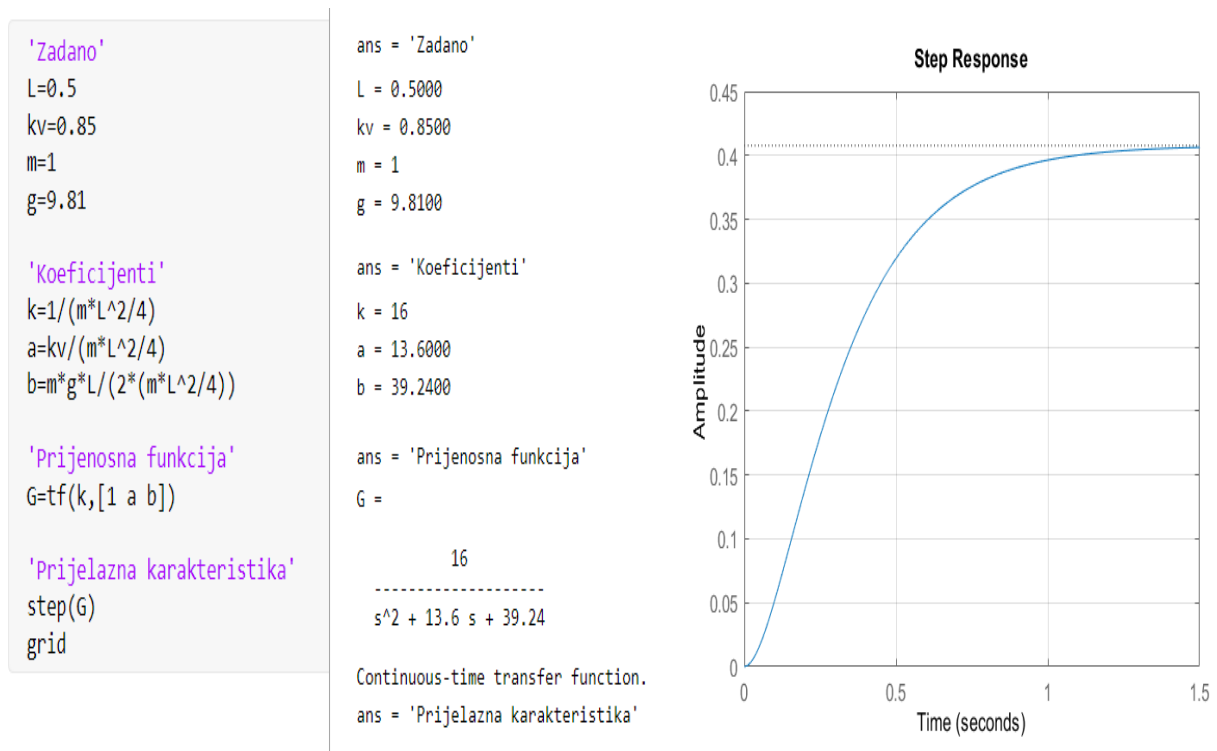
$$\theta(t) = 0,409 - 0,728 \cdot e^{-4,142 \cdot t} + 0,3194 \cdot e^{-9,445 \cdot t}$$

Rješenje se sastoji od dva dijela i to partikularnog θ_p i homogenog θ_h rješenja, kako slijedi:

$$\theta_p = 0,409$$

$$\theta_h = -0,728 \cdot e^{-4,142 \cdot t} + 0,3194 \cdot e^{-9,445 \cdot t}$$

Rješenje u MaLab-u bilo bi sljedeće, a na slici 1.9 prikazan je monotoni odziv sustava.



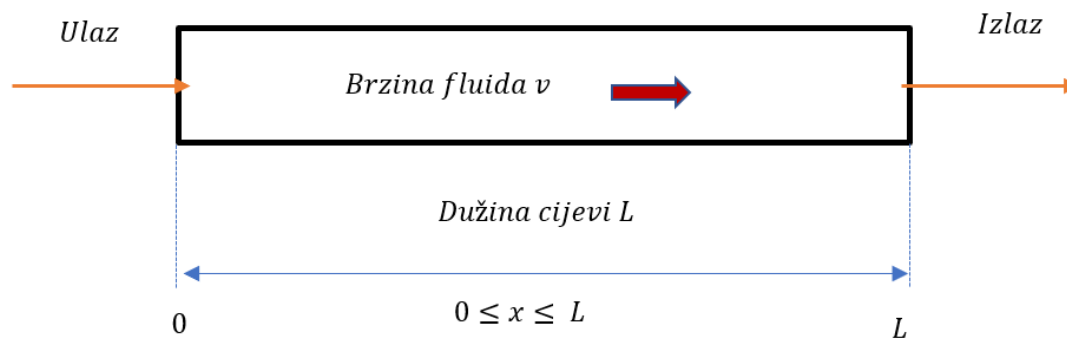
Sl. 1.9 – Monotoni odziv sustav

U prethodnim primjerima matematički model sustava opisan je bio nehomogenim diferencijalnim jednadžbama s konstantnim koeficijentima, a postupkom linearizacije (Tylorov red) nelinerani model u okolini zadane točke transformiran je u linearni model.

U nastavku će se analizirati primjena parcijalnih diferencijalnih jednadžbi kada, su za razliku od nehomogenih diferencijalnih jednadžbi, prisutne dvije ili više varijabli.

1.6 Matematičko modeliranje pomoću parcijalnih diferencijalnih jednadžbi

Parcijalne diferencijalne jednadžbe primjenjuju se kada funkcija koju promatramo ovisi o dvije ili više nezavisnih varijabli. Te varijable mogu biti prostor (x,y,z) i vrijeme t . Karakterističan problem kada se koristi parcijalne diferencijalne jednadžbe je npr. problem širenja topline koji ovisi o prostoru i vremenu. Na slici 1. 10 prikazan je prijenos topline kroz cijev gdje se uočava prostorni i vremenski tok.



Sl.1.10 - Prijenos topline kroz cijev

Matematički model je sljedeći:

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = -v \cdot \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$$

gdje je:

$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}$ – vremenski tok

$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$ – prostorni tok

v – brzina fluida

x – pomak

t - vrijeme

Laplasova transformacija glasi:

$$Y(x,s) = \int_0^{\infty} y(x,t) \cdot e^{-st} dt$$

Jednako tako za tokove vrijedi:

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \cdot e^{-st} dt = s \cdot Y(x, s) - y(x, 0)$$

odnosno

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \cdot e^{-st} dt = \frac{d}{dx} Y(x, s)$$

Kako je za $x = 0$ početni uvijet $y(x, 0) = 0$, može se pisati:

$$s \cdot Y(x, s) = -v \cdot \frac{d}{dx} Y(x, s)$$

odnosno

$$\frac{d}{dx} Y(x, s) + \frac{s}{v} \cdot Y(x, s) = 0$$

Dakle, sada se radi o diferencijalnoj jednačbi čije je opće rješenje:

$$Y(x, s) = C \cdot e^{-\frac{x}{v}s}$$

Za $x = 0$ vrijediti će:

$$Y(0, s) = C \cdot e^{-\frac{0}{v}s} = C$$

Za $x = L$ vrijedit će:

$$Y(L, s) = C \cdot e^{-\frac{L}{v}s} = C \cdot e^{-\tau \cdot s}$$

Gdje je:

$$\tau = \frac{L}{v} - \text{vremenska konstanta [s]}$$

Prema tome, može se pisati da je:

$$Y(L, s) = Y(0, s) \cdot e^{-\tau \cdot s}$$

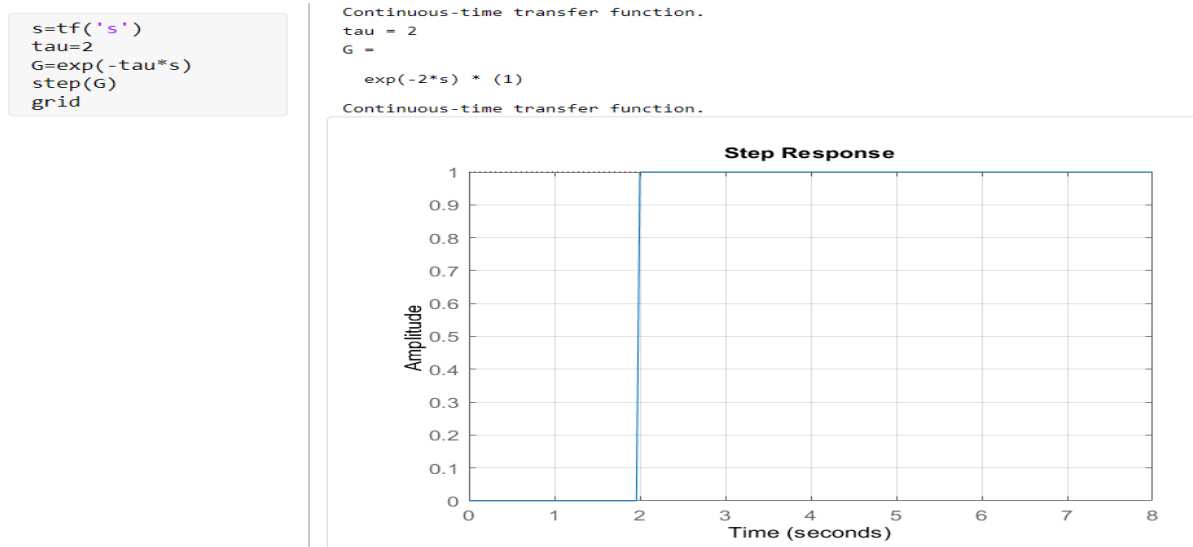
Prijenosna funkcija transportnog kašnjenja topline $G_{tk}(s)$ glasi:

$$G_{tk}(s) = \frac{Y(L, s)}{Y(0, s)} = e^{-\tau \cdot s}$$

Odziv sustava transportnog kašnjenja na step funkciju određuje se inverznom Laplasovom transformacijom i bio bi sljedeći:

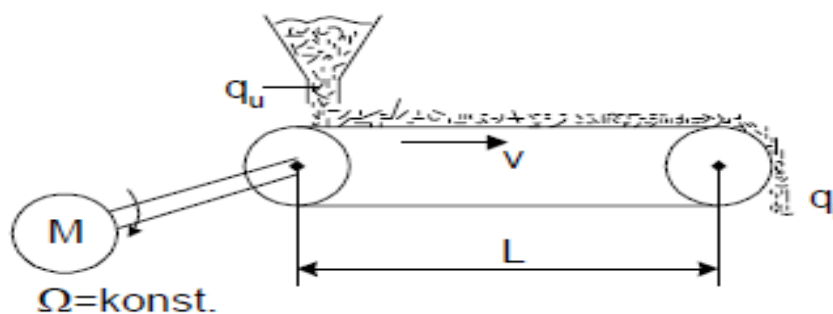
$$L^{-1} \left\{ \frac{G_{tk}(s)}{s} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{e^{-\tau \cdot s}}{s} \right\} = s(t - \tau)$$

Ako je npr. $\tau = 2$ s tada je na slici 1.11 prikaza odziv sustava u kojem se vidi kašnjenje od 2 sekunde.



Sl. 1.11 – Odziv sustava u slučaju transportnog kašnjenja

Na slici 1.12 prikazan je elektromotor povezan s transportnom trakom koju rotira elektromotor konstantne kutne brzine Ω



Sl. 1.12– Elektromotor povezan s transportnom trakom

Prijenosna funkcija elektromotora određena je sljedećom relacijom:

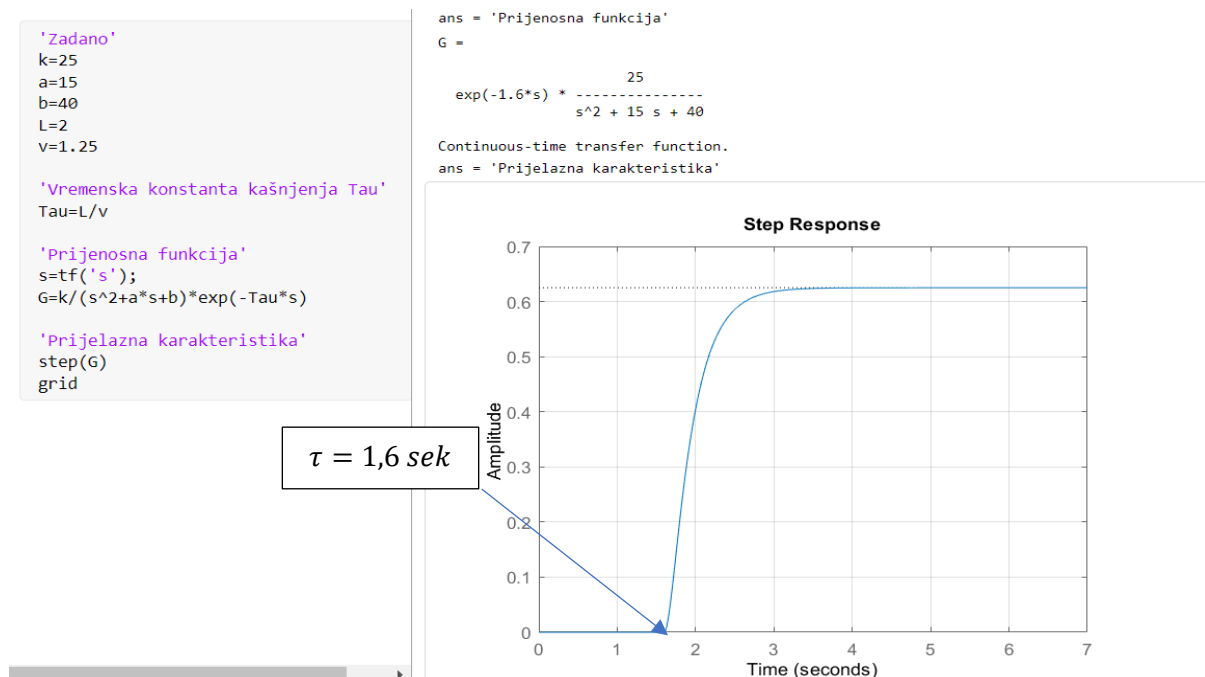
$$G(s) = \frac{25}{s^2 + 15 \cdot s + 40}$$

Dužina trake iznosi $L = 2m$, a brzina transportne trake iznosi $v = 1,25 m/s$. Vremenska konstanta tada iznosi $\tau = \frac{L}{v} = \frac{2}{1,25} = 1,6 sek$.

Ukupna prijenosna funkcija sustava bila bi:

$$G(s) = \frac{25}{s^2 + 15 \cdot s + 40} \cdot e^{-\tau \cdot s} = \frac{25}{s^2 + 15 \cdot s + 40} \cdot e^{-1,25 \cdot s}$$

Rješenje u MaLab-u bilo bi sljedeće, prikazano na slici 1.13.



Sl.1.13 – Odziv sustava s transportnim kašnjenjem na step funkciju

U prethodnim poglavljima provedena je analiza i sinteza sustava automatskog upravljanja u vremenskom području, pri čemu su u matematičkom modeliranju korištene diferencijalne jednačbe. Na temelju prijenosne funkcije određen je odziv sustava na step funkciju kao standardnu pobudnu funkciju.

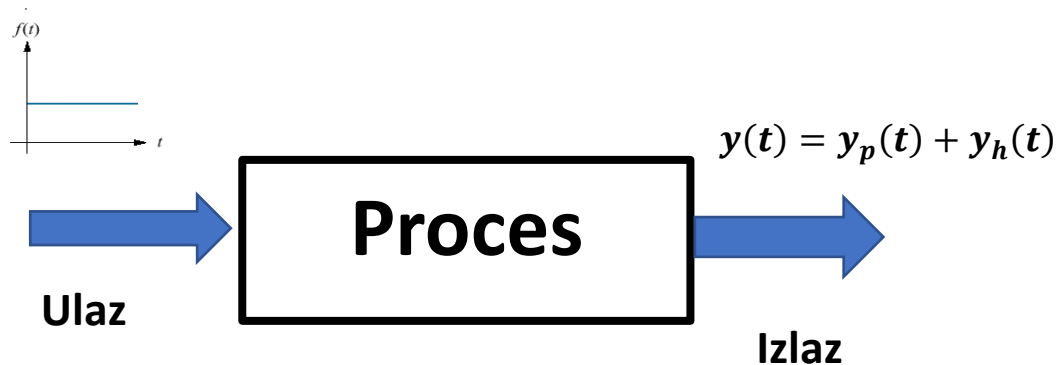
U nastavku će pozornost biti usmjerena na frekvencijsko područje na trigonometrijske pobudne funkcije (sinus i cosinus), i na promjene koje se događaju u odnosu na amplitudu i fazu signala. Slijedom prije napisanoga kao rezultat analiza odredit će se amplitudno-fazna frekvencijska karakteristika ili Bodeov dijagram.

1.7 Amplitudno-fazna frekvencijska karakteristika

Kako je iz prethodnih primjera vidljivo, odziv sustava $y(t)$ na step funkciju općenito se sastoji od partikulanog y_p i homogenog y_h rješenja i naziva se *prijelazna funkcija* ili *prijelazna karakteristika* odnosno vrijedi sljedeća relacija:

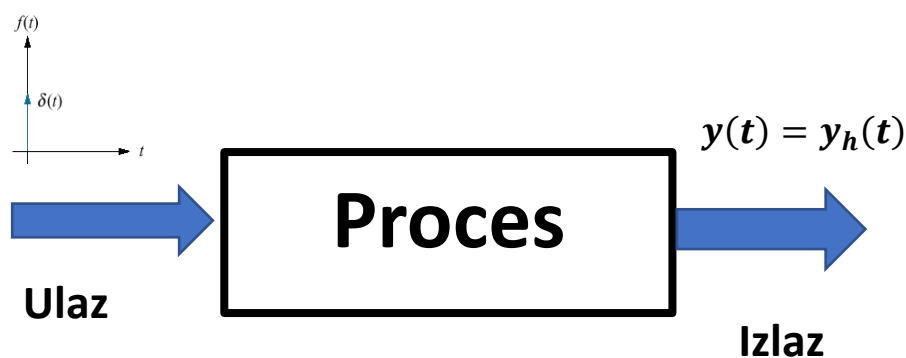
$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

Na slici 1.14 dat je shematski prikaz odziva na step funkciju.



Sl. 1.14 – Odziv na step funkciju (Prijelazna funkcija)

Odziv sustava $y(t)$ na impulsnu funkciju sastoji se samo od homogenog rješenja y_h i naziva se *težinska funkcija*. Na slici 1.15 dat je shematski prikaz odziva na impulsnu funkciju.



Sl. 1.15 – Odziv na impulsnu funkciju (Težinska funkcija)

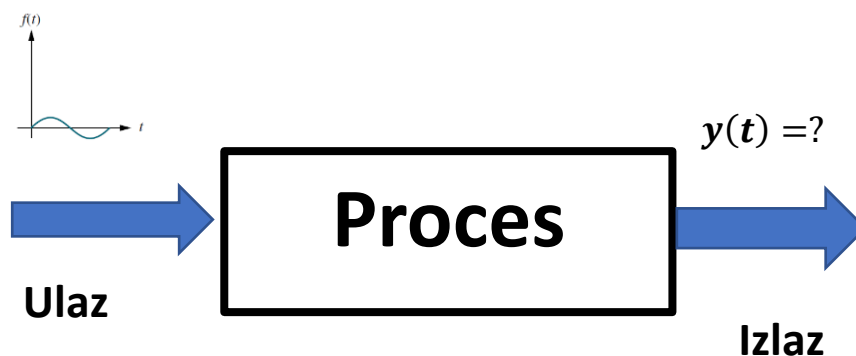
Polazeći od prije navedenoga, postavlja se pitanje kakav je odziv sustava $y(t)$ ako se na ulazu nalazi trigonometrijska pobudna funkcija y_{ul} određena sljedećom relacijom:

$$y_{ul} = M_{ul} \cdot \cos(\omega t - \varphi_{ul})$$

gdje je: M_{ul} – ulazna amplituda (engl. *Magnitude*)

φ_{ul} – ulazna faza (engl. *Phase*)

Na slici 1.16 dat je shemastki prikaz s trigonometrijskom pobudnom funkcijom



Sl. 1.16 – Odziv na trigonometrijsku pobudnu funkciju

Polazeći od prethodno opisane trigonometrijske funkcije, može se dalje napisati kako je:

$$y_{ul} = M_{ul} \cdot \cos \omega t \cdot \cos \varphi_{ul} + M_{ul} \cdot \sin \omega t \cdot \sin \varphi_{ul} = A \cdot \cos \omega t + B \cdot \sin \omega t$$

gdje je: $A = M_{ul} \cdot \cos \varphi_{ul}$ i $B = M_{ul} \cdot \sin \varphi_{ul}$

Laplasova transformacija ulaza y_{ul} glasi:

$$Y_{ul}(s) = L\{A \cdot \cos \omega t + B \cdot \sin \omega t\} = \frac{A \cdot s + B \cdot \omega}{s^2 + \omega^2}$$

Laplasova transformacija izlaza $Y_{izl}(s)$ glasi:

$$Y_{izl}(s) = G(s) \cdot \frac{A \cdot s + B \cdot \omega}{s^2 + \omega^2}$$

gdje je: $G(s)$ – prijenosna funkcija sustava

Riješenje je moguće rastavljanjem na pribrojnice na sljedeći način:

$$Y_{izl}(s) = G(s) \cdot \frac{A \cdot s + B \cdot \omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{k_1}{s + j\omega} + \frac{k_2}{s - j\omega} + \text{parcijalni razlomci od } G(s)$$

gdje je:

$$Y_p(s) = \frac{k_1}{s + j\omega} + \frac{k_2}{s - j\omega} - \text{pratikularno rješenje odnosno ustaljeno stanje odziva (engl. } \textit{Stady} \\ \textit{- state Response})$$

$$Y_h(s) = \text{parcijalni razlomci od } G(s) - \text{homogeno rješenje odnosno prijelazni proces} \\ \text{(engl. } \textit{Transient Response})$$

Kako se izlazna funkcija $Y_{izl}(s)$ promatra u ustaljenom stanju, tada se u obzir uzima samo pratikularno rješenje i zato vrijedi:

$$Y_{izl}(s) = G(s) \cdot \frac{A \cdot s + B \cdot \omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{k_1}{s + j\omega} + \frac{k_2}{s - j\omega}$$

Potrebno je stoga odrediti koeficijente k_1 i k_2 poznatom relacijom² kako slijedi:

$$k_1 = \frac{A \cdot s + B \cdot \omega}{s - j\omega} \cdot G(s)_{s=-j\omega} = \frac{A \cdot (-j\omega) + B \cdot \omega}{-j\omega - j\omega} \cdot G(-j\omega) = \frac{1}{2}(A - jB) \cdot G(-j\omega)$$

$$k_2 = \frac{A \cdot s + B \cdot \omega}{s + j\omega} \cdot G(s)_{s=j\omega} = \frac{A \cdot (j\omega) + B \cdot \omega}{j\omega + j\omega} \cdot G(j\omega) = \frac{1}{2}(A + jB) \cdot G(j\omega)$$

Kako se radi o kompleksnim relacijama, potrebno je primjeniti Eulerovu transformaciju koja glasi:

$$M_{ul} \cdot e^{\pm j\varphi_{ul}} = M_{ul} \cdot (\cos \varphi_{ul} \pm j \cdot \sin \varphi_{ul}) = M_{ul} \cdot \cos \varphi_{ul} \pm j \cdot M_{ul} \cdot \sin \varphi_{ul} = A \pm j \cdot B$$

Jednako tako prijenosnu funkciju $G(s)$ moguće je izraziti u sljedećem obliku:

$$G(\pm j\omega) = U \pm j \cdot V = M_G \cdot e^{-j\varphi_G}$$

Slijedom prije napisanoga vrijedi:

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{2}(A - jB) \cdot G(-j\omega) = \frac{1}{2} M_{ul} \cdot e^{-j\varphi_{ul}} \cdot M_G \cdot e^{-j\varphi_G} = \frac{M_{ul} \cdot M_G}{2} e^{-j\varphi_{ul}} \cdot e^{-j\varphi_G} \\ &= \frac{M_{ul} \cdot M_G}{2} e^{-j(\varphi_{ul} + \varphi_G)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= \frac{1}{2}(A + jB) \cdot G(j\omega) = \frac{1}{2} M_{ul} \cdot e^{j\varphi_{ul}} \cdot M_G \cdot e^{j\varphi_G} = \frac{M_{ul} \cdot M_G}{2} e^{j\varphi_{ul}} \cdot e^{j\varphi_G} \\ &= \frac{M_{ul} \cdot M_G}{2} e^{j(\varphi_{ul} + \varphi_G)} \end{aligned}$$

Prema tome za ustaljeno stanje vrijedi:

$$Y_{izl}(s) = \frac{k_1}{s + j\omega} + \frac{k_2}{s - j\omega} = \frac{\frac{M_{ul} \cdot M_G}{2} e^{-j(\varphi_{ul} + \varphi_G)}}{s + j\omega} + \frac{\frac{M_{ul} \cdot M_G}{2} e^{j(\varphi_{ul} + \varphi_G)}}{s - j\omega}$$

Odnosno:

$$Y_{izl}(s) = \frac{M_{ul} \cdot M_G}{2} \cdot \left(e^{-j(\varphi_{ul} + \varphi_G)} \frac{1}{s + j\omega} + e^{j(\varphi_{ul} + \varphi_G)} \frac{1}{s - j\omega} \right)$$

²Norman S. Nise, „Control System Engineering“, sixth edition, p. 39-40

Primjenom inverzne Laplasove transformacije:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s \pm j\omega}\right\} = e^{\pm j\omega t}$$

Može se pisati kako je:

$$Y_{izl}(s) = \frac{M_{ul} \cdot M_G}{2} \cdot (e^{-j(\varphi_{ul} + \varphi_G)} \cdot e^{-j\omega t} + e^{j(\varphi_{ul} + \varphi_G)} \cdot e^{-j(\varphi_{ul} + \varphi_G)} \cdot e^{j\omega t})$$

Odnosno vrijedi:

$$Y_{izl}(s) = M_{ul} \cdot M_G \cdot \left(\frac{e^{-j(\omega t + \varphi_{ul} + \varphi_G)} + e^{j(\omega t + \varphi_{ul} + \varphi_G)}}{2} \right)$$

Kako na temelju Eulerove transformacije općenito vrijedi:

$$\left. \begin{aligned} e^{j\varphi} &= \cos \varphi + j \cdot \sin \varphi \\ e^{-j\varphi} &= \cos \varphi - j \cdot \sin \varphi \end{aligned} \right\} \cos \varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}$$

To se može pisati:

$$Y_{izl}(s) = M_{ul} \cdot M_G \cdot \cos(\omega t + \varphi_{ul} + \varphi_G)$$

Odnosno:

$$Y_{izl}(s) = M_{izl} \cdot \cos(\omega t + \varphi_{izl})$$

gdje je: $M_{izl} = M_{ul} \cdot M_G$ – izlazna amplituda $\varphi_{izl} = \varphi_{ul} + \varphi_G$ – izlazna faza

Prema tom došlo je do promjene amplitude i faze, kako slijedi:

$$M_G = |G(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$$

$$\varphi_G = \arctan \frac{V(\omega)}{U(\omega)}$$

Neka je npr. pojačalo zadano sljedećom prijenosnom funkcijom:

$$G(s) = \frac{k}{s + a}$$

gdje je: $k = 150$ i $a = 100$

Na ulazu se nalazi trigonometrijska funkcija:

$$y_{ul} = M_{ul} \cdot \cos(\omega t - \varphi_{ul})$$

gdje je: $M_{ul} = 5$, $\omega = 33,5 \text{ rad/s}$ i $\varphi_{ul} = 30^\circ$

Koji su paramteri izlaza iz sustava, kako je prikazano na slici 1.17 ?

$$y_{ul} = 5 \cdot \cos(33,5 \cdot t - 30^\circ)$$

$$Y_{izl}(s) = M_{ul} \cdot M_G \cdot \cos(\omega t + \varphi_{ul} + \varphi_G)$$



Sl. 1.17 – Odziv sustava na zadanu trigonometrijsku funkciju

Rješenje je sljedeće:

$$G(s = j\omega) = \frac{k}{a + j\omega}$$

Prijenosnu funkciju $G(s = j\omega)$ množimo s konjugirano – kompleksnim parom:

$$G(j\omega) = \frac{k}{a + j\omega} \cdot \frac{a - j\omega}{a - j\omega} = \frac{k \cdot a}{a^2 + \omega^2} - j \frac{k \cdot \omega}{a^2 + \omega^2}$$

Prema tome vrijedi za realni $U(\omega)$ i $V(\omega)$ imaginarni dio :

$$U(\omega) = \frac{k \cdot a}{a^2 + \omega^2}$$

$$V(\omega) = -\frac{k \cdot \omega}{a^2 + \omega^2}$$

Stoga je:

$$M_G = |G(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = \sqrt{\left(\frac{k \cdot a}{a^2 + \omega^2}\right)^2 + \left(\frac{k \cdot \omega}{a^2 + \omega^2}\right)^2} = \frac{k}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$$

Odnosno

$$\varphi_G = \arctan \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = \frac{-\frac{k \cdot \omega}{a^2 + \omega^2}}{\frac{k \cdot a}{a^2 + \omega^2}} = -\arctan \frac{\omega}{a}$$

Prema tome može se pisati:

$$Y_{izl}(s) = M_{ul} \cdot M_G \cdot \cos(\omega t + \varphi_{ul} + \varphi_G) = M_{ul} \cdot \frac{k}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \cdot \cos(\omega t + \varphi_{ul} - \arctan \frac{\omega}{a})$$

Za zadane podatke:

$$y_{ul} = M_{ul} \cdot \cos(\omega t - \varphi_{ul}) = 5 \cdot \cos(33,5 \cdot t - 30^\circ)$$

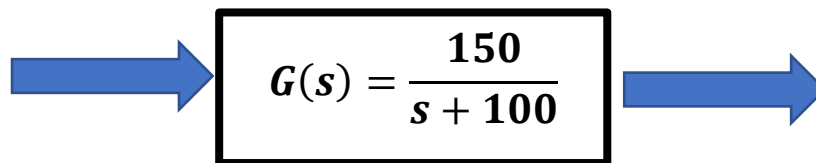
vrijedit će:

$$Y_{izl}(s) = M_{ul} \cdot \frac{k}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \cdot \cos(\omega t + \varphi_{ul} - \arctan \frac{\omega}{a})$$

Odnosno

$$\begin{aligned} Y_{izl}(s) &= 5 \cdot \frac{150}{\sqrt{100^2 + 150^2}} \cdot \cos(33,5 \cdot t - 30^\circ - \arctan \frac{33,5}{100}) \\ &= 7,11 \cdot \cos(33,5 \cdot t - 48,52^\circ) \end{aligned}$$

Shematski prikaz sa rješenjem dat je na slici 1.18 na kojoj se uočava amplitudno – fazna frekvencijska promjena:



$$y_{ul} = 5 \cdot \cos(33,5 \cdot t - 30^\circ)$$

$$y_{ul} = 7,11 \cdot \cos(33,5 \cdot t - 48,52^\circ)$$

Sl. 1.18 – Amplitudno – fazna frekvencijska promjena

Rješenje dato na slici 1.18 pokazuje kako je došlo do porasta amplitude signala sa 5 na 7,11 odnosno došlo je do promjene faznog pomaka sa 30° na $48,52^\circ$.

U nastavku će se prikazati postupak rješavanja zadatka pomoći MaLab-u te će se nacrtati usporedni dijagram ulza i izlaza iz sustav na kojem će se raspoznati prije navedene promjene amplitudno – fazne frekvencijske karakteristike.

Rješenje u MaLab-u bilo bi sljedeće, prikazano na slici 1.19.

```
'Zadano'
'Ulazni signal'
Mu1=5
om=33.5
fiul=30*pi/180
syms t
Yu1=Mu1*cos(om*t-fiul);
fplot(Yu1,[-0.5 0.5])
hold on

'Prijenosna funkcija'
k=150
a=100
G=tf(k,[1 a])

'Izlazni signal'
Yizl=Mu1*k/(sqrt(a^2+om^2))*cos(om*t-fiul-atan(om/a));
fplot(Yizl,[-0.5 0.5])
grid

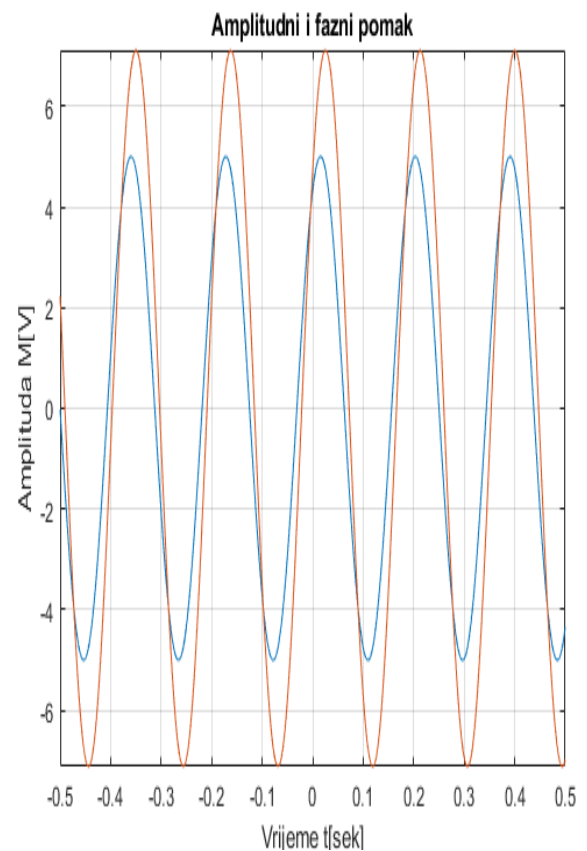
title('Amplitudni i fazni pomak')
xlabel('Vrijeme t[sek]')
ylabel('Amplituda M[V]')
```

```
ans = 'Zadano'
ans = 'Ulazni signal'
Mu1 = 5
om = 33.5000
fiul = 0.5236

ans = 'Prijenosna funkcija'
k = 150
a = 100
G =

    150
-----
s + 100

Continuous-time transfer function.
ans = 'Izlazni signal'
```



Sl. 1.19 - Odziv sustava na pobudu trigonometrijske funkcije

Bodeov dijagram

Bodeov dijagram dobio je ime po američkom inženjeru i znanstveniku Hendrik Wade Bode. Bio je pionir suvremene teorije regulacije i u cilju matematičke analize stabilnosti linearnih sustava automatizacije razvio je amplitudno-fazni frekvencijski dijagram u logaritamskom mjerilu koji je po njemu prozvan *Bodeov dijagram*.

Relacije za proračun i crtanje Bodevog dijagrama su sljedeće:

$$L(\omega) = 20 \log M_G = 20 \log |G(j\omega)| = 10 \log [U^2(\omega) + V^2(\omega)]$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{V(\omega)}{U(\omega)}$$

U nastavku će se objasniti primjena MatLaba u crtanju Bodeovog dijagrama odnosno određivanja stabilnosti sustava. Naime, kako je prijenosna funkcija zatvorenog kruga $G(s)$ jednaka:

$$G(s) = \frac{G_0(s)}{G_0(s) + 1}$$

gdje je: $G_0(s)$ – funkcija otvorenog kruga

tada vrijedi da je sustav stabilan ako je karakteristična jednadžba veća ili jednaka nuli tj. mora vrijediti:

$$G_0(s) + 1 \geq 0$$

odnosno granični slučaj je:

$$G_0(s = j\omega) = -1$$

Prema tome sustav je granično stabilan kada je:

$$U(\omega) = -1 \text{ i } V(\omega) = 0$$

U tom slučaju fazni kut iznosi:

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = \arctan \frac{0}{-1} = -180^\circ$$

Razvidno je da samo sustav trećeg i višeg reda može biti nestabilan kada se nalazi u zatvorenom krugu. Kako se elektromotorni pogon opisuje pozicijskom dinamičkom komponentom prvog i drugog reda, onda se može zaključiti kako takav regulacijski sustav može postati nestabilan.

Postavlja se pitanje o čemu ovisi stabilnost sustava i kako je moguće optimizirati takav regulacijski sustav tako da ostane stabilan?

Neka je npr. zadan sustav sljedećom prijenosnom funkcijom:

$$G(s) = \frac{k}{s^3 + a \cdot s^2 + b \cdot s + c} = \frac{k}{(s + s_1) \cdot (s + s_2) \cdot (s + s_3)}$$

Tada vrijedi:

$$G(j\omega) = \frac{k}{(s_1 + j\omega) \cdot (s_2 + j\omega) \cdot (s_3 + j\omega)}$$

Odnosno, ako prijenosnu funkciju pomnožimo s konjugirano-kompleksnim parom slijedi:

$$G(j\omega) = \frac{k \cdot (s_1 - j\omega) \cdot (s_2 - j\omega) \cdot (s_3 - j\omega)}{(s_1^2 + \omega^2) \cdot (s_2^2 + \omega^2) \cdot (s_3^2 + \omega^2)}$$

Sređivanjem dobijamo:

$$G(j\omega) = k \frac{s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 - \omega^2 \cdot (s_1 + s_2 + s_3)}{(s_1^2 + \omega^2) \cdot (s_2^2 + \omega^2) \cdot (s_3^2 + \omega^2)} + jk \frac{\omega^3 - \omega \cdot (s_1 \cdot s_2 + s_1 \cdot s_3 + s_2 \cdot s_3)}{(s_1^2 + \omega^2) \cdot (s_2^2 + \omega^2) \cdot (s_3^2 + \omega^2)}$$

Za granični uvijet stabilnosti $\varphi(\omega_{-\pi}) = -180^\circ$ i granično pojačanje k_{gr} vrijedi:

$$U(\omega_{-\pi}) = k_{gr} \frac{s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 - \omega_{-\pi}^2 \cdot (s_1 + s_2 + s_3)}{(s_1^2 + \omega_{-\pi}^2) \cdot (s_2^2 + \omega_{-\pi}^2) \cdot (s_3^2 + \omega_{-\pi}^2)} = -1$$

$$V(\omega_{-\pi}\omega) = k_{gr} \frac{\omega_{-\pi}^3 - \omega_{-\pi} \cdot (s_1 \cdot s_2 + s_1 \cdot s_3 + s_2 \cdot s_3)}{(s_1^2 + \omega_{-\pi}^2) \cdot (s_2^2 + \omega_{-\pi}^2) \cdot (s_3^2 + \omega_{-\pi}^2)} = 0$$

Prema tome vrijedi da su granično pojačanje k_{gr} i kružna frekvencija $\omega_{-\pi}$ jednaki:

$$k_{gr} = \frac{(s_1^2 + \omega_{-\pi}^2) \cdot (s_2^2 + \omega_{-\pi}^2) \cdot (s_3^2 + \omega_{-\pi}^2)}{|\omega_{-\pi}^2 \cdot (s_1 + s_2 + s_3) - s_1 \cdot s_2 \cdot s_3|}$$

$$\omega_{-\pi} = \sqrt{s_1 \cdot s_2 + s_1 \cdot s_3 + s_2 \cdot s_3}$$

Neka su zadani sljeći polovi sustava: $s_1 = -1$, $s_2 = -2$ i $s_3 = -3$, tada kružna frekvencija $\omega_{-\pi}$ iznosi:

$$\omega_{-\pi} = \sqrt{s_1 \cdot s_2 + s_1 \cdot s_3 + s_2 \cdot s_3} = \sqrt{2 + 3 + 6} = \sqrt{11} = 3,316 \text{ rad/sek}$$

Granično pojačanje iznosi:

$$k_{gr} = \frac{(s_1^2 + \omega_{-\pi}^2) \cdot (s_2^2 + \omega_{-\pi}^2) \cdot (s_3^2 + \omega_{-\pi}^2)}{|\omega_{-\pi}^2 \cdot (s_1 + s_2 + s_3) - s_1 \cdot s_2 \cdot s_3|} = \frac{(1 + 11) \cdot (4 + 11) \cdot (9 + 11)}{|11 \cdot (-6) + 6|} = 60$$

Odnosno u deciblima:

$$L_{gr} = 20 \cdot \log k_{gr} = 20 \cdot \log 60 = 35,56dB$$

Prema tome prijenosna funkcija otvorenog kruga $G_0(s)$ iznosi:

$$G_0(s) = \frac{60}{(s+1) \cdot (s+2) \cdot (s+3)}$$

Kada se nađe u zatvorenom krugu s jedinačnom negativnom povratnom vezom čije je prijenosna funkcij $T(s)$, sustav postaje granično stabilan na pobudu step funkcijom.

$$T(s) = \frac{G_0(s)}{G_0(s) + 1} = \frac{60}{(s+6) \cdot (s+11)}$$

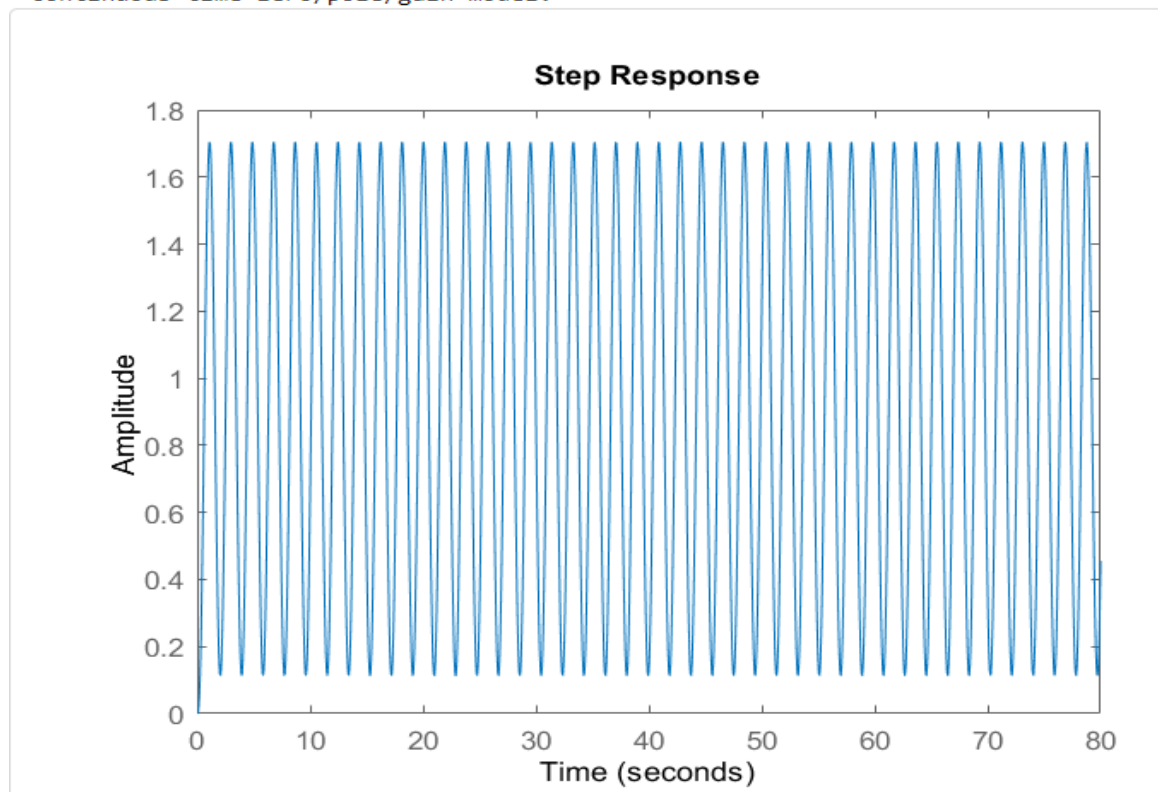
To pokazuje i MatLab rješenje, prikazano na slici 1.20.

```
Continuous-time zero/pole/gain model.
```

```
T =
```

$$\frac{60}{(s+6)(s^2+11)}$$

```
Continuous-time zero/pole/gain model.
```



Sl. 1.20 – Granično stabilan sustav

Ako se pojačanje poveća sa 60 na 61, tada sustav postaje nestabilan kako prikazuje sljedeće MatLab rješenje na slici 1.21.

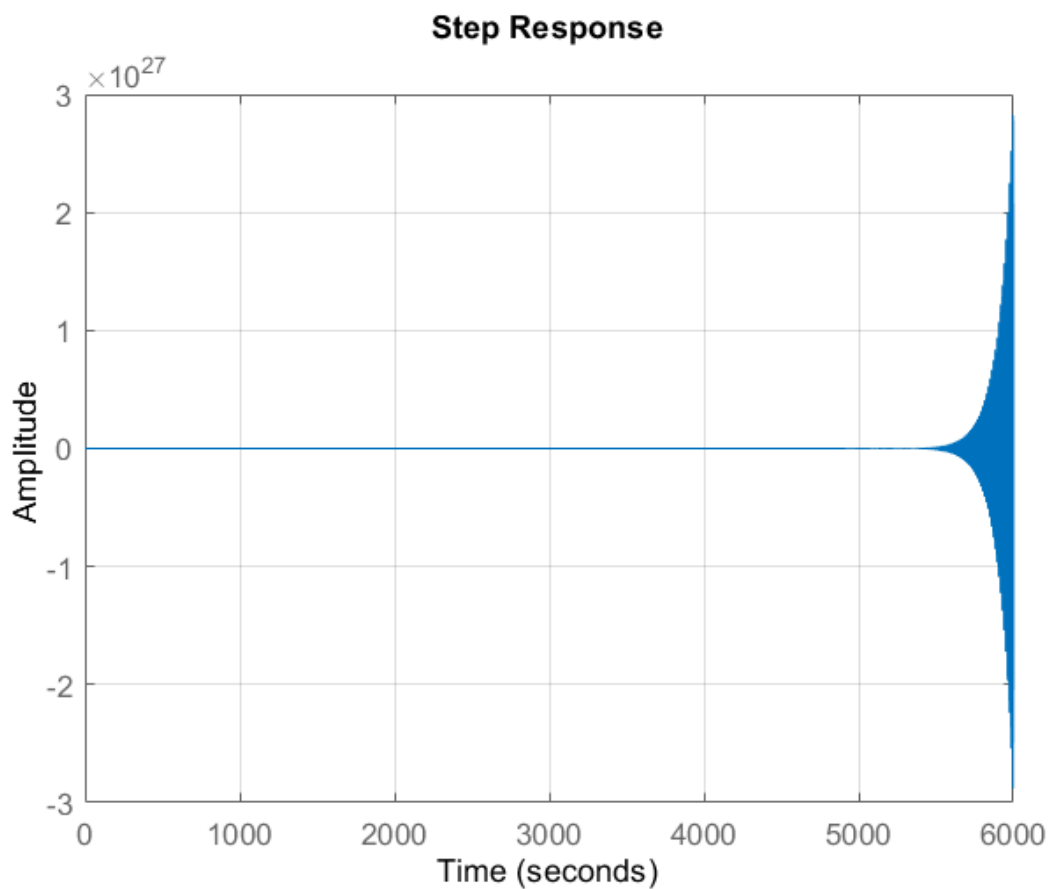
Continuous-time zero/pole/gain model.

T =

```

          61
-----
(s+6.021) (s^2 - 0.02116s + 11.13)
    
```

Continuous-time zero/pole/gain model.



Sl. 1.21 – Nestabilan sustav

Amplitudne frekvencijska karakteristika $L(\omega)$ bila bi sljedeća:

$$L(\omega) = 10 \log[U^2(\omega) + V^2(\omega)]$$

$$L(\omega) = 10 \log \left\{ \left[k \frac{s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 - \omega^2 \cdot (s_1 + s_2 + s_3)}{(s_1^2 + \omega^2) \cdot (s_2^2 + \omega^2) \cdot (s_3^2 + \omega^2)} \right]^2 + \left[k \frac{\omega^3 - \omega(s_1 \cdot s_2 + s_1 \cdot s_3 + s_2 \cdot s_3)}{(s_1^2 + \omega^2) \cdot (s_2^2 + \omega^2) \cdot (s_3^2 + \omega^2)} \right]^2 \right\}$$

Odnosno vrijedi:

$$L(\omega) = 20 \log k + 10 \log \left\{ \left[\frac{s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 - \omega^2 \cdot (s_1 + s_2 + s_3)}{(s_1^2 + \omega^2) \cdot (s_2^2 + \omega^2) \cdot (s_3^2 + \omega^2)} \right]^2 + \left[\frac{\omega^3 - \omega(s_1 \cdot s_2 + s_1 \cdot s_3 + s_2 \cdot s_3)}{(s_1^2 + \omega^2) \cdot (s_2^2 + \omega^2) \cdot (s_3^2 + \omega^2)} \right]^2 \right\}$$

Daljim sređivanjem dobija se:

$$L(\omega) = 20 \log k + 10 \log \{ [s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 - \omega^2 \cdot (s_1 + s_2 + s_3)]^2 - [\omega^3 - \omega(s_1 \cdot s_2 + s_1 \cdot s_3 + s_2 \cdot s_3)]^2 \} - 20 \log [(s_1^2 + \omega^2) \cdot (s_2^2 + \omega^2) \cdot (s_3^2 + \omega^2)]$$

Uvrsti li se vrijednosti polova, slijedi:

$$L(\omega) = 20 \log k + 10 \log \{ [-6 + \omega^2 \cdot 6]^2 - [\omega^3 - \omega \cdot 11]^2 \} - 20 \log [(1 + \omega^2) \cdot (4 + \omega^2) \cdot (9 + \omega^2)]$$

odnosno

$$L(\omega) = 20 \log k + 10 \log (58 \cdot \omega^4 + 36 - \omega^6 - 183 \cdot \omega^2) - 20 \log [(s_1^2 + \omega^2) \cdot (s_2^2 + \omega^2) \cdot (s_3^2 + \omega^2)]$$

Fazna frekvencijska karakteristika $\varphi(\omega)$ bila bi sljedeća:

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = \frac{k \frac{\omega^3 - \omega(s_1 \cdot s_2 + s_1 \cdot s_3 + s_2 \cdot s_3)}{(s_1^2 + \omega^2) \cdot (s_2^2 + \omega^2) \cdot (s_3^2 + \omega^2)}}{k \frac{s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 - \omega^2 \cdot (s_1 + s_2 + s_3)}{(s_1^2 + \omega^2) \cdot (s_2^2 + \omega^2) \cdot (s_3^2 + \omega^2)}}$$

odnosno

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{\omega^3 - \omega(s_1 \cdot s_2 + s_1 \cdot s_3 + s_2 \cdot s_3)}{s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 - \omega^2 \cdot (s_1 + s_2 + s_3)}$$

Uvrsti li se vrijednosti polova, slijedi:

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{\omega^3 - \omega \cdot 11}{-6 + \omega^2 \cdot 6}\right) = \arctan\left(\frac{\omega}{6} \cdot \frac{\omega^2 - 11}{\omega^2 - 1}\right)$$

I u ovom slučaju, kako je i prethodno pokazano, za kut $\varphi = 180^\circ$ vrijednost kružne frekvencije iznosi:

$$\omega^2 - 11 = 0 \rightarrow \omega_{-\pi} = \sqrt{11} = 3,316 \text{ rad/sek}$$

Granično pojačanje $L_{gr}(\omega_{-\pi})$ u decibelima može se izračunata izjednačavanjem sa nulom:

$$\begin{aligned} L(\omega) &= 20 \log k_{gr} \\ &+ 10 \log(58 \cdot 11^2 + 36 - 11^3 - 183 \cdot 11) \\ &- 20 \log[(1 + 11) \cdot (4 + 11) \cdot (9 + 11)] = 0 \end{aligned}$$

Slijedi:

$$\begin{aligned} L_{gr}(\omega_{-\pi}) &= 20 \log k_{gr} = \\ &- 10 \log(58 \cdot 11^2 + 36 - 11^3 - 183 \cdot 11) \\ &+ 20 \log[(1 + 11) \cdot (4 + 11) \cdot (9 + 11)] = 35,56 \text{ dB} \end{aligned}$$

Odnosno granično pojačanje k_{gr} iznosi :

$$k_{gr} = 10^{\frac{L_{gr}(\omega_{-\pi})}{20}} = 10^{\frac{35,56}{20}} = 59,9791 \cong 60$$

Pri čemu je:

$$\omega_{-\pi} = 3,316 \text{ rad/sek}$$

Prema tome, potvrđen je rezultat određen prijenosnom funkcijom u zatvorenom krugu:

$$T(s) = \frac{G_0(s)}{G_0(s) + 1} = \frac{60}{(s + 6) \cdot (s + 11)}$$

Na temelju prije navedenoga može se zaključiti kako se pomoću amplitudno-fazne frekvencijske karakteristike odnosno Bodeovog dijagrama može odrediti granično pojačanje sustava k_{gr} nakon kojeg sustav postaje nestabilan.

MatLab rješenje prikazano je na slici 1.22

```
'Bodeov dijagram'
```

```
k=1
```

```
G=zpk([],[-1 -2 -3],k)
```

```
margin(G)
```

```
grid
```

```
ans = 'Bodeov dijagram'
```

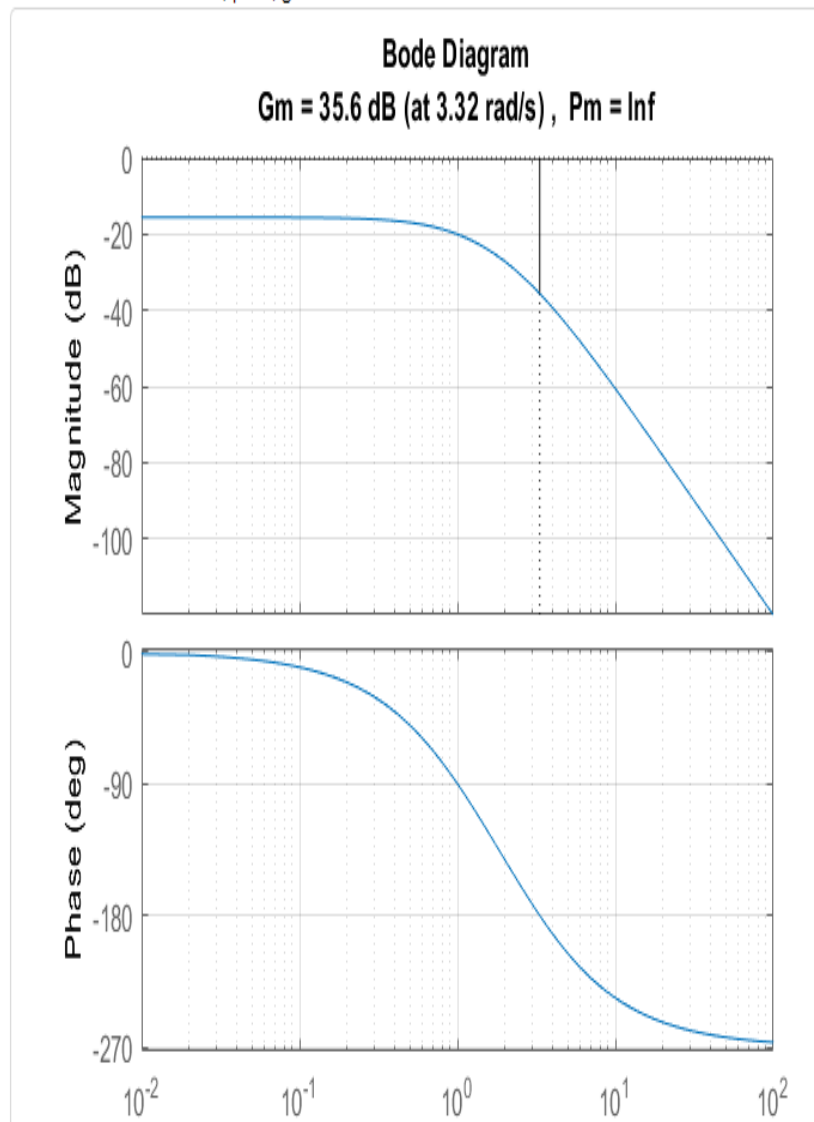
```
k = 1
```

```
G =
```

```
1
```

```
-----  
(s+1) (s+2) (s+3)
```

Continuous-time zero/pole/gain model.



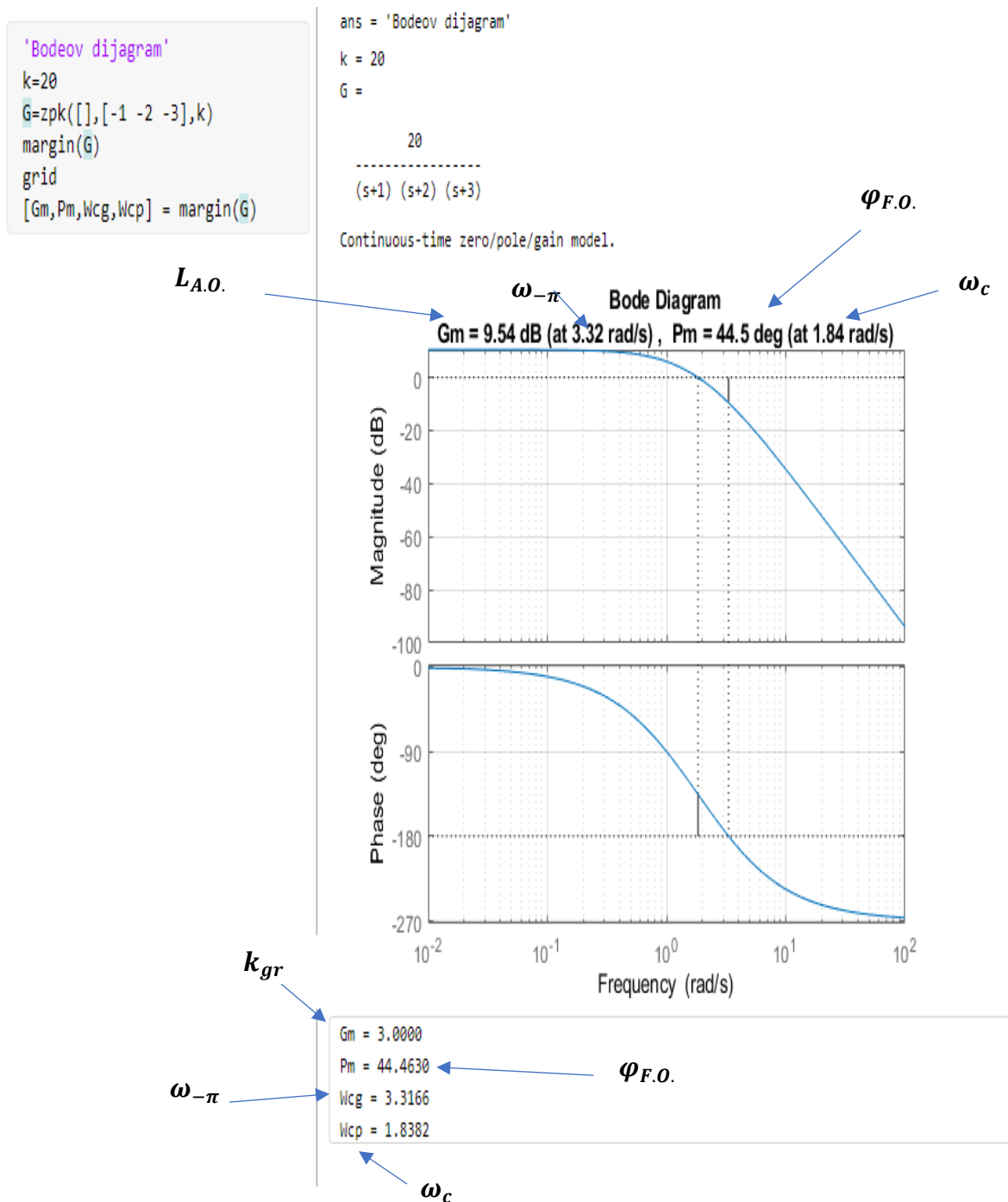
Sl. 1.22 - Bodeov dijagram – granično pojačanje

U slučaju kada sustav već ima određeno pojačanje, kako pokazuje sljedeća prijenosna funkcija:

$$G_0(s) = \frac{20}{(s + 1) \cdot (s + 2) \cdot (s + 3)}$$

tada Bodeov dijagram pokazuje razliku pojačanja do graničnog pojačanja ($L_{A.O.}$ – amplitudno osiguranje) i razliku faze do -180° ($\varphi_{F.O.}$ – fazno osiguranje).

MatLab rješenje prikazano je na slici 1.23.



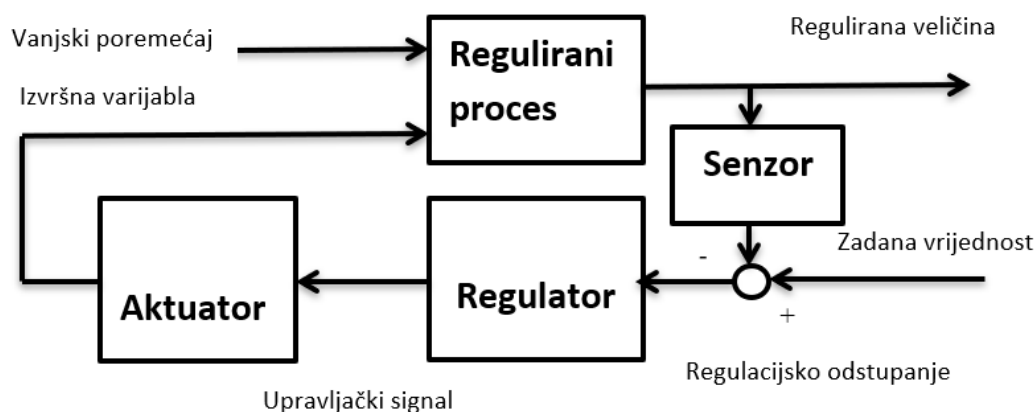
Sl. 1.23 – Bodeov dijagram – amplitudno i fazno osiguranje

1.8 Regulacija sustava

Informacije o vrijednostima pojedinih fizikalnih veličina u tehnološkom procesu pretvorbe i prijenosa energije i tvari dobivaju se mjerenjem putem senzora. Takve izlazne veličine iz senzora nazivaju se mjerene varijable (eng. *measured variables*), stoga se može reći da senzor i pridruženi mjerni uređaji pretvaraju različite fizikalne veličine (pomak, brzinu, protok, tlak, silu, moment, temperaturu, i sl.) u odgovarajuću električnu veličinu (signal) važnu za regulaciju procesa. Obzirom na fizikalnu veličinu koju pretvaraju u električni signal definiraju se tipovi i svojstva senzora, odnosno modulacija signala, statička točnost, dinamika ponašanja, vlastiti šum, galvanско odvojenje, pretvorba signala i povezanost s digitalnim uređajim. Gledajući na ukupna dinamička svojstva razlikuju se dvije karakteristične strukture regulacije procesa: otvoreni i zatvoreni sustav. U prvom slučaju ulazi su neovisni od ulaza, dok u drugom slučaju izlaz posredno djeluje sam na sebe. Ako je s obzirom na priorodu i svrhu procesa važno da vrijednost neke od fizikalnih veličina bude što bliža nekoj zadanoj vrijednosti, onda je takvu veličinu potrebno regulirati i u procesu ona ima ulogu regulirane veličine $r(t)$. Razliku između zadane i stvarne vrijednosti regulirane veličine nazivamo regulacijskim odstupanjem $e(t)$, i svrha regulacije je regulacijsko odstupanje tijekom vremena održavati što manjim i svakako unutar granica normalnog odvijanja procesa. Kako bi se regulacija ostvarila nužan uvjet je da između procesa i njegove okoline postoji barem jedno dovoljno snažno djelovanje čijim se intenzitetom može tijekom vremena održavati regulacijsko odstupanje unutar prihvatljivih granica tj. granica normalnog odvijanja procesa. Tehničko sredstvo kojim se ostvaruje takvo dovoljno snažno djelovanje na sustav odnosno njegova regulacija naziva se izvršni uređaj ili aktuator (eng. *actuator*). Aktuator kao izvršni uređaj pretvara regulacijsku informaciju u odgovarajući intezitet djelovanja, zato se ulazna varijabla aktuatora naziva izvršna varijabla (eng. *manipulated variable*). Kako je problem regulacije zapravo problem dinamike sustava, u tehničkoj se praksi primjenjuje:

- regulacija povratnom vezom (eng. *feed-back control*),
- regulacija unaprijednim vođenjem (eng. *feed-forward control*)

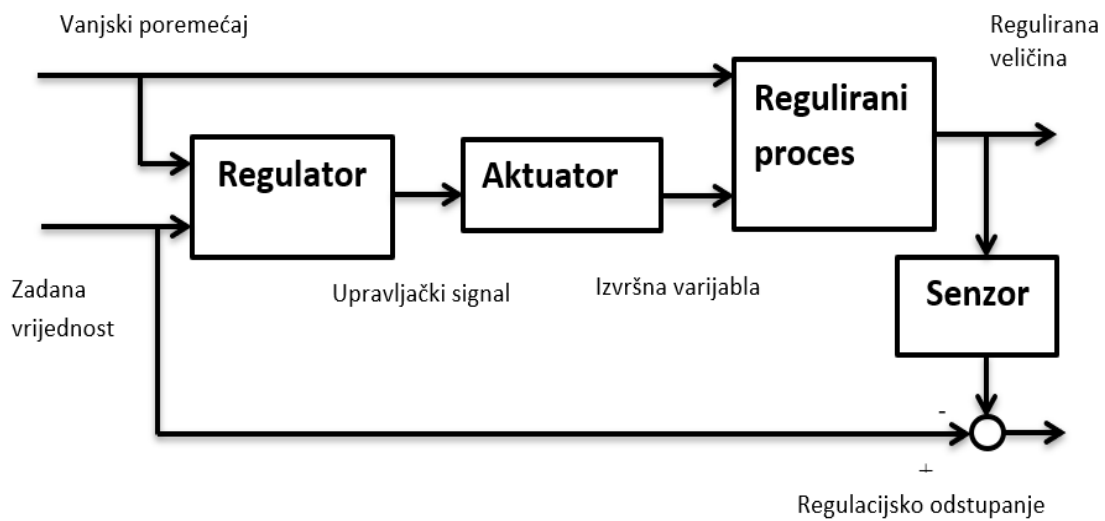
ili njihova kombinacija. Najjednostavniji oblik regulacije povratnom vezom je regulacijski krug prikazan na slici 1.24. Regulator upravlja aktuatorom kao izvršnim uređajem na temelju informacije o regulacijskom odstupanju koje nastaje kao razlika informacije o zadanoj vrijednosti i stvarnoj vrijednosti regulirane veličine.



Sl. 1.24 - Regulacija povratnom vezom

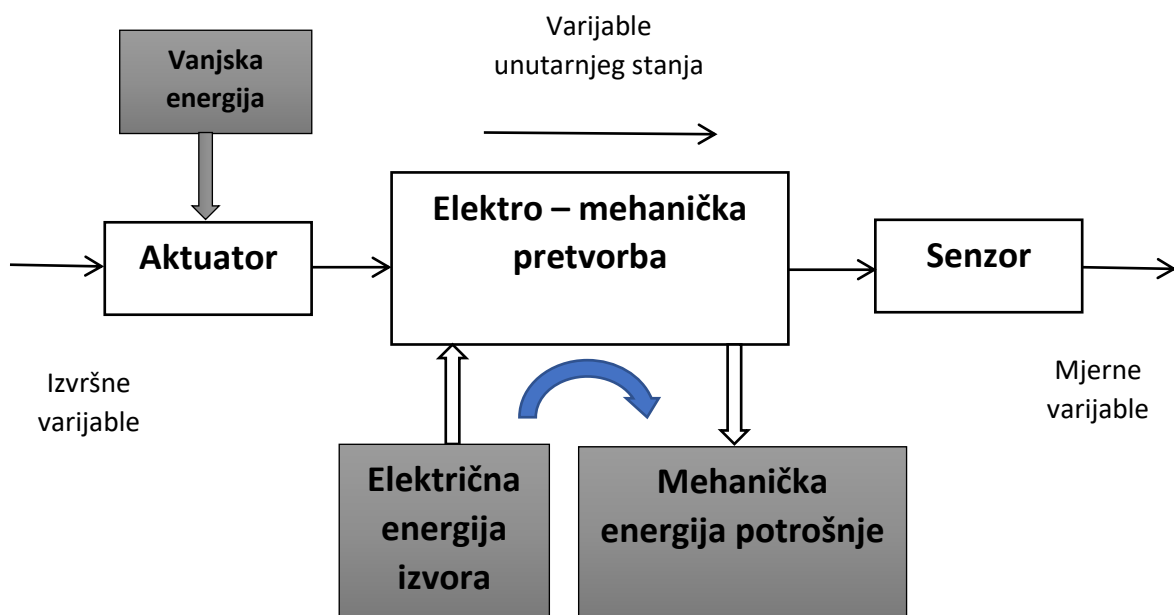
Informacija o stvarnoj vrijednosti regulirane veličine dobija se njenim mjerenjem, a informacija o zadanoj vrijednosti može biti pohranjena u memoriju regulatora ili se u regulator dovodi putem sučelja. Kako se radi o zatvorenom dinamičkom sustavu, bez obzira što svi njegovi elementi mogu biti stabilni, isti može pod određenim uvjetim postati nestabilan stoga je potrebno optimizirati njegovu prijelaznu karakteristiku i odrediti granice stabilnosti procesa. Negativan povratna veza ima i svoje nedostatke, a to je činjenica da regulator djeluje na proces tek nakon pojave regulacijskog odstupanja bez obzira je li ono izazvano djelovanjem vanjskog poremećaja na proces ili je rezultat promjene zadane vrijednosti regulirane veličine: Pojednostavljeno, bez neželjenog regulacijskog odstupanja regulator nemože putem aktuatora djelovati na regulirani proces i ispraviti odstupanje. Pozitivno svojstvo regulacije povratom vezom je činjenica da regulator putem aktuatora djeluje na proces u smislu otklanjanja regulacijskog odstupanja bez obzira na uzrok njegova nastajanja, stoga ona predstavlja temeljni oblik regulacije koji se može nadopuniti ostalim oblicima regulacije kao što je unaprijedno vođenje koje upravljački signal generira na temelju informacije o vanjskom poremećaju i eventualne promjene zadane vrijednosti regulirane veličine. Blok shema unaprijednog vođenja prikazana je na slici 1.25.

U realnim uvjetima, primjena unaprijednog vođenja kao temeljnog načina regulacije ne pruža zadovoljavajuću djelotvornost regulacije zbog ograničene točnosti informacija na temelju kojih se generira upravljački signal i ograničene pretvorbe tog signala u odgovarajući intenzitet upravljačkog signala. Stoga se isti koristi za regulaciju dinamički jednostavnijih i sa stanovišta točnosti manje zahtjevnih procesa, ili u kombinaciji s regulacijskim krugom sa povratnom vezom.



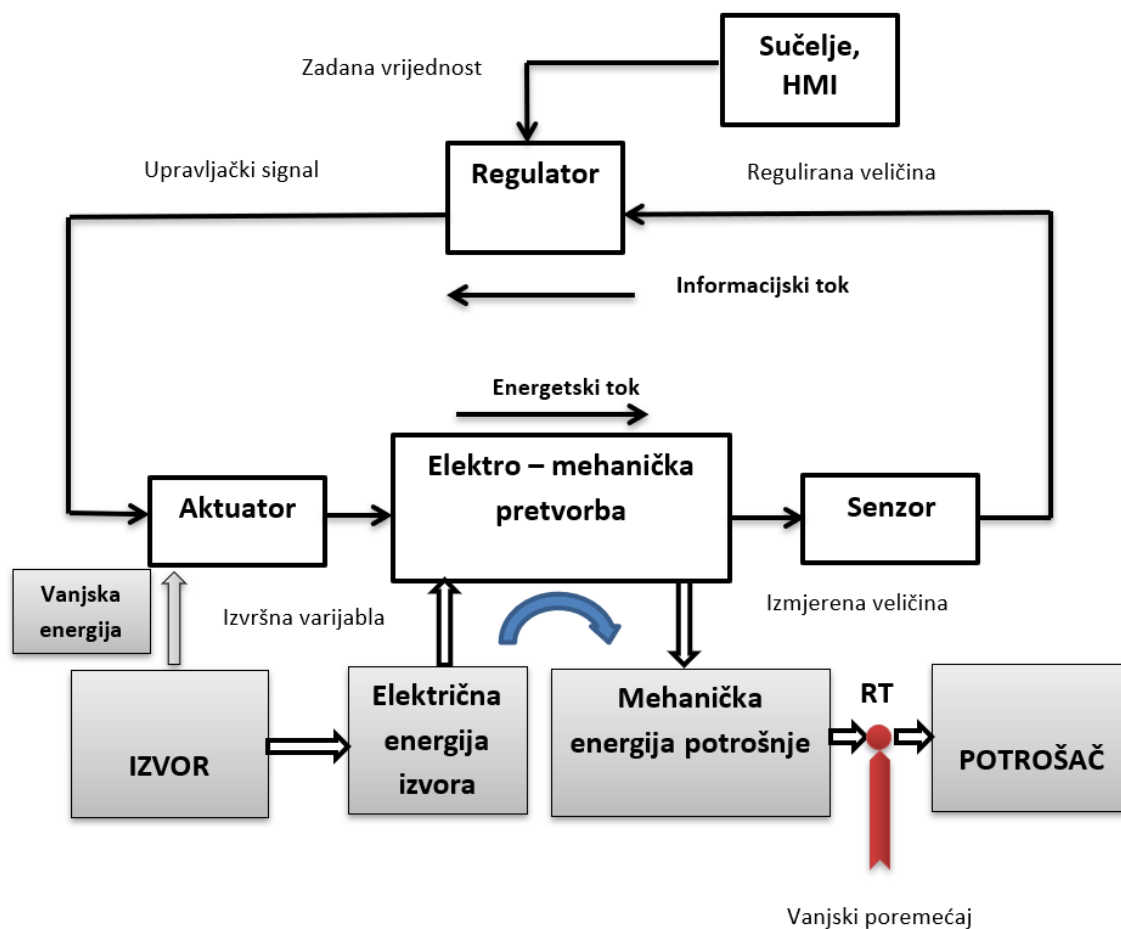
1.25 - Regulacija unaprijednim vođenjem

Važno je naglasiti da regulirani proces i regulator čine takvu funkcionalnu cjelinu koja se ponaša kao jedinstveni dinamički sustav, bez obzira je li se međusobne interakcije ostvaruju izravnim djelovanjem fizikalnih veličina unutarnjeg stanja ili tokovima informacija i algoritmima njihove pretvorbe. Rješavanje problema automatske regulacije nekog procesa u osnovi se svodi na iznalaženje takve strukture regulatora i njegove tehnološke izvedbe koja omogućuje programiranje jednostavnih algoritama obrade i pretvorbe informacija, pa do vrlo složenih kada se koristi jedno ili više ugrađenih računala. U konkretnom slučaju regulacije elektro-mehaničke pretvorbe blok shema otvorenog sustava prikazana je na slici 1.26



Sl. 1.26 – Regulacija elektro-mehaničke pretvorbe u otvorenom krugu

Na slici 1.27 prikazana je blok shema zatvorenog sustava regulacije s negativnom povratnom vezom.



Sl. 1.27 - Regulacija elektro-mehaničke pretvorbe u zatvorenom krugu

Kao regulator najčešće se koristi regulator PIDF strukture, a inženjeriski alat rješavanje problema regulacije je matematičko modeliranje i računalna simulacija bazirana na teoriji linearnih dinamičkih sustava i teoriji regulacije (eng. *Control Theory*).

Regulacija tehničkih sustava u najvećem broju slučajeva, kako je prethodno navedeno, provodi se PIDF regulatorima (Proporcionalno-Integracijsko-Derivacijski regulator s filterom prvog reda na derivacijskom vremenu, PIDF³) kao najpoznatijim i najviše korištenim regulatorima. Jednostavni su za korištenje, ali njihovom uporabom mogu riješiti i složeni upravljački problemi. Prvi PIDF regulatori razvijeni su u kontinuiranom području, dok se danas uglavno implementiraju u digitalnoj formi.

³ Proportional, integral, and derivative with first-order filter on derivative term

Prikazi PIDF regulatora

Proporcionalno-integralno-derivacijski s filterom prvog reda na derivacijskom vremenu (PIDF) regulator u kontinuiranom vremenskom području možete opisati u paralelnom ili standardnom obliku. Ova dva oblika razlikuju po parametrima koji se koriste za izražavanje proporcionalnih, integralnih i derivacijskih komponenti, ako i komponente filtera. PIDF regulatori mogu se definirati kroz stupnjeve slobode, i to: PIDF regulator s jednim stupnjem slobode (1-DOF⁴ Controllers), PIDF regulator s dva stupnja slobode (2-DOF Controllers) i PIDF regulatori s dva stupnja slobode i fiksnim ponderom zadane vrijednosti (2-DOF Controllers with Fixed Setpoint Weight). U prikazu PIDF regulatora koristit će se zapis iz MatLaba kako bi se olakšalo buduće korištenja MatLab rutina i simulacija u optimizaciji parametara regulatora.

Kontinuirano područje (1-DOF)

Prijenosna funkcija PIDF regulatora s jednim stupnjem slobode u paralelnoj formi bila bi sljedeća:

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + \frac{K_d \cdot s}{T_f \cdot s + 1}$$

gdje je:

K_p – proporcionalno pojačanje (Proportional gain)

K_i – integralno pojačanje (Integral gain)

K_d – derivacijsko pojačanje (Derivate gain)

T_f – vremenska konstanta derivacijskog filtera prvog reda kod kauzalnog (fiziklano ostvarivog) derivatora (Time constant of the first-order derivative filter)

Prijenosna funkcija PIDF regulatora s jednim stupnjem slobode u standardnom obliku bila bi sljedeća:

$$C(s) = K_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + \frac{T_d \cdot s}{\frac{T_d}{N} \cdot s + 1} \right)$$

Gdje je:

K_p – proporcionalno pojačanje (Proportional gain)

T_i – integralna vremenska konstanta (Integral time)

T_d – derivacijska vremenska konstanta (Derivate time)

⁴ Degree of Freedoms

$N = 3$ do 20 – ograničava pojačanja derivacijskog ponašanja na višim frekvencijama kod kauzalnog (fizikalno ostvarivog) derivatora (Filter divisor)

MatLab rutina za konfiguriranje prijenosne funkcije paralelnog i standardnog tipa PIDF regulatora glase:

```
'Forme PID regulatora'
C = pid(Kp,Ki,Kd,Tf) % Paralelna forma
C = pidstd(Kp,Ti,Td,N) % Standardna forma
```

Diskretno područje (1-DOF)

Tranformacija iz kontinuiranog u diskretno područja provodi se na temelju slijedeće relacije za izračun prijenosne funkcije u z -domeni:

$$C(z) = K_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i} \cdot IF(z) + \frac{T_d}{\frac{T_d}{N} + DF(z)}\right)$$

Gdje je:

$IF(z)$ – formula za transformaciju integralnog člana u z - domenu

$DF(z)$ – formula za transformaciju derivacijskog člana u z -domenu

U diskretnom području sustav automatske regulacije opisuje se nehomogenim linearnim jednažbama diferencije. Određivanje odziva sustava svodi se na problem rješavanja jednadžbi diferencija kojima je opisan diskretni sustav modelom ulazno – izlaznih varijabli. Kao što se u slučaju kontinuiranih sustava i linearnih nehomogenih diferencijalnih jednadžbi s konstantnim koeficijentima koristi L – transformacija, tako se u slučaju diskretnih sustava koji su opisani nehomogenim linearnim jednadžbama diferencije koristi Z – transformacija. Opća relacija za Z – transformaciju glasi:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k \cdot T) \cdot z^{-k}$$

Gdje je:

$z = e^{T \cdot s}$ i T – vrijeme diskretizacije ili uzorkovanja kontinuiranog signala (engl. *Sample time*)

Često se u literaturi konkretno vrijeme diskretizacije ili uzorkovanja kontinuiranog signala označava sa T_s . Formule $IF(z)$ i $DF(z)$ mogu poprimiti tri oblika transformacije i to:

- unaprijednu Eulerovu transformaciju (engl. *Forward Euler Transform*), gdje je:

$$IF(z) = DF(z) = \frac{T_s}{z - 1}$$

- unazadnu Eulerovu transformaciju (engl. *Backward Euler Transform*)

$$IF(z) = DF(z) = \frac{T_s \cdot z}{z - 1}$$

- trapezoidnu transformaciju (engl. *Trapezoidal or Tustin transform*)

$$IF(z) = DF(z) = \frac{T_s}{2} \cdot \frac{z + 1}{z - 1}$$

Unaprijedna Eulerova transformacija „*Forward Euler*“ koristi se kada je vrijeme uzorkovanja „malo“ u odnosu na propusno frekvencijsko područje regulatora (engl. *Bandwith, BW*). Naime, temeljem teorema uzrokovanja signala Nyquistova kružna frekvencija glasi:

$$\omega_s \geq 2 \cdot \omega_{max}$$

Gdje je:

ω_s – kružna frekvencija uzorkovanja [rad/sek]

ω_{max} – maksimalna kružna frekvencija signala [rad/sek]

U ovom slučaju vrijedi da je:

$$\omega_s \gg \omega_{BW}$$

Za „veće“ vrijeme uzorkovanja tj. ako nije prisutan prethodno utvrđeni zahtjev, Forward Eulerova formula može rezultirati nestabilnošću - čak i slučaju kada je sustav u kontinuiranom području stabilna, spomenuta transformacija može rezultirati nestabilnim diskretnim sustavom.

Unazadnu Eulerova transformacija „*Backward Euler Transform*“ uvijek daje stabilan diskretni sustav ako je on bio stabilan u kontinuiranom području. Prednost trapezoidne transformacije „*Trapezoidal*“ je s jedne strane da, kao i u slučaju nazadne Eulerove transformacije „*Backward Euler Transform*“ uvijek daje stabilan sustav u diskretnom područja, ali s druge strane od svih dostupnih integracijskih formula, Trapezoidna formula daje najbližu podudarnost između svojstava frekvencijske domene diskretiziranog sustava i odgovarajućeg sustava kontinuiranog vremena. Treba još naglasiti da trapezoidna vrijednost za DFormulu nije dostupna za *pidstd* regulator bez derivacijskog filtra (*N*).

Zadavanje PIDF regulatora u „s“ u „z“ područje provodi se na sljedeći način:

```
'Parametri regulatora'
```

```
Kp=1
Ti=0.5
Td=0.1
N=10
Ts=0.01
```

```
'Prijenosne funkcije regulatora'
```

```
C = pidstd(Kp,Ti,Td,N)
C1 = pidstd(Kp,Ti,Td,N,Ts,'IFormula','ForwardEuler')
C2 = pidstd(Kp,Ti,Td,N,Ts,'IFormula','BackwardEuler')
C3 = pidstd(Kp,Ti,Td,N,Ts,'IFormula','Trapezoidal')
```

```
ans = 'Parametri regulatora'
```

```
Kp = 1
Ti = 0.5000
Td = 0.1000
N = 10
Ts = 0.0100
ans = 'Prijenosne funkcije regulatora'
```

```
C =
```

$$K_p * \left(1 + \frac{1}{T_i} * \frac{1}{s} + T_d * \frac{s}{(T_d/N)*s+1} \right)$$

```
with Kp = 1, Ti = 0.5, Td = 0.1, N = 10
```

Continuous-time PIDF controller in standard form

```
C1 =
```

$$K_p * \left(1 + \frac{T_s}{T_i} * \frac{1}{z-1} + T_d * \frac{1}{(T_d/N)+T_s/(z-1)} \right)$$

```
with Kp = 1, Ti = 0.5, Td = 0.1, N = 10, Ts = 0.01
```

Sample time: 0.01 seconds

Discrete-time PIDF controller in standard form

```
C2 =
```

$$K_p * \left(1 + \frac{T_s*z}{T_i} * \frac{1}{z-1} + T_d * \frac{1}{(T_d/N)+T_s/(z-1)} \right)$$

```
with Kp = 1, Ti = 0.5, Td = 0.1, N = 10, Ts = 0.01
```

Sample time: 0.01 seconds

Discrete-time PIDF controller in standard form

```
C3 =
```

$$K_p * \left(1 + \frac{T_s*(z+1)}{T_i} * \frac{1}{2*(z-1)} + T_d * \frac{1}{(T_d/N)+T_s/(z-1)} \right)$$

```
with Kp = 1, Ti = 0.5, Td = 0.1, N = 10, Ts = 0.01
```

Sample time: 0.01 seconds

Discrete-time PIDF controller in standard form

Transformacija PIDF regulatora iz „s“ u „z“ područje povodi se na sljedeći način:

```
'PIDF regulator u kontinuiranom području'
Cc = pidstd(1,2,3,4)
```

```
'PIDF regulator u diskretnom području'
Cd1 = c2d(Cc,0.1,'zoh') %ForwardEuler
```

```
Cd2 = Cc;
Cd2.Ts = 0.1;
Cd2.IFormula = 'BackwardEuler'
```

```
Cd3 = Cc;
Cd3.Ts = 0.1;
Cd3.IFormula = 'Trapezoidal'
```

```
ans = 'PIDF regulator u kontinuiranom području'
```

```
Cc =
```

$$K_p * \left(1 + \frac{1}{T_i} * \frac{1}{s} + T_d * \frac{s}{(T_d/N)*s+1} \right)$$

```
with Kp = 1, Ti = 2, Td = 3, N = 4
```

Continuous-time PIDF controller in standard form

```
ans = 'PIDF regulator u diskretnom području'
```

```
Cd1 =
```

$$K_p * \left(1 + \frac{1}{T_i} * \frac{T_s}{z-1} + T_d * \frac{1}{(T_d/N)+T_s/(z-1)} \right)$$

```
with Kp = 1, Ti = 2, Td = 3.2, N = 4, Ts = 0.1
```

Sample time: 0.1 seconds

Discrete-time PIDF controller in standard form

```
Cd2 =
```

$$K_p * \left(1 + \frac{1}{T_i} * \frac{T_s * z}{z-1} + T_d * \frac{1}{(T_d/N)+T_s/(z-1)} \right)$$

```
with Kp = 1, Ti = 2, Td = 3, N = 4, Ts = 0.1
```

Sample time: 0.1 seconds

Discrete-time PIDF controller in standard form

```
Cd3 =
```

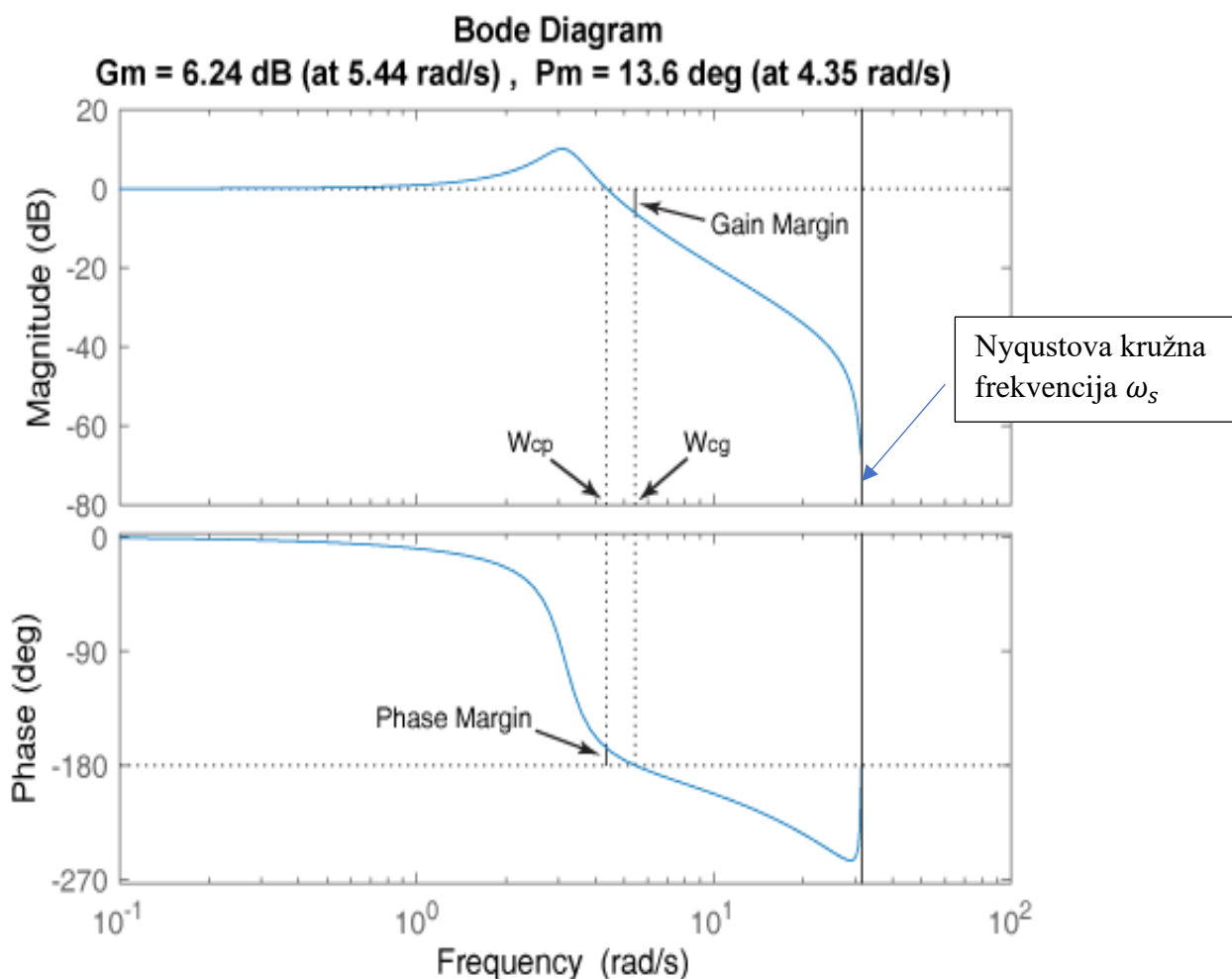
$$K_p * \left(1 + \frac{1}{T_i} * \frac{T_s * (z+1)}{2 * (z-1)} + T_d * \frac{1}{(T_d/N)+T_s/(z-1)} \right)$$

Podešavanje PIDF regulatora

Tri su ključna cilja pri podešavanju PIDF regulatora:

- osigurati stabilnost sustava u zatvorenom krugu (zatvorena petlja)
- osigurati odgovarajuće karakteristike sustava (odziv sustava)
- osigurati odgovarajuća robusnost

MathWorks® algoritam za podešavanje PIDF regulatora nastoji postići ravnotežu između stabilnosti, karakteristika i robusnosti sustava. Algoritam određuje kružnu frekvenciju presjeka ω_c (Crossover frequency), u MatLabu označenu kao frekvenciju W_{cp} kako je prikazano na slici 1.28.



Sl. 1.28 –Bodeov dijagram u diskretnom području

gdje je:

$$L_{A.O.} = -G_m - \text{amplitudno osiguranje (Gain Margin, Gm)}$$

$$\varphi_{F.O.} = P_m - \text{fazno osiguranje (Phase Margine, Pm)}.$$

Na temelju dinamike sustava (procesa ili postrojenja) dizajniraju se parametri regulatora (K_p, T_i, T_d i N) tako da standardno fazno osiguranje iznosi $\varphi_{F.O.} = 60^\circ$ za izabranu kružnu frekvenciju $\omega_c = W_{cp}$.

Neka je općenito zadan sustav opisan sljedećom prijenosnom funkcijom:

$$G(s) = \frac{k}{s^3 + a \cdot s^2 + b \cdot s + c} = \frac{k}{(s + s_1) \cdot (s + s_2) \cdot (s + s_3)}$$

I neka se isti u zatvorenoj petlji regulira PI regulatorom čija je prijenosna funkcija jednaka:

$$C(s) = k_p + k_i \cdot \frac{1}{s} = k_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s}\right)$$

Kako je sustav opisan pomoću polova s_1, s_2 i s_3 , na jednaki će se način trenasformirati prijenosna funkcija PI regulatora:

$$C(s) = k_p + k_i \cdot \frac{1}{s} = k_p \frac{s + \frac{k_i}{k_p}}{s} = k_p \frac{s + s_r}{s}$$

Prijenosna funkcija otvorenog sustava glasi:

$$G_0(s) = C(s) \cdot G(s) = k_p \frac{s + s_r}{s} \cdot \frac{k}{(s + s_1) \cdot (s + s_2) \cdot (s + s_3)}$$

Odnosno

$$G_0(s) = k_p \cdot k \frac{s + s_r}{s \cdot (s + s_1) \cdot (s + s_2) \cdot (s + s_3)}$$

U frekvencijskom području možemo pisati sljedeće:

$$G_0(j\omega) = k_p \cdot k \frac{s_r + j\omega}{j\omega \cdot (s_1 + j\omega) \cdot (s_2 + j\omega) \cdot (s_3 + j\omega)}$$

Odnosno

$$G_0(j\omega) = k_p \cdot k \cdot \left[\frac{s_r}{j\omega \cdot (s_1 + j\omega) \cdot (s_2 + j\omega) \cdot (s_3 + j\omega)} + \frac{j\omega}{j\omega \cdot (s_1 + j\omega) \cdot (s_2 + j\omega) \cdot (s_3 + j\omega)} \right]$$

Ako prijenosnu funkciju G_0 pomnožimo s konjugirano-kompleksnim parom slijedi:

$$\begin{aligned}
& \frac{s_r}{j\omega \cdot (s_1 + j\omega) \cdot (s_2 + j\omega) \cdot (s_3 + j\omega)} \cdot \frac{j \cdot (s_1 - j\omega) \cdot (s_2 - j\omega) \cdot (s_3 - j\omega)}{j \cdot (s_1 - j\omega) \cdot (s_2 - j\omega) \cdot (s_3 - j\omega)} \\
&= -j \frac{s_r \cdot (s_1 - j\omega) \cdot (s_2 - j\omega) \cdot (s_3 - j\omega)}{\omega \cdot (s_1^2 + \omega^2) \cdot (s_2^2 + \omega^2) \cdot (s_3^2 + \omega^2)} \\
& \frac{1}{(s_1 + j\omega) \cdot (s_2 + j\omega) \cdot (s_3 + j\omega)} \cdot \frac{(s_1 - j\omega) \cdot (s_2 - j\omega) \cdot (s_3 - j\omega)}{(s_1 - j\omega) \cdot (s_2 - j\omega) \cdot (s_3 - j\omega)} \\
&= \frac{(s_1 - j\omega) \cdot (s_2 - j\omega) \cdot (s_3 - j\omega)}{(s_1^2 + \omega^2) \cdot (s_2^2 + \omega^2) \cdot (s_3^2 + \omega^2)}
\end{aligned}$$

Prema tome slijedi:

$$\begin{aligned}
G_0(j\omega) &= k_p \cdot k \cdot \left[-j \frac{s_r \cdot (s_1 - j\omega) \cdot (s_2 - j\omega) \cdot (s_3 - j\omega)}{\omega \cdot (s_1^2 + \omega^2) \cdot (s_2^2 + \omega^2) \cdot (s_3^2 + \omega^2)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(s_1 - j\omega) \cdot (s_2 - j\omega) \cdot (s_3 - j\omega)}{(s_1^2 + \omega^2) \cdot (s_2^2 + \omega^2) \cdot (s_3^2 + \omega^2)} \right]
\end{aligned}$$

Kako je:

$$\begin{aligned}
& \frac{(s_1 - j\omega) \cdot (s_2 - j\omega) \cdot (s_3 - j\omega)}{(s_1^2 + \omega^2) \cdot (s_2^2 + \omega^2) \cdot (s_3^2 + \omega^2)} \\
&= \frac{s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 - \omega^2 \cdot (s_1 + s_2 + s_3)}{(s_1^2 + \omega^2) \cdot (s_2^2 + \omega^2) \cdot (s_3^2 + \omega^2)} + j \frac{\omega^3 - \omega \cdot (s_1 \cdot s_2 + s_1 \cdot s_3 + s_2 \cdot s_3)}{(s_1^2 + \omega^2) \cdot (s_2^2 + \omega^2) \cdot (s_3^2 + \omega^2)}
\end{aligned}$$

Može se uvesti supstitucije:

$$A(\omega) = s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 - \omega^2 \cdot (s_1 + s_2 + s_3)$$

$$B(\omega) = \omega^3 - \omega \cdot (s_1 \cdot s_2 + s_1 \cdot s_3 + s_2 \cdot s_3)$$

$$C(\omega) = (s_1^2 + \omega^2) \cdot (s_2^2 + \omega^2) \cdot (s_3^2 + \omega^2)$$

Stoga slijedi:

$$\frac{(s_1 - j\omega) \cdot (s_2 - j\omega) \cdot (s_3 - j\omega)}{(s_1^2 + \omega^2) \cdot (s_2^2 + \omega^2) \cdot (s_3^2 + \omega^2)} = \frac{A(\omega) + jB(\omega)}{C(\omega)}$$

Sada možemo pisati:

$$\begin{aligned}
 G_0(j\omega) &= k_p \cdot k \\
 &\cdot \left[-j \frac{s_r \cdot (s_1 - j\omega) \cdot (s_2 - j\omega) \cdot (s_3 - j\omega)}{\omega \cdot (s_1^2 + \omega^2) \cdot (s_2^2 + \omega^2) \cdot (s_3^2 + \omega^2)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(s_1 - j\omega) \cdot (s_2 - j\omega) \cdot (s_3 - j\omega)}{(s_1^2 + \omega^2) \cdot (s_2^2 + \omega^2) \cdot (s_3^2 + \omega^2)} \right] \\
 &= k_p \cdot k \cdot \left[-j \frac{s_r}{\omega} \cdot \frac{A(\omega) + jB(\omega)}{C(\omega)} + \frac{A(\omega) + jB(\omega)}{C(\omega)} \right]
 \end{aligned}$$

Slijedom uvedene supstitucije vrijedi:

$$G_0(j\omega) = \frac{k_p \cdot k}{C(\omega)} [A(\omega) + \frac{s_r}{\omega} B(\omega)] + j \frac{k_p \cdot k}{C(\omega)} [B(\omega) - \frac{s_r}{\omega} A(\omega)]$$

Slijedi realni i imaginarni dio prijenodne funkcije:

$$U(\omega) = \frac{k_p \cdot k}{C(\omega)} [A(\omega) + \frac{s_r}{\omega} B(\omega)]$$

$$V(\omega) = \frac{k_p \cdot k}{C(\omega)} [B(\omega) - \frac{s_r}{\omega} A(\omega)]$$

Fazna frekvencijska karakteristika iznosi:

$$\varphi = \arctan \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = \arctan \frac{\frac{k_p \cdot k}{C(\omega)} [B(\omega) - \frac{s_r}{\omega} A(\omega)]}{\frac{k_p \cdot k}{C(\omega)} [A(\omega) + \frac{s_r}{\omega} B(\omega)]} = \arctan \frac{B(\omega) - \frac{s_r}{\omega} A(\omega)}{A(\omega) + \frac{s_r}{\omega} B(\omega)}$$

Amplitudna frekvencijska karakteristika iznosi:

$$M(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = \frac{k_p \cdot k}{C(\omega)} \sqrt{\left(A(\omega) + \frac{s_r}{\omega} B(\omega) \right)^2 + \left(B(\omega) - \frac{s_r}{\omega} A(\omega) \right)^2}$$

Odnosno:

$$M(\omega) = \frac{k_p \cdot k}{C(\omega)} \sqrt{\left[1 + \left(\frac{s_r}{\omega} \right)^2 \right] \cdot [A^2(\omega) + B^2(\omega)]}$$

Kako je ciljano fazno osiguraje jednako $\varphi_{F.O.}$, tada vrijedi kako je:

$$\varphi(\omega_c) = -180^\circ + \varphi_{F.O.}$$

Prema tome vrijedi da je:

$$\varphi(\omega_c) = \arctan \frac{V(\omega_c)}{U(\omega_c)} = \arctan \frac{B(\omega_c) - \frac{s_r}{\omega_c} A(\omega_c)}{A(\omega_c) + \frac{s_r}{\omega_c} B(\omega_c)} = -180^\circ + \varphi_{F.O.}$$

Odnosno

$$\frac{B(\omega_c) - \frac{s_r}{\omega_c} A(\omega_c)}{A(\omega_c) + \frac{s_r}{\omega_c} B(\omega_c)} = \tan(-180^\circ + \varphi_{F.O.})$$

Slijedom prije napisanog može se odrediti pol PI regulatora s_r za zadane vrijednosti ω_c i $\varphi_{F.O.}$

$$s_r = \omega_c \cdot \frac{B(\omega_c) - A(\omega_c) \cdot \tan(-180^\circ + \varphi_{F.O.})}{A(\omega_c) + B(\omega_c) \cdot \tan(-180^\circ + \varphi_{F.O.})}$$

Potrebno je još odrediti pojačanje PI regulatora k_p na temelju amplitudne frekvencijske karakteristike i uvjeta:

$$M(\omega) = \frac{k_p \cdot k}{C(\omega_c)} \sqrt{\left[1 + \left(\frac{s_r}{\omega_c}\right)^2\right] \cdot [A^2(\omega_c) + B^2(\omega_c)]} = 1$$

Na temelju prije navedenog avrijedi:

$$k_p = \frac{1}{k} \cdot \frac{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{s_r}{\omega_c}\right)^2\right] \cdot [A^2(\omega_c) + B^2(\omega_c)]}}{C(\omega_c)}$$

Neka je zadana sljedeće prijenosna funkcija sustava:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1) \cdot (s+1) \cdot (s+3)}$$

I neka je $\omega_c = 0,5 \frac{\text{rad}}{\text{sek}}$ i $\varphi_{F.O.} = 60^\circ$. Potrebno je odrediti parametre PI regulatora (k_p i k_i).

Uvrste li se vrijednosti u suspdstitucije, dobijaju se sljedeće vrijednosti:

$$A(\omega_c) = s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 - \omega_c^2 \cdot (s_1 + s_2 + s_3) = 1 \cdot 2 \cdot 3 - 0,5^2 \cdot (1 + 2 + 3) = 4,5$$

$$\begin{aligned} B(\omega_c) &= \omega_c^3 - \omega_c \cdot (s_1 \cdot s_2 + s_1 \cdot s_3 + s_2 \cdot s_3) = 0,5^3 - 0,5 \cdot (1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3) \\ &= -5,375 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(\omega_c) &= (s_1^2 + \omega_c^2) \cdot (s_2^2 + \omega_c^2) \cdot (s_3^2 + \omega_c^2) = (1^2 + 0,5^2) \cdot (2^2 + 0,5^2) \cdot (3^2 + 0,5^2) \\ &= 49,14 \end{aligned}$$

$$\tan(-180^\circ + \varphi_{F.O.}) = \tan(-180^\circ + 60^\circ) = 1,732$$

Pol PI regulatora sada iznosi:

$$s_r = \omega_c \cdot \frac{B(\omega_c) - A(\omega_c) \cdot \tan(-180^\circ + \varphi_{F.O.})}{A(\omega_c) + B(\omega_c) \cdot \tan(-180^\circ + \varphi_{F.O.})} = 0,5 \cdot \frac{-5,375 - 4,5 \cdot 1,732}{4,5 - 5,375 \cdot 1,732} = 1,369$$

Pojačanje PI regulatora iznosi:

$$k_p = \frac{1}{k} \cdot \frac{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{s_r}{\omega_c}\right)^2\right] \cdot [A^2(\omega_c) + B^2(\omega_c)]}}{C(\omega_c)} = \frac{1}{1} \cdot \frac{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{1,369}{0,5}\right)^2\right] \cdot (4,5^2 + 5,375^2)}}{49,14} = 2,4049$$

Prema tome prijenosna funkcija PI regulatora glasi:

$$C(s) = k_p \frac{s + s_r}{s} = 2,4049 \frac{s + 1,369}{s}$$

Gdje je: $k_i = k_p \cdot s_r = 2,4049 \cdot 1,369 = 3,2923$

Vrijednosti se mogu zaokružiti i završno vrijedi:

$$k_p = 2,4$$

$$k_i = 3,29$$

Isti zadatak rješiti će se pomoću MatLab rutine.

```
'Zadana prijenosna funkcija'
G=zpk([],[-1 -2 -3],1)

'Zadana frekvencija presjeka omc'
omc=0.5

'Određivanje parametara PI regulatora'
C = pidtune(G,'PI',omc)
```

```
ans = 'Zadana prijenosna funkcija'
G =
      1
-----
(s+1) (s+2) (s+3)

Continuous-time zero/pole/gain model.
ans = 'Zadana frekvencija presjeka omc'
omc = 0.5000
ans = 'Određivanje parametara PI regulatora'
```

```
C =
      1
Kp + Ki * ---
      s

with Kp = 2.4, Ki = 3.29

Continuous-time PI controller in parallel form.
```

Određivanje diskretnog regulatora u z – domeni ovisi, kako je prije navedeno, o vrsti transformacije. U konkretnom slučaju koristit će se trapezoidne transformacije „Trapezoidal” koja se još naziva T – transformacija po britanskom profesoru Arnoldu Tustinu poznatom po primjeni sustava digitalne regulacije u automatizaciji pogona. Prema tome vrijedi:

$$C(s) = k_p + k_i \cdot IF(z)$$

$$IF(z) = \frac{T_s}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1}$$

$$C(z) = k_p + k_i \cdot \frac{T_s}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1}$$

Vrijeme diskretizacije T_s određuje se na temelju preporuke Astroma i Wittenmarka (Astrom, 1984.), švedskih profesora Karla Johana Astroma i Bjorna Wittenmarka, koja glasi:

$$\frac{0,15}{\omega_c} < T_s < \frac{0,5}{\omega_c}$$

Gdje je:

$$\omega_c - \text{frekvencija presjeka otvorenog kruga kontinuiranog sustava } G_0(s) = C(s) \cdot G(s)$$

Kako je u konkretnom slučaju $\omega_c = 0,5 \text{ rad/sek}$ tada vrijedi:

$$\frac{0,15}{0,5} < T_s < \frac{0,5}{0,5}$$

Odnosno

$$0,3 < T_s < 1$$

Neka je vrijeme diskretizacije signala $T_s = 0,4 \text{ sek}$, tada prijenosna funkcija PI regulatora u diskretnom području iznosi:

$$C(z) = k_p + k_i \cdot \frac{T_s}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} = 2,4 + 3,29 \cdot \frac{0,4}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} = 2,4 + 0,658 \cdot \frac{z+1}{z-1}$$

Prema tome, rješenje PI regulatora u kontinuiranom i diskretnom području u paralelnoj formi iznosi:

$$C(s) = 2,4 + 3,29 \cdot \frac{1}{s}$$

$$C(z) = 2,4 + 0,658 \cdot \frac{z+1}{z-1}$$

MatLab rješenje glasi:

```
'Zadana prijenosna funkcija'
```

```
G=zpk([],[-1 -2 -3],1)
```

```
'Zadana frekvencija presjeka omc'
```

```
omc=0.5
```

```
'Određivanje kontinuiranog PI regulatora'
```

```
C = pidtune(G,'PI',omc)
```

```
'Određivanje diskretnog PI regulatora'
```

```
Cd = C;
```

```
Cd.Ts = 0.4;
```

```
Cd.IFormula = 'Trapezoidal'
```

```
ans = 'Zadana prijenosna funkcija'
```

```
G =
```

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

```
Continuous-time zero/pole/gain model.
```

```
ans = 'Zadana frekvencija presjeka omc'
```

```
omc = 0.5000
```

```
ans = 'Određivanje kontinuiranog PI regulatora'
```

```
C =
```

$$K_p + K_i \frac{1}{s}$$

```
with Kp = 2.4, Ki = 3.29
```

```
Continuous-time PI controller in parallel form.
```

```
ans = 'Određivanje diskretnog PI regulatora'
```

```
Cd =
```

$$K_p + K_i \frac{T_s(z+1)}{2(z-1)}$$

```
with Kp = 2.4, Ki = 3.29, Ts = 0.4
```

```
Sample time: 0.4 seconds
```

```
Discrete-time PI controller in parallel form.
```

Potrebno je odrediti amplituno osiguranje $L_{A.O.} = G_m$ za dobivene parametre PI regulatora. Prvi korak je odrediti kružnu frekvenciju $\omega_{-\pi}$ iz fazne frekvencijske karakteristike. Kako je $\varphi(\omega_{-\pi}) = -180^\circ$, tada vrijedi da je:

$$\frac{B(\omega_{-\pi}) - \frac{S_r}{\omega_{-\pi}} A(\omega_{-\pi})}{A(\omega_{-\pi}) + \frac{S_r}{\omega_{-\pi}} B(\omega_{-\pi})} = \tan(-180^\circ) = 0$$

odnosno

$$B(\omega_{-\pi}) - \frac{S_r}{\omega_{-\pi}} A(\omega_{-\pi}) = 0$$

Sada slijedi:

$$A(\omega_{-\pi}) = s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 - \omega_{-\pi}^2 \cdot (s_1 + s_2 + s_3) = 1 \cdot 2 \cdot 3 - \omega_{-\pi}^2 \cdot (1 + 2 + 3) \\ = 6 - 6 \cdot \omega_{-\pi}^2$$

$$B(\omega_{-\pi}) = \omega_{-\pi}^3 - \omega_{-\pi} \cdot (s_1 \cdot s_2 + s_1 \cdot s_3 + s_2 \cdot s_3) = \omega_{-\pi}^3 - \omega_{-\pi} \cdot (1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3) \\ = \omega_{-\pi}^3 - 11 \cdot \omega_{-\pi}$$

Kako je $s_r = 1,369$ može se pisati:

$$\omega_{-\pi}^3 - 11 \cdot \omega_{-\pi} - \frac{1,369}{\omega_{-\pi}} (6 - 6 \cdot \omega_{-\pi}^2) = 0$$

Odnosno

$$\omega_{-\pi}^4 - 2,786 \cdot \omega_{-\pi}^2 - 8,214 = 0$$

Rješenje bi bilo:

$$\omega_{-\pi_{1,2}}^2 = -\frac{-2,786}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2,786}{2}\right)^2 + 8,214}$$

$$\omega_{-\pi_{1,2}}^2 = 1,393 \pm 3,1866$$

Slijedi:

$$\omega_{-\pi}^2 = 4,5796$$

$$\omega_{-\pi} = 2,14 \text{ rad/sek}$$

Amplituno osiguranje $L_{A.O.} = -G_m$ računa se prema sljedećoj relaciji:

$$L_{A.O.}(\omega_{-\pi}) = 20 \log M(\omega_{-\pi}) = 20 \log \left\{ \frac{k_p \cdot k}{C(\omega_{-\pi})} \sqrt{\left[1 + \left(\frac{s_r}{\omega_{-\pi}}\right)^2\right] \cdot [A^2(\omega_{-\pi}) + B^2(\omega_{-\pi})]} \right\}$$

Sada slijedi:

$$A(\omega_{-\pi}) = 6 - 6 \cdot \omega_{-\pi}^2 = 6 \cdot (1 - 2,14^2) = -21,4776$$

$$B(\omega_{-\pi}) = \omega_{-\pi}^3 - 11 \cdot \omega_{-\pi} = 2,14^3 - 11 \cdot 2,14 = -13,7397$$

$$C(\omega_c) = (s_1^2 + \omega_{-\pi}^2) \cdot (s_2^2 + \omega_{-\pi}^2) \cdot (s_3^2 + \omega_{-\pi}^2) \\ = (1^2 + 2,14^2) \cdot (2^2 + 2,14^2) \cdot (3^2 + 2,14^2) = 650,0666$$

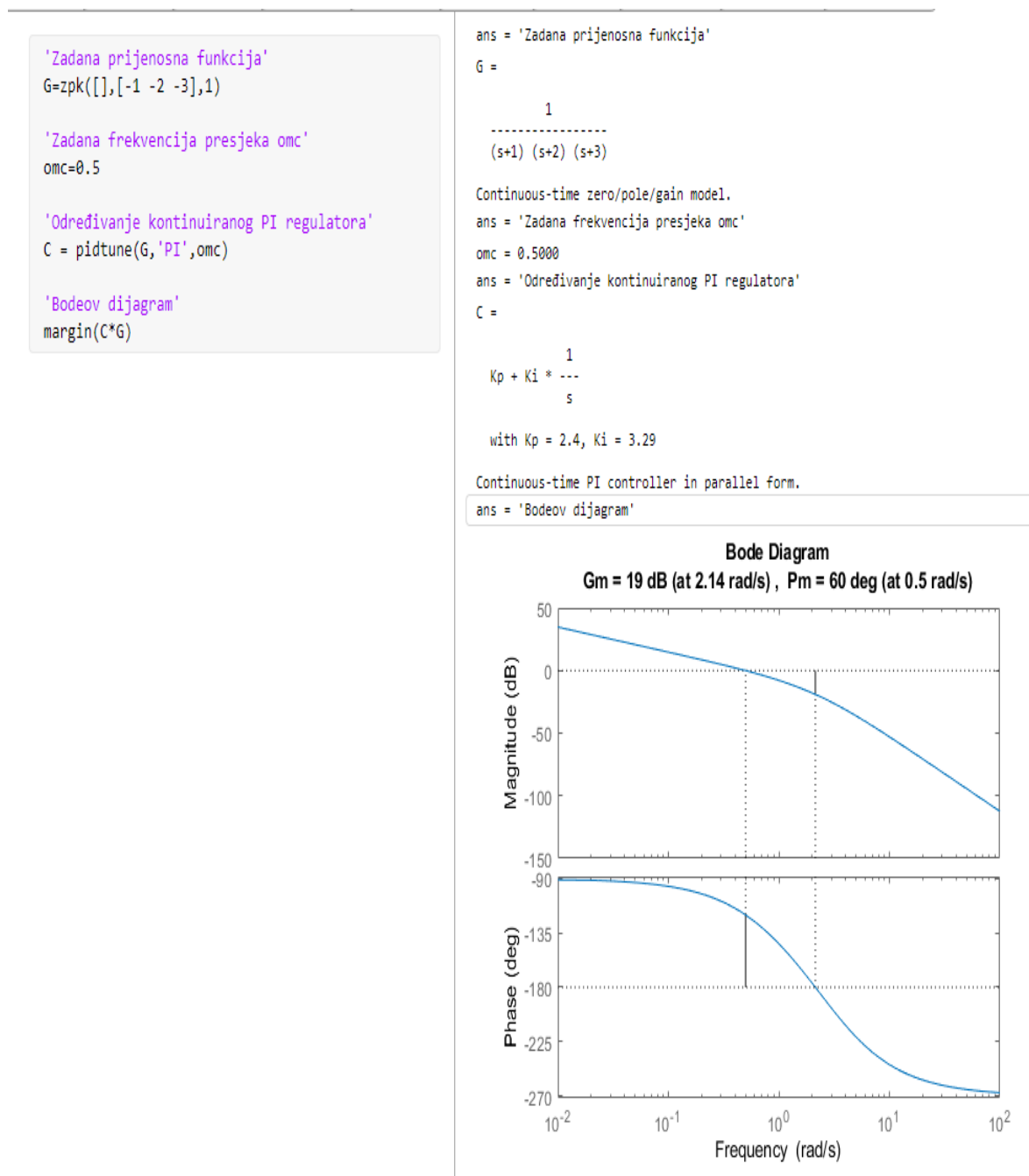
Možemo pisati:

$$L_{A.O.}(\omega_{-\pi}) = 20 \log \left\{ \frac{2,4 \cdot 1}{650,0666} \sqrt{\left[1 + \left(\frac{1,369}{2,14} \right)^2 \right] \cdot [(-21,4776)^2 + -13,7397^2]} \right\}$$

Amplitudno osiguranje iznosi:

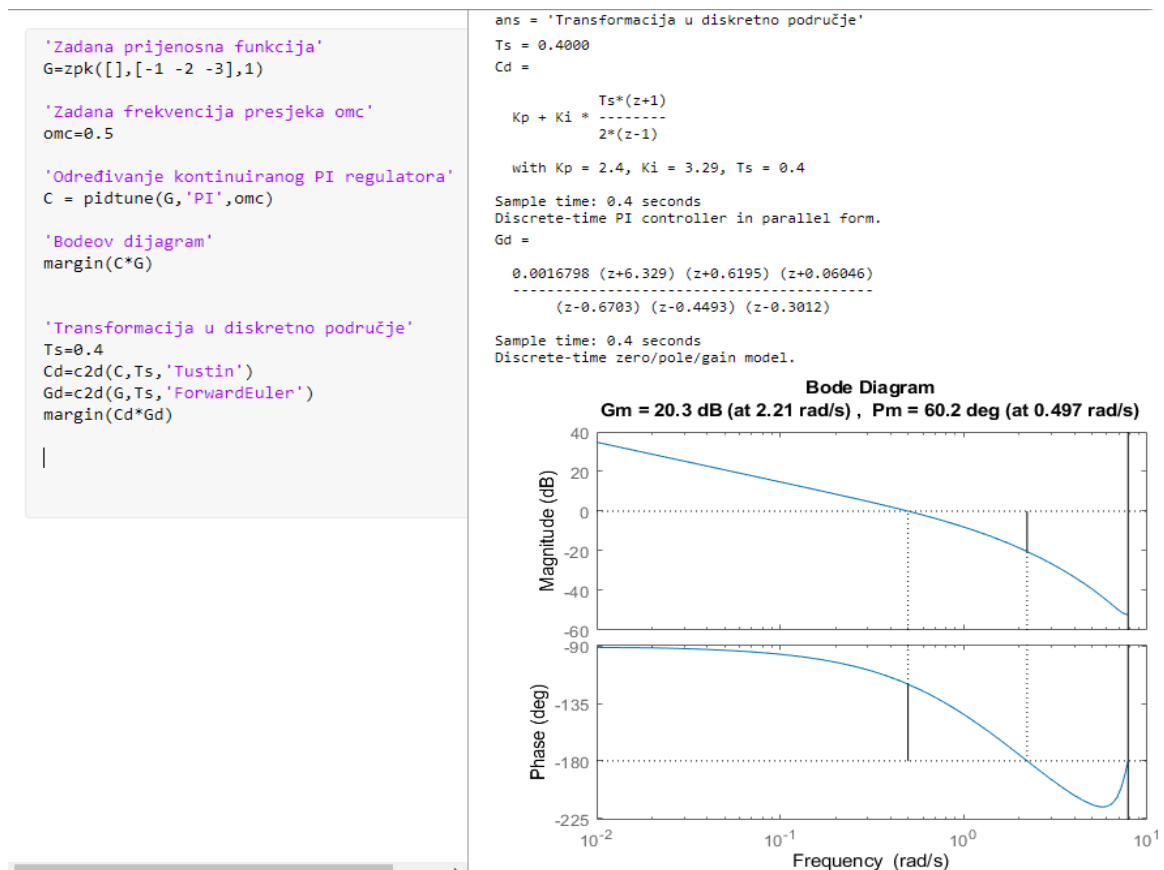
$$L_{A.O.}(\omega_{-\pi}) = -19,3895 \cong -19,4 \text{ dB}$$

MatLab rješenje glasi kako je prikazano na slici 1.29:



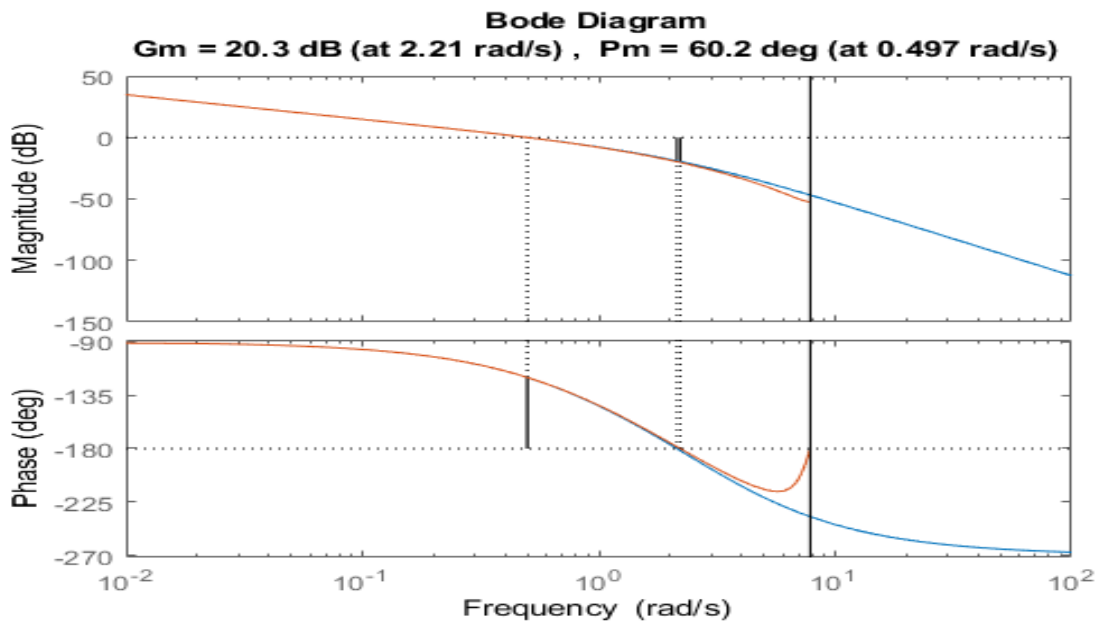
Sl. 1.29 – Bodeov dijagram – amplitudno osiguranje

Transformacija u diskretno područje daje sljedeće rezultate, kako je prikazano na slici 1.30.



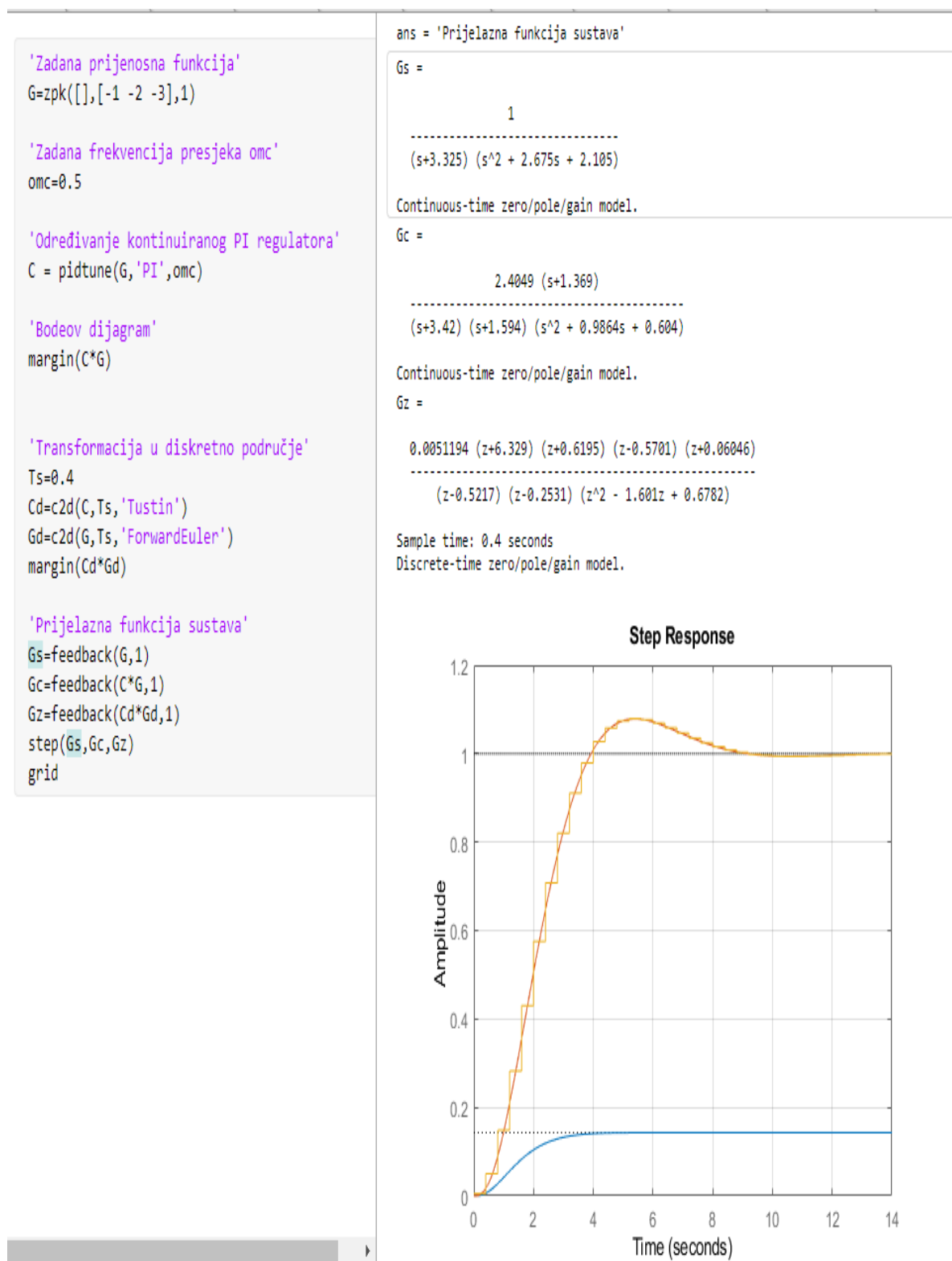
Sl. 1.30 – Transformacija u diskretno područje

Na slici 1.31 prikaza je Bodeov dijagram u kontinuiranom i diskretnom području.



Sl. 1.31 – Bodeov dijagram – kontinuirano i diskretno područje

Na slici 1.31 uočavaju se razlike u Bodeovom dijagramu između kontinuiranog i diskretnog sustava. Na slici 1.32 prikazan prijelazna karakteristika zatvorenog kruga za neregulirani i regulirani sustav.



Sl. 1.32 – Prijelazna karakteristika – neregulirani i regulirani sustav

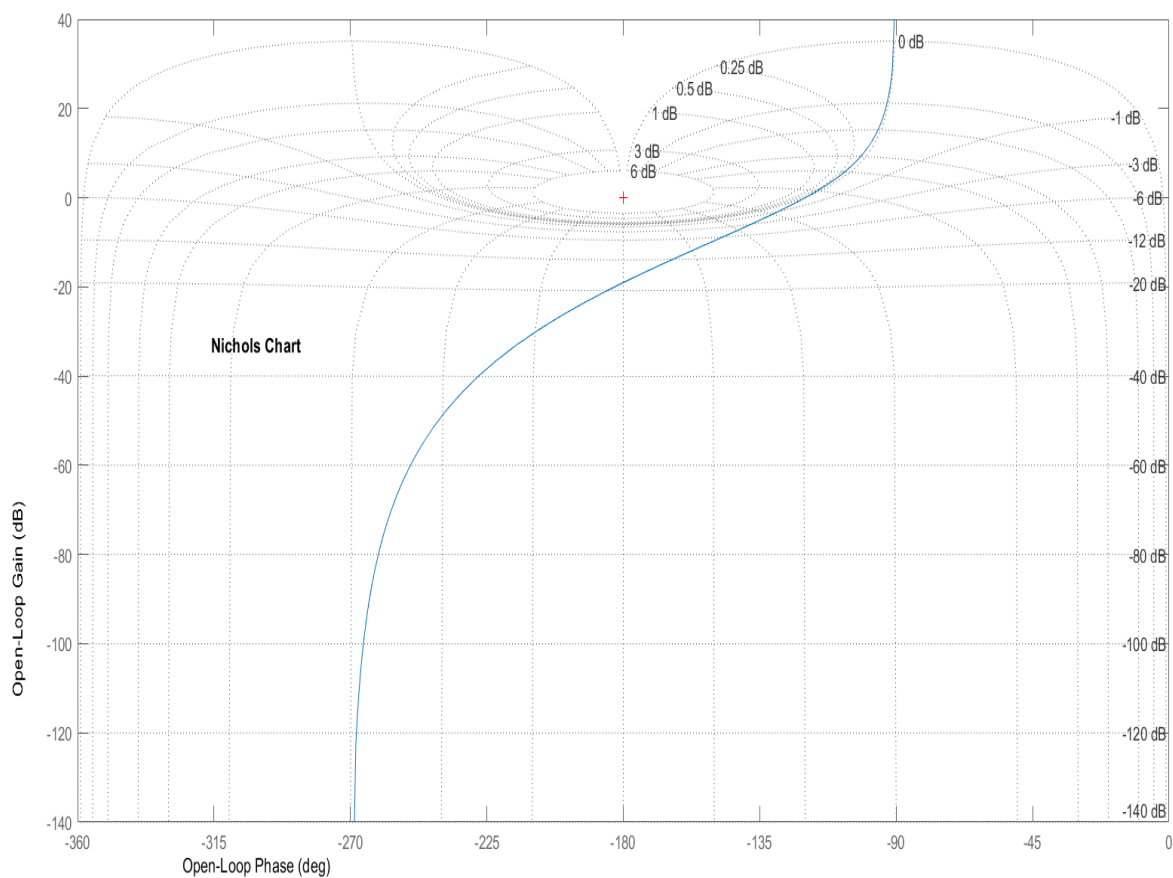
Robusna regulacija

Temeljna značajka robusne regulacije su vrijednosti amplitudnog $L_{A.O.} = -G_m$ i faznog $\varphi_{F.O.} = P_m$ osiguranja koje bi trebala biti u sljedećim intervalima:

$$6\text{dB} \leq G_m \leq 20\text{dB}$$

$$30^\circ \leq P_m \leq 60^\circ$$

U tu svrhu, a u funkciji projektiranja regulatora, koristi se Nicholsov dijagram koji je dobio ime po američkom inženjeru Nathaniel B. Nichols. Nicholsov dijagram prikazuje amplitudno osiguranje u odnosu na fazno osiguranje otvorenog sustava, kako je prikazano na slici 1.33.

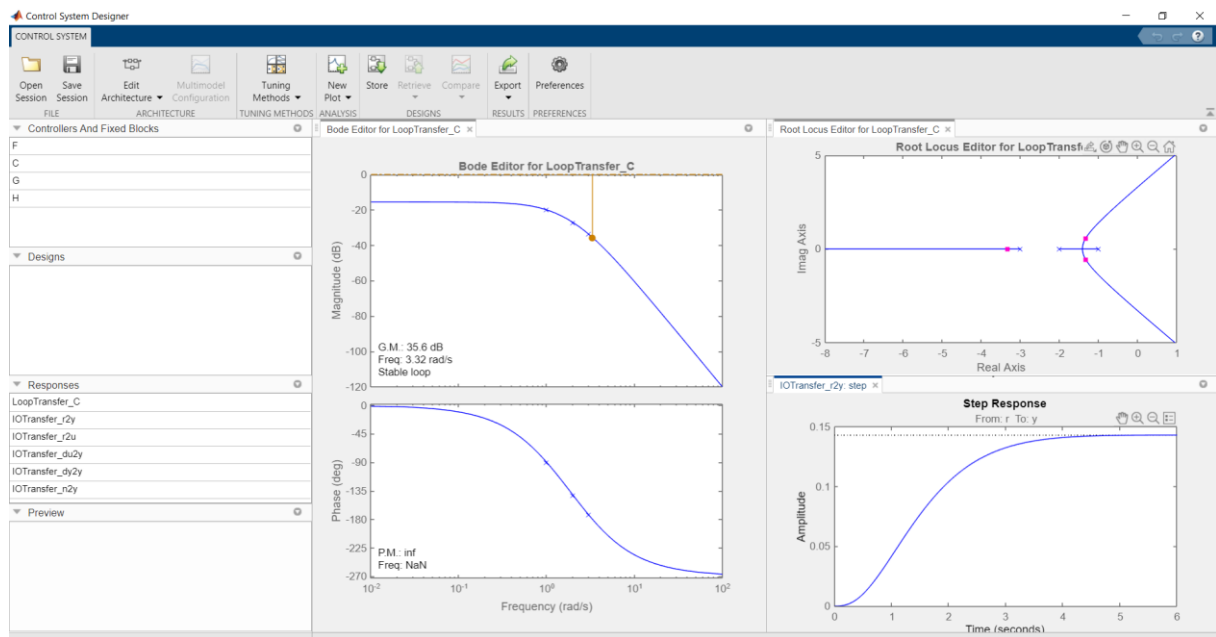


Sl. 1.33 – Nicholsov dijagram

U konkretnom slučaju projektiranja PI regulatora najbolje je koristiti Mat Lab rutinu *sisotool*, kako je prikazano u nastavku, i automatsku metodu robusne regulacije. Za pokretanje prije spomenute rutine koristimo sljedeći zapis:

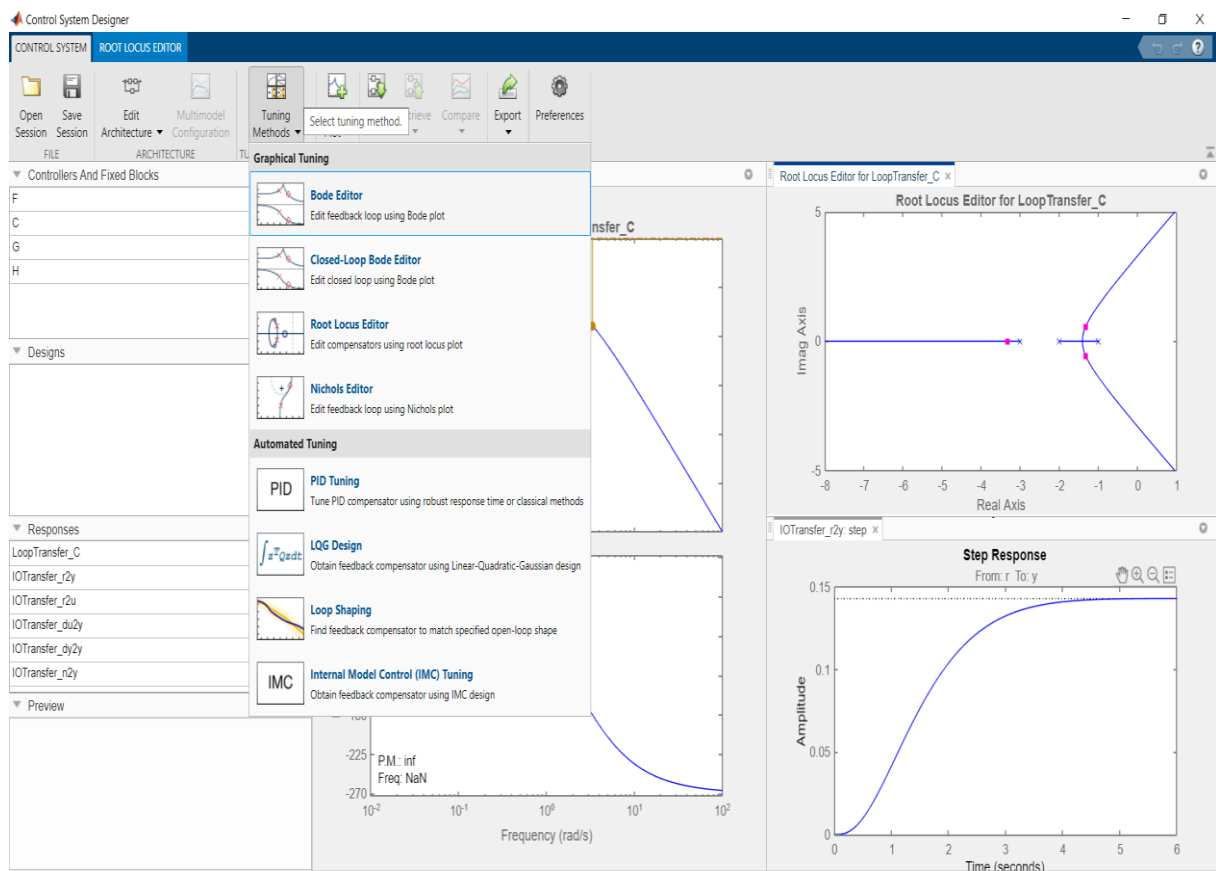
```
'Zadana prijenosna funkcija'  
G=zpk([],[-1 -2 -3],1)  
sisotool(G)
```

Nakon pokretanja rutine pojavljuje se sljedeći ekran prikazan na slici 1.34:



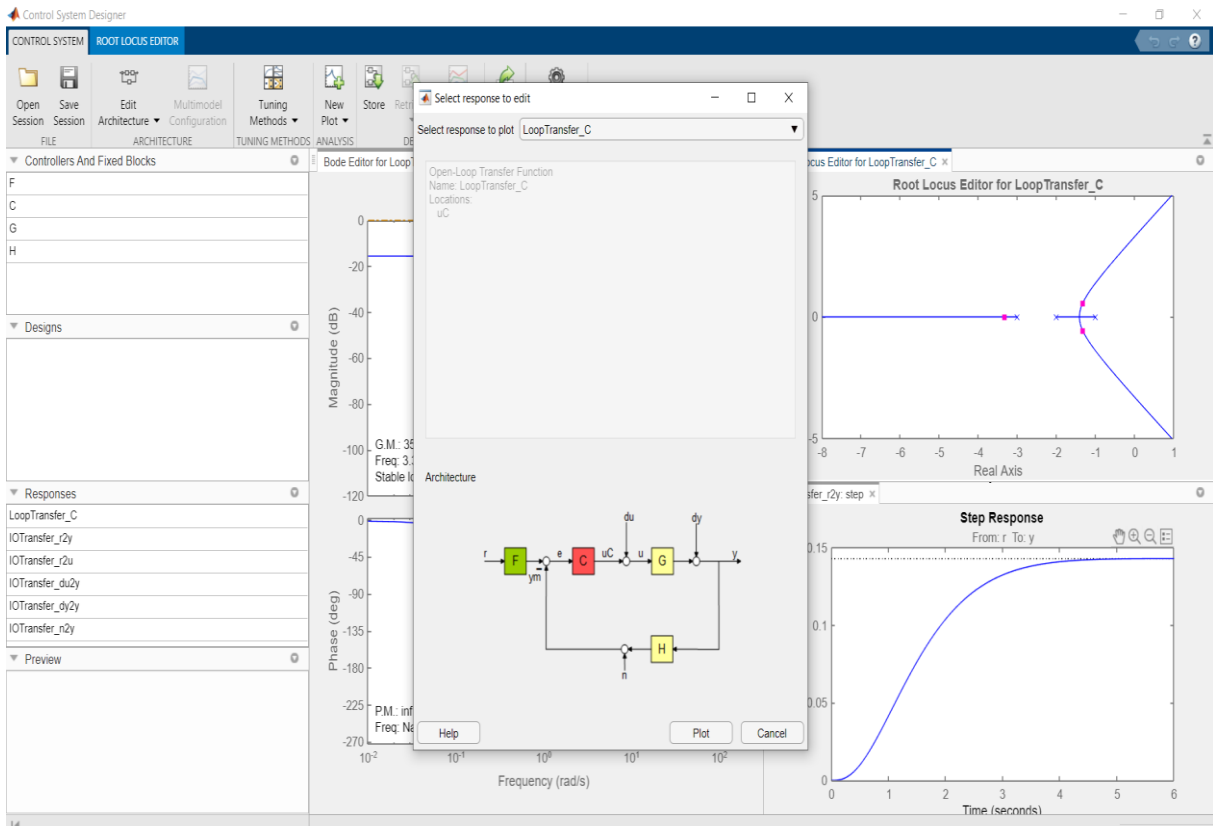
Sl. 1.34 – Pokretanje rutine *sisotool*

U sljedećem koraku uključujemo „Tuning Methods“ i biramo Nichold Editor (slika 1.35).



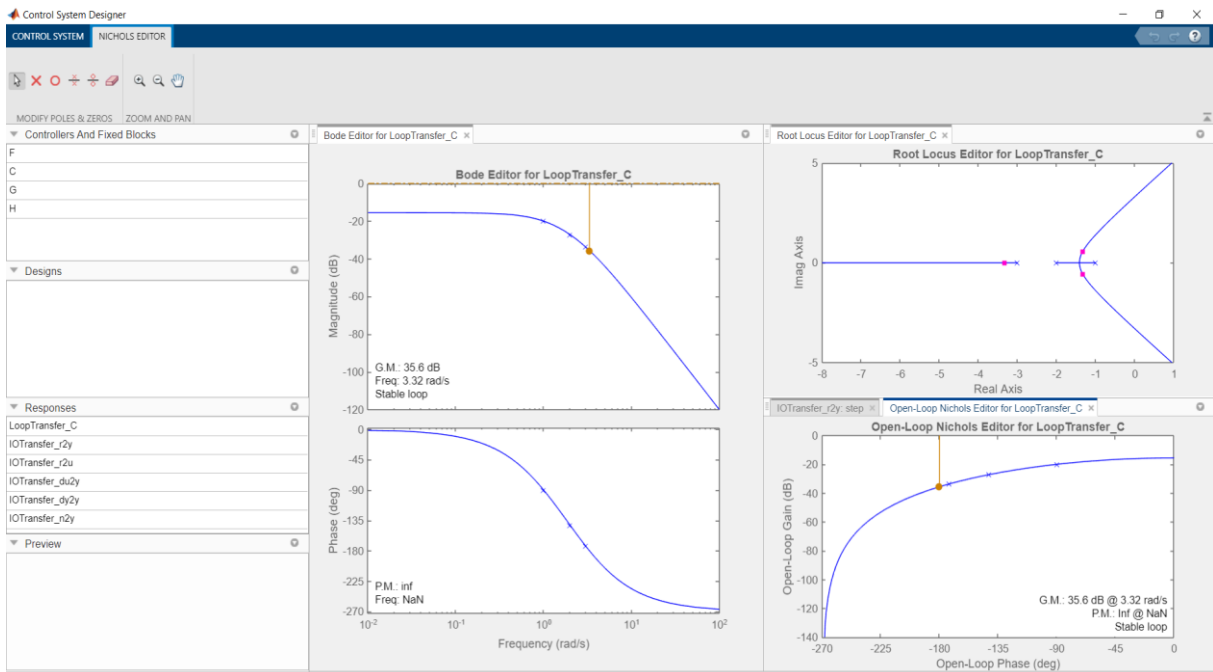
Sl. 1.35 - „Tuning Methods“ i Nichold Editor

Slijedi ekran (slika 1.36) za Nichold Editor:



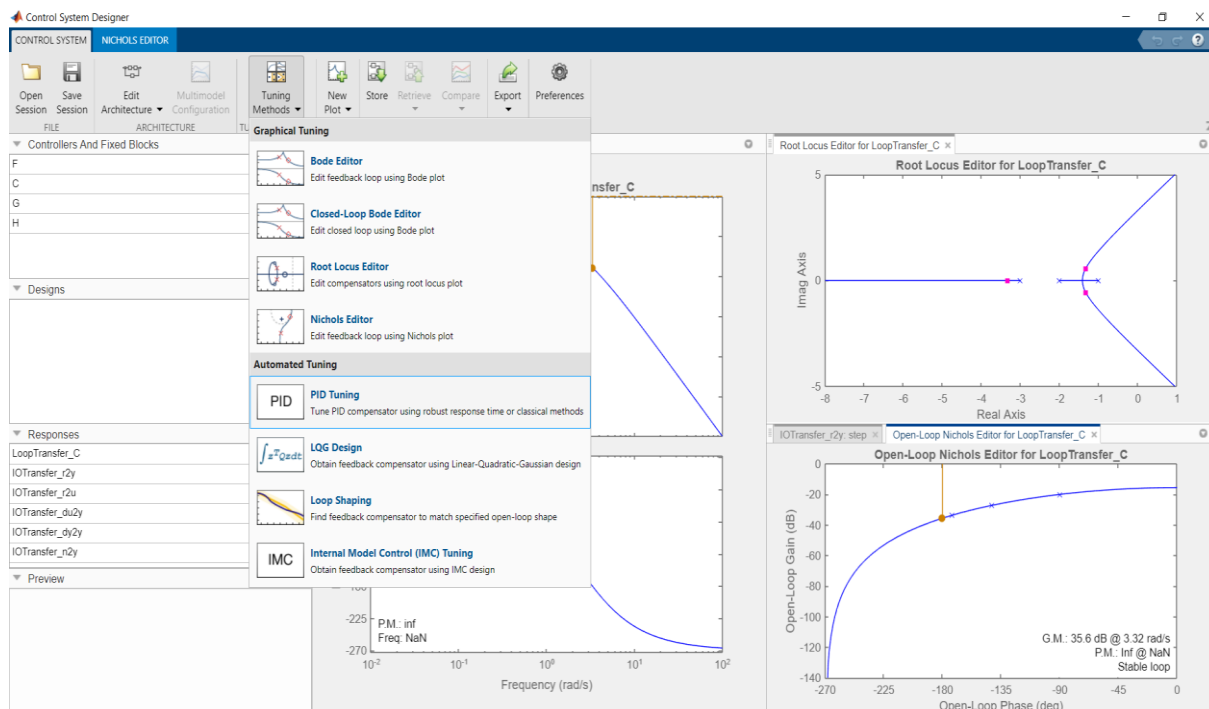
Sl. 1.36 – Uključenje Nichold Editor-a

Završni prikaz ekrana *sisotool* rutine (slika 1.37)



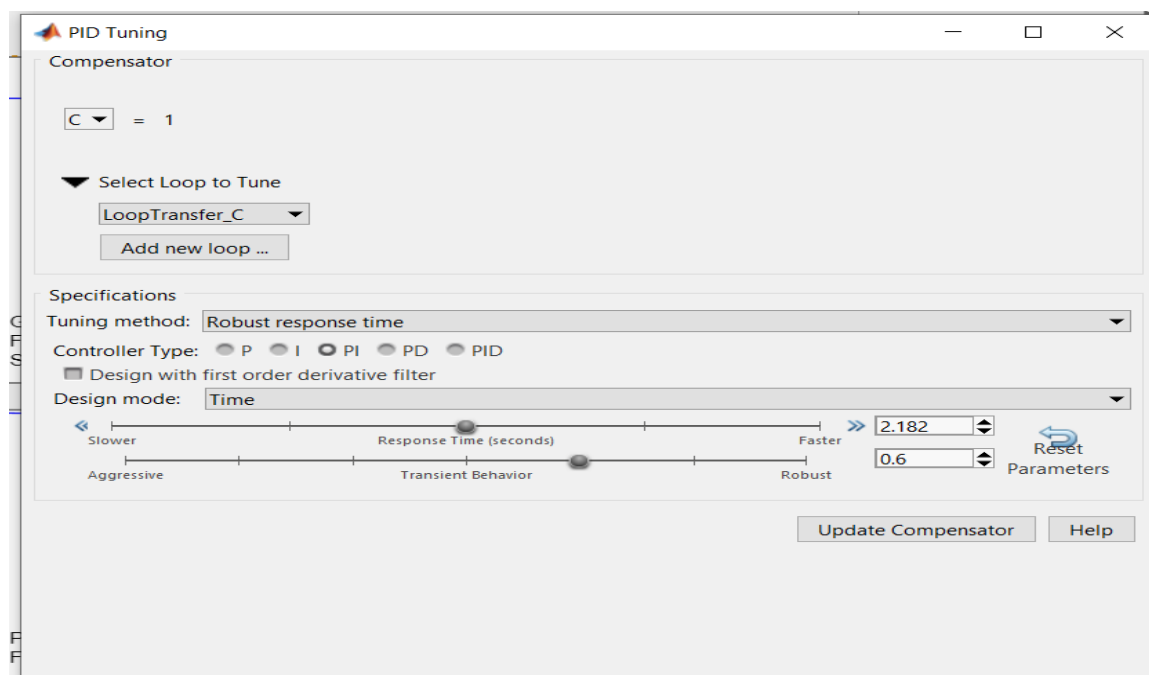
Sl. 1.37 – Završni prikaza ekrana (*sisotool* rutine)

Kako bi pristupili automatskoj metodi robusne regulacije ponovno uključujemo „Tuning Methods“ i biramo „PID Tuning“, kako je prikazano na slici 1.38.



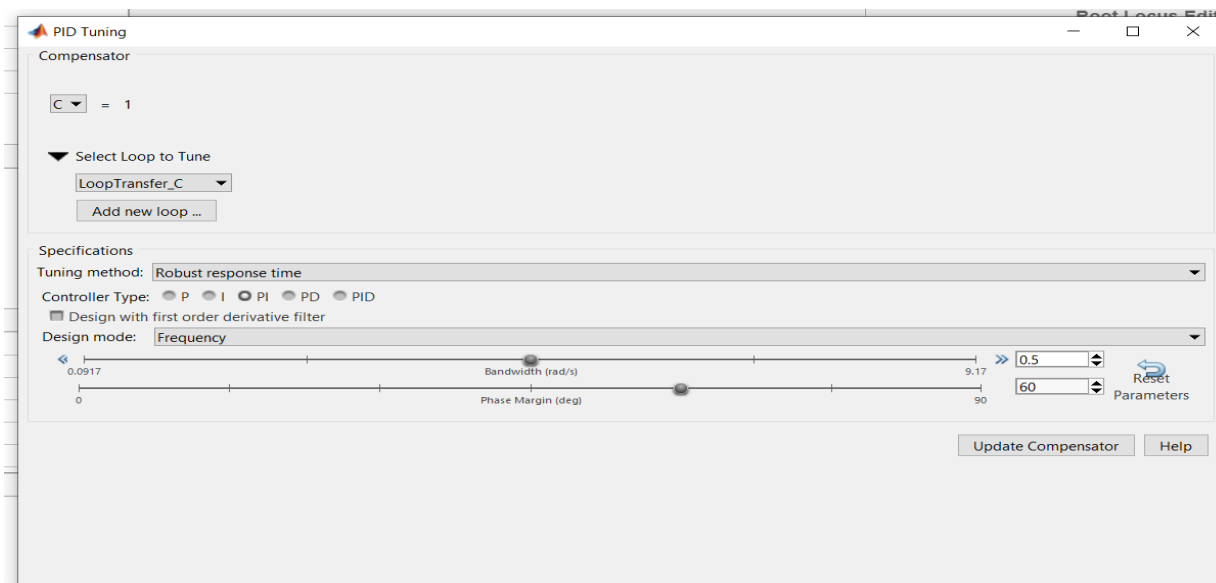
Sl. 1.38 -PID Tuning postupak

Pojavljuje se „Compensator“ u kojem biramo PI regulator, a zatim mjenjamo „Time“ u „Frequency“ (slika 1.39)



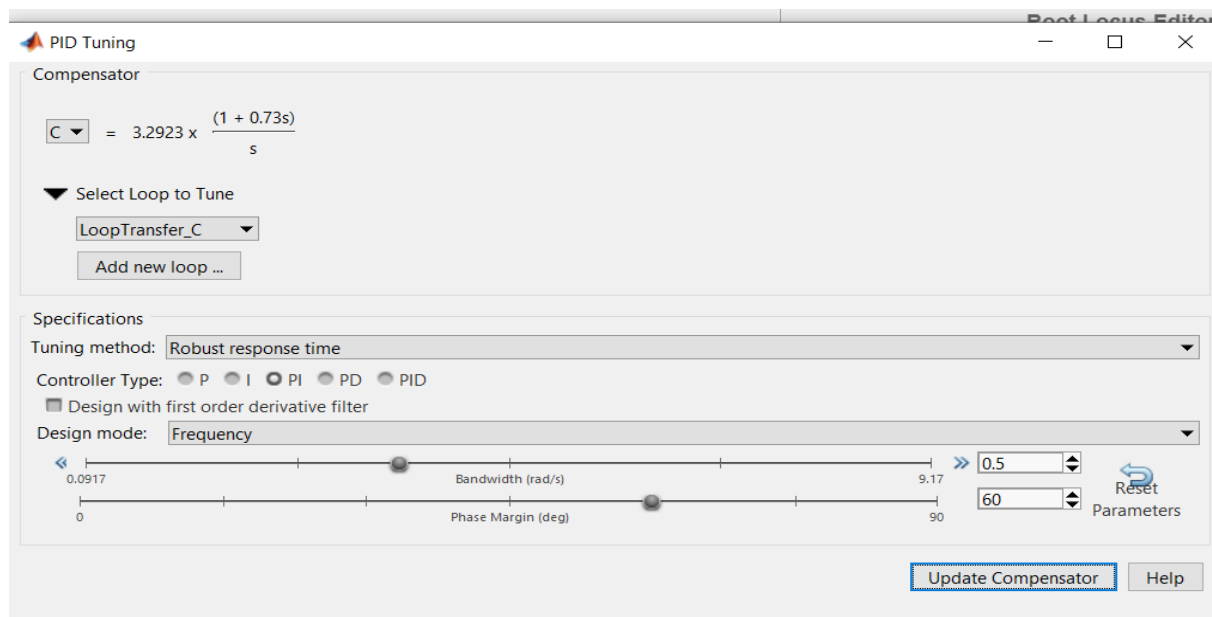
Sl. 1.39 – PI regulator (time)

Upisujemo podatke vezane za kružnu frekvenciju $\omega_c = 0,5 \text{ rad/sek}$, dok sustav ima uvijek zapisano fazno osiguranje od 60° , kako je prikazano na slici 1.40



Sl. 1.41 – Unos podataka optimizacije regulatora

Slijedi „Update Compensator“ nakon čega se pojavljuje prijenosna funkcija PI regulatora kako je vidljivo na slici 1.42



Sl. 1.42 - Update Compensator

Zapis prijenosne funkcije regulatora je:

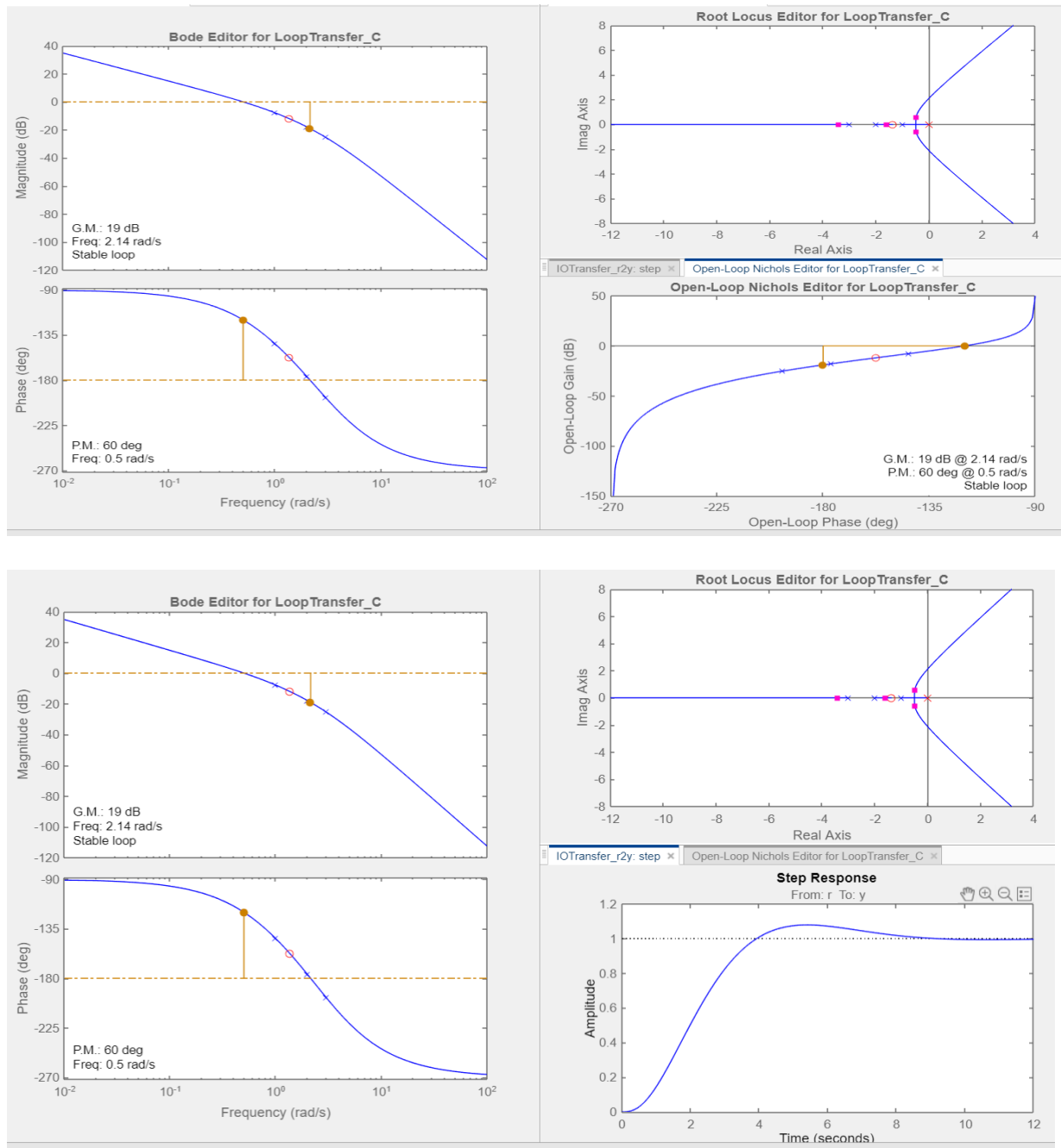
$$C(s) = k_i \frac{1 + T_r \cdot s}{s} = 3,2923 \frac{1 + 0,73 \cdot s}{s}$$

Gdje je: $k_i = 3,2923$ – integralno pojačanje i $T_r = 0,73 \text{ sek}$ – vremenska konstanta regulatora

Slijedi proporcionalno pojačanje:

$$k_p = k_i \cdot T_r = 3,2923 \cdot 0,73 = 2,4$$

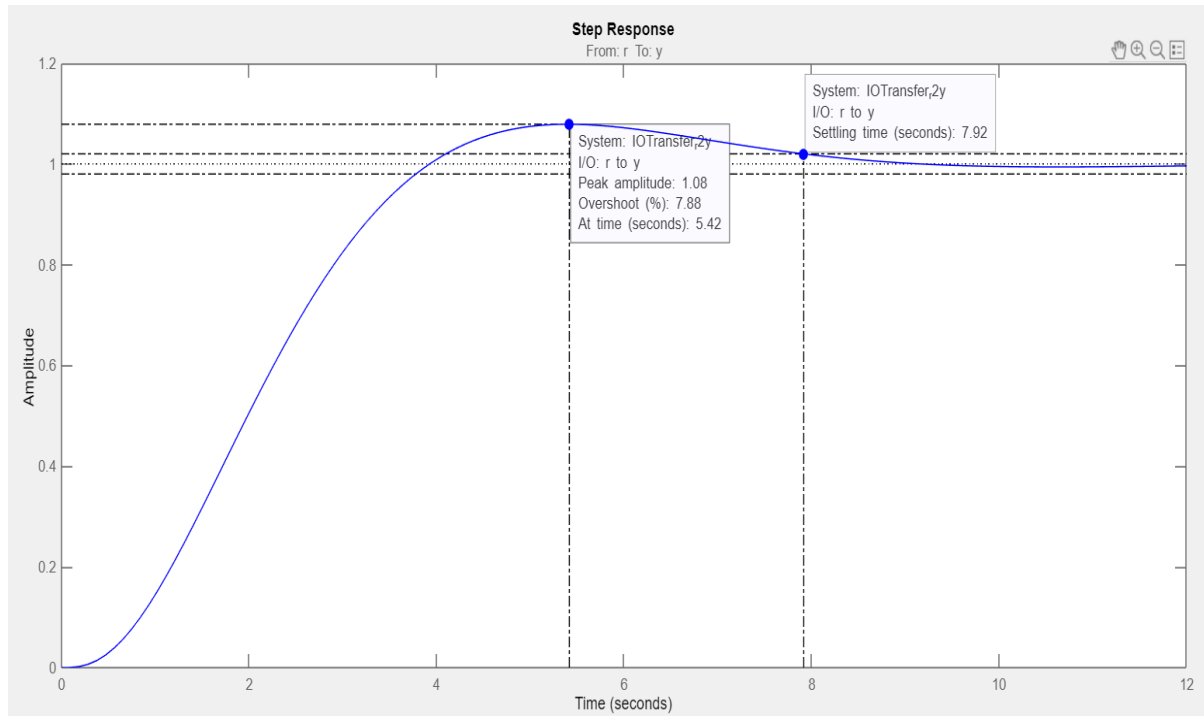
U nastavku su prikazani na slici 1.43 dijagrami na temelju koji se može provesti sinteza sustava automatske regulacije.



Sl. 1.43 – Sinteza sustava automatske regulacije

Na temelju dijagrama sl. 1.43 može se zaključiti kako su zadovoljeni kriteriji robusne regulacije.

Jednako tako možemo sagledati prijelazni proces, kako pokazuje prijelazna karakteristika na slici 1.44.



Sl. 1.44 – Prijelazna karakteristika (funkcija) sustava

Vrijeme dostizanja maksimalne amplitude (Peak Time, PT) iznosi $T_p = 5,42 \text{ sek}$, a vrijeme smirivanja signala (Settling Time, ST) iznosi $T_s = 7,92 \text{ sek}$.

Kriteriji otvorenog kruga iznose:

$$T_s \cong 1 \text{ do } 2 \cdot \frac{2\pi}{\omega_c} \qquad T_p \cong \frac{\pi}{\omega_c}$$

Stoga vrijedi:

$$T_s \cong (1 \div 2) \frac{\pi}{\omega_c} = (1 \div 2) \frac{2\pi}{0,5} = 12,56 \div 25,13 \text{ sek}$$

$$T_p \cong \frac{\pi}{\omega_c} = \frac{\pi}{0,5} = 6,28 \text{ sek}$$

Uočavamo kako su dostignuta vremena manja od kriterija.

Na odgovarajući način može se projektirati regulator i u diskretnom području, o čemu će biti više riječi u sljedećim poglavljima.

2. AUTOMATIZACIJA POGONA

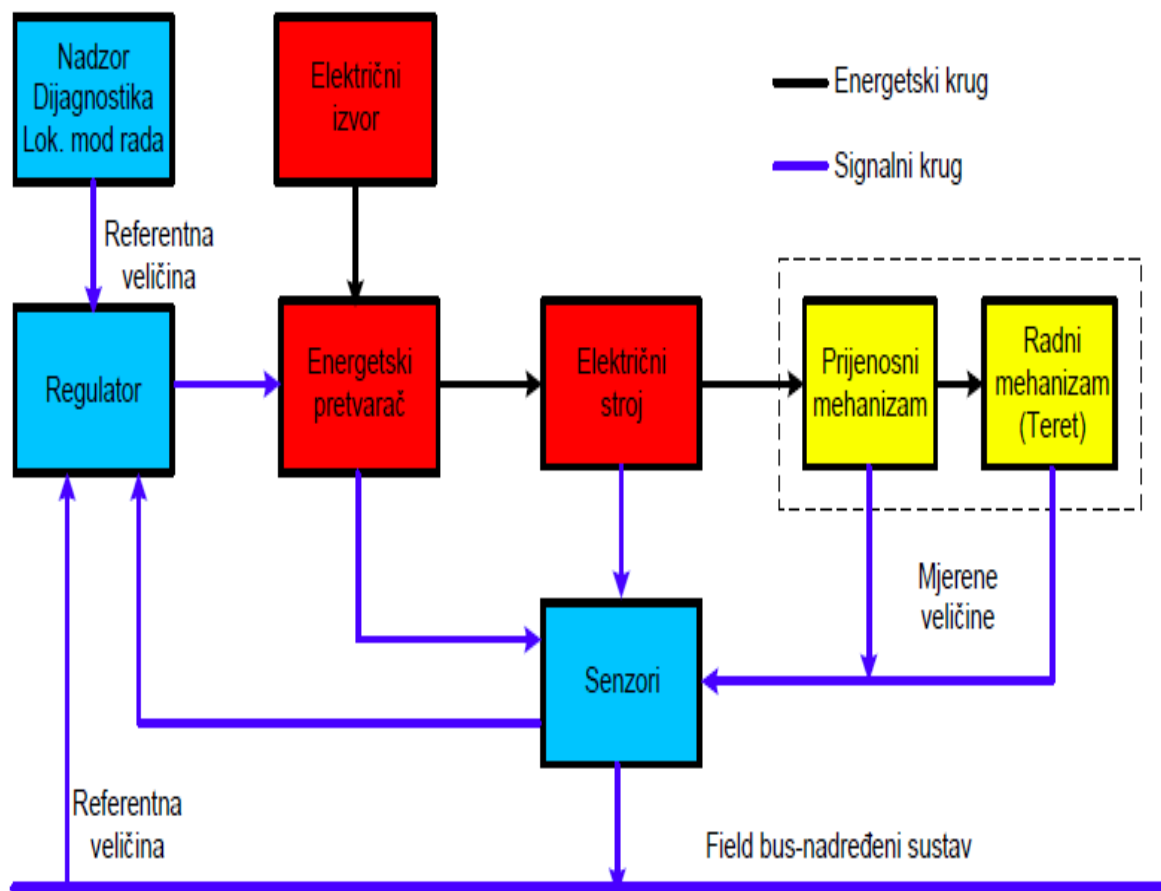
Općenito se može reći kako je pogon (engl. Drive) upravljivi izvor snage. Snagom se može upravljati ručno ili automatski. U slučaju automatskog upravljanja govori se o regulaciji odnosno servo-pogonima (lat. Servus – rob, sluga). Težište je ovog poglavlja na elektromotornim pogonima (engl. Electrical Drive, ED) koji mehaničko (rotacijsko) gibanje ostvaruju u zatvorenim krugu s negativnom povratnom vezom, a regulirana veličina (izlaz) može biti: mehanička pozicija (zakretni kut) ili jedna od derivacija pozicije (kutna brzina ili kutno ubrzanje).

Automatizirani elektromotorni pogon je elektro-mehanički sustav koji električnu energiju pretvara u mehanički rad rotacijskog gibanja radnog mehanizma, a sastoji se od sljedećih elemenata:

- *Elektromotor* – glavni dio elektromotornog pogona
- *Prijenosni mehanizam* – sadrži mehaničke prijenosne naprave (npr. spojka, reduktor, remenica, i sl.) neophodne za prijenos mehaničke energije između elektromotora i radnog mehanizma
- *Radni mehanizam* - sadrži mehaničke naprave koje služe za obavljanje mehaničkog rada (npr. crpke, ventilatori, kompresori, dizala, alatni strojevi i sl.)
- *Pretvarački uređaj (energetski pretvarač)* – prilagođava parametre električne energije (AC ili DC) potrebama elektromotora na način da upravlja tokovima električne energije u cilju regulacije režima rada elektromotora i radnog mehanizma
- *Upravljački uređaj* – informacijski dio sustava regulacije rada elektromotornog pogona (HMI sučelje, regulator i senzori)

Zahtjevi koji se postavljaju pred automatizirani elektromotorni pogon dosta su složeni, a te zahtjeve čini: preciznost pozicioniranja (zakretnog kuta), preciznost podešavanja brzine, široko područje regulacije brzine, stabilnost i niska valovitost momenta, mogućnost preopterećenja i visoka dinamika rada. Elektromotorni pogoni pretvore 55 do 65% sveukupno proizvedene električne energije u mehaničku energiju. Kako bi se na pouzdan i učinkovit način moglo odgovoriti zahtjevima različitih tehnoloških procesa, kako bi se zaštitio elektromotor, radni mehanizam i sama električna mreža, te kako bi se ostavila ušteda tj. smanjila potrošnja električne energije važno je da korisnost pretvorbe električne u mehaničku energiju bude što veća (engl. Energy Efficiency).

Na slici 2.1 prikazan je regulacijski krug automatiziranog elektromotornog pogona.

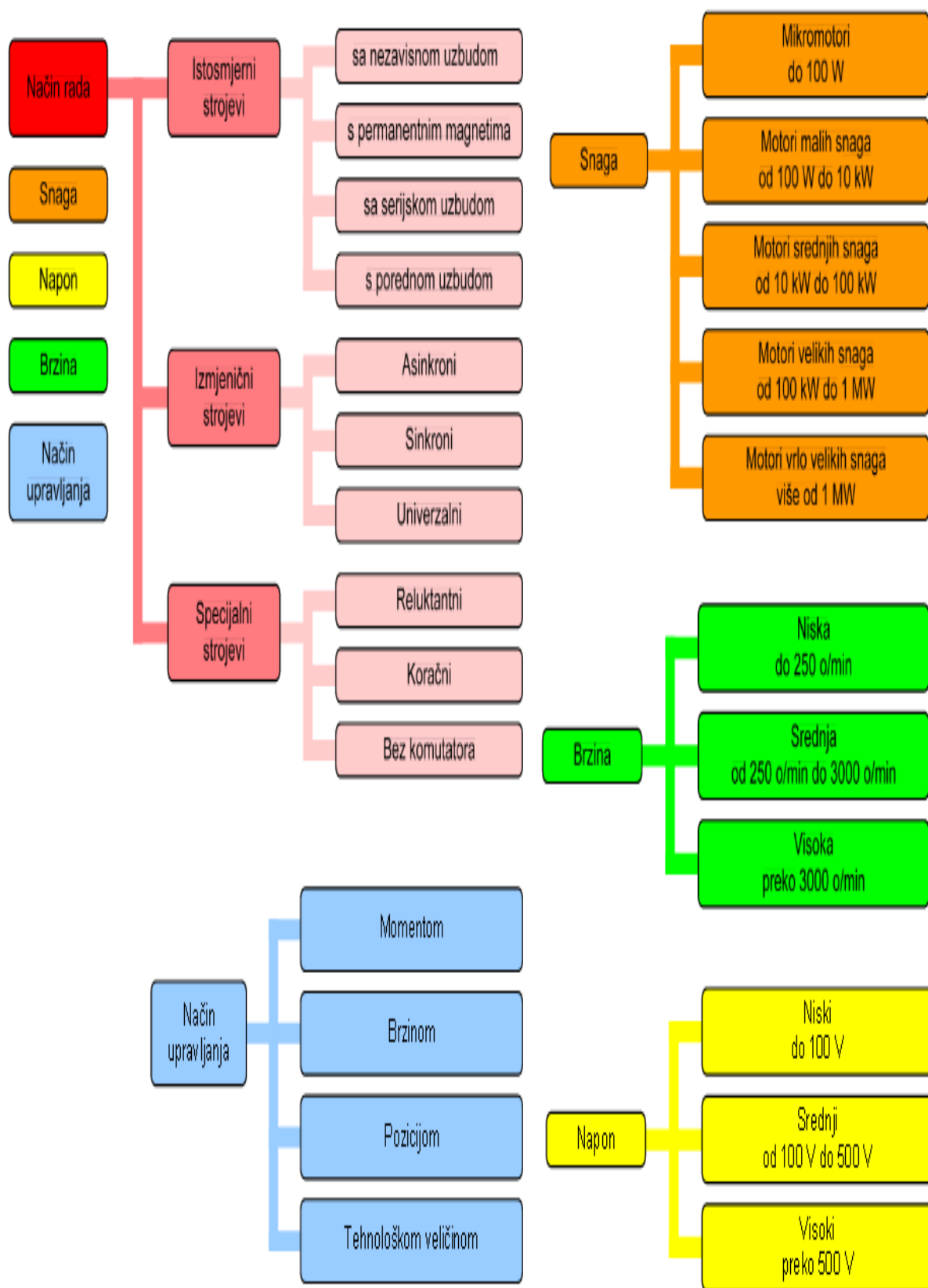


Sl.2.1 - Regulacijski krug automatiziranog elektromotornog pogona

[Izvor: www.fer.hr/predmet/elepog_a]

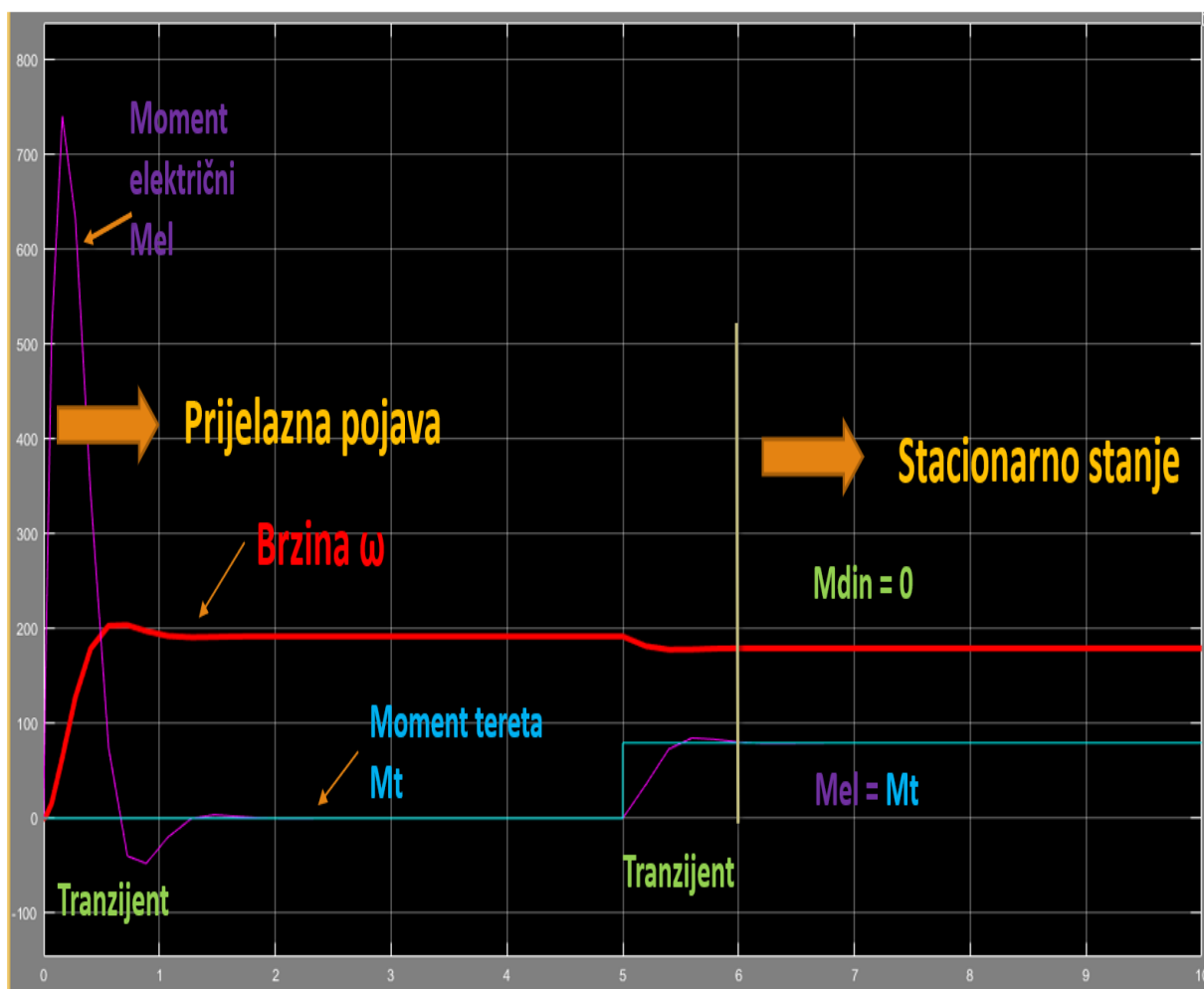
Svi se prije spomenuti zahtjevi mogu ispuniti samo uz multidisciplinarni raspon znanja iz područja strojarstva, elektrotehnike i računarstva – zato se može reći kako se ta znanja podudaraju s pojmom *mehatronika*. Najčešće prisutni automatizirani elektromotorni pogoni jesu: istosmjerni elektromotor s odgovarajućom regulacijom i povratnom vezom, bezkolektrorski komutirani elektromotor s odgovarajućom regulacijom i povratnom vezom i asinhroni elektromotor s odgovarajućom regulacijom i povratnom vezom.

Na slici 2.2 prikazana je klasifikacija električnih strojeva (motora) kao sastavnih dijelova automatiziranih elektromotornih pogona prema načinu rada, snazi, naponu, brzini i načinu upravljanja.



Sl. 2.2 – Klasifikacija električnih strojeva [Izvor: www.fer.unizg.hr]

Nadzor nad električnim momentom stroja M_{el} najvažniji je regulacijski zadatak automatiziranog elektromotornog pogona jer se pomoću električnog momenta može pogon ubrzavati, usporavati ili održavati u stacionarnom (ustaljenom) stanju (engl. *Steady State*). U stacionarnom stanju je brzina motora ω konstantna, kao i parametri električnih veličina. Konstantan je moment motora M_i snaga motor P , a motor se nalazi u radnoj točki. Kada je motor postigao stacionarno stanje, završila je i električna prijelazna pojava. Na slici 2.3 prikazana je prijelazna pojava i stacionarno stanje elektromotornog pogona.



Sl. 2.3 – Prijelazna pojava i stacionarno stanje elektromotornog pogona

Sa slike 2.3 može se uočiti kako dinamički moment M_{din} ovisi o ubrzanju ili usporenju (kočenje), a kada je $M_{din}(t) \neq 0$ tada govorimo o *mehaničkoj prijelaznoj pojavi ili tranzijentu* (engl. *Transient*). Prisutne su dvije prijelazne pojave – na početku kada teret nije uključen, odnosno u 5 sek kada se priključuje teret, što je vidljivo iz slike 2.3. Stacionarno stanje započinje onda kada je električni moment M_{el} postao jednak momentu tereta M_t .

elektromotornog pogona, a kutna brzina motora ω dostiže brzinu praznog hoda (neopterećeni stroj) i zatim pada na nazivnu brzinu opterećenja stroja ω_0 .

2.1 Istosmjerni stroj

Električni moment stroja

Električni moment M_{el} istosmjernog stroja (DC motor) proporcionalan je mehaničkoj konstanti motora k_m , magnetskom toku statora Φ i struji armature rotora I_a . Vrijedi slijedeća jednadžba:

$$M_{el} = k_m \cdot \Phi \cdot I_a$$

gdje je:

$$k_m = \frac{p \cdot z}{2\pi \cdot a}$$

odnosno:

p – broj pari polova statora

z – broj pari vodiča rotora

a – broj pari paralelnih grana rotora

Kada je magnetski tok konstantan i nepromjenljiv tada vrijedi da je k konstanta stroja:

$$k = k_m \cdot \Phi$$

Tada vrijedi i:

$$M_{el} = k \cdot I_a = k_m \cdot \Phi \cdot I_a$$

Mehanički moment stroja

Mehanički moment M_{meh} istosmjernog stroja (DC motor) proporcionalan je dinamičkom momentu M_{din} i momentu opterećenja stroja M_{opt} te vrijedi jednadžba:

$$M_{meh} = M_{din} + M_{opt}$$

Moment opterećenja predstavlja zbroj dvaju momenata i to: momenta tereta stroja M_t i momenta trenja M_{tr} . Sam moment trenja M_{tr} ima tri komponente i to: moment suhog trenja (Kulonovo trenje) M_{kt} , moment statičkog trenja M_{st} i moment viskoznog trenja M_{vt} . Slijedom navedenog vrijedi jednadžba:

$$M_{meh} = M_{din} + M_{opt} = M_{din} + M_t + M_{tr}$$

gdje je:

$$M_{tr} = M_{kt} + M_{st} + M_{vt}$$

Slijedom zakona o očuvanju energije vrijedi jednadžba ravnoteže momenata stroja koja glasi:

$$M_{el}(t) = M_{meh}(t)$$

Prema tome vrijedi slijedeće:

- a) Ako je $M_{el}(t) = M_{meh}(t)$ tada je stroj u stacionarnom stanju i okreće se konstantnom brzinom, pri čemu je $M_{din}(t) = 0$
- b) Ako je $M_{el}(t) > M_{meh}(t)$ tada stroj ubrzava, a ako je $M_{el}(t) < M_{meh}(t)$ stroj usporava i stroj se nalazi u prijelaznoj pojavi.

Prijelazna pojava stroja opisuje se njegovom dinamičkom karakteristikom koja se naziva prijezna funkcija (engl. *Transient Response*).

Nadzor nad električnim momentom stroja

Ukoliko je moment tereta motora vremenski ovisan (npr. ventilator, crpka i sl.) tada vrijedi da je $M_t = M_t(t)$. Automatizirani elektromotorni pogon može kompenzirati povećanje ili smanjenje momenta tereta M_t , velika rezerva omogućava višak nad momentom opterećenja, a time i veće ubrzanje i kraći odziv na promjenu momenta tereta ili referentne brzine. Viši dinamički moment M_{din} omogućava i veću rezervu kod električkog momenta M_{el} .

Nadzor M_{el} -a razlikuje se od motora do motora – može biti jednostavan ili vrlo složen. Zahvaljujući razvoju učinkovitih (energetskih) pretvarača i mikroprocesorske tehnike danas se skoro svi elektromotori mogu upotrijebiti u servo pogonima. Stoga je važno analizirati djelovanje pojedinih elektromotora i načina na koji stvaraju električni moment M_{el} .

Klasična teorija elektromotornih pogona analizirala je način kako prilagoditi krivulju električnog momenta motora zahtjevima pogona, a koji su se odnosili na teret (opterećenje) pogona. Uglavnom se to ostvarivalo:

- ✓ promjenom napona napajanja,
- ✓ prespajanjem namotaja,
- ✓ dodavanjem otpora u rotorski namotaj i sl.
- ✓ nadzirala se stacionirana radna točka, ali se nije mogla nadzirati prijelazna pojava (dakle nije se moglo nadzirati dinamičko ponašanje pogona).
- ✓ iz krivulje električnog momenta M_{el} nije se moglo nadzirati ili razabrati koliko je vremena potrebno za prijelaz iz jedne radne točke u drugu radnu točku odnosno hoće li doći do oscilacija i hoće li prijelaz biti neposredan.

Suvremeni pristup omogućava nadzor nad cjelokupnim procesom - stacionarnim stanjem radne točke i prijelaznim pojavama. Na taj način omogućava se i osigurava najbrži mogući prijelaz bez podbačaja ili prebačaja, i bez oscilacija. Naravno, sve prije navedeno nije moguće bez odgovarajućih senzora u elektromotornim pogonima kao što su endkoder, rezolver, tahogenerator i Hallov senzor. Kako bi se primjenio suvremeni pristup u nadzoru nad cjelokupnim procesom, potrebno je odrediti karakteristične krivulje elektromotornog pogona, a to su: statička karakteristika i karakteristika opterećenja. Nakon toga, potrebno je odrediti radnu točku elektromotornog pogona tako da ista bude stabilna.

2.1.1 Statička karakteristika istosmjernog stroja (DC stroj)

Općenito, statička karakteristika elektromotornog pogona predstavlja grafički dijagram ovisnosti kutne brzine rotacije rotora stroja ω u odnosu na električni moment stroja M_{el} . Prema tome vrijedi relacija:

$$\omega = f(M_{el})$$

Statička karakteristika istosmjernog stroja određuje se na temelju jednadžbe napona stroja U_m odnosno elektromotorne sile U_{ems} koju proizvodi rotacija stroja, gdje R_a otpor armature rotora. Jednadžbe su sljedeće:

$$\begin{aligned} U_m &= R_a \cdot I_a + U_{ems} \\ U_{ems} &= k \cdot \omega \end{aligned}$$

Kako je $I_a = \frac{M_{el}}{k}$ tada vrijedi:

$$U_m = R_a \cdot \frac{M_{el}}{k} + k \cdot \omega$$

Odnosno slijedi jednadžba statičke karakteristika istosmjernog stroja (DC motor) s fiksnim magnetskim tokom statora ($\Phi = const.$):

$$\omega = \frac{R_a}{k^2} \cdot M_{el} + \frac{U_m}{k}$$

Izlazna snaga motora P_{izl} tada iznosi:

$$P_{izl} = U_m \cdot \omega$$

Ulazna snaga motora P_{ul} iznosi:

$$P_{ul} = U_m \cdot I_a$$

Korisnost pretvorbe električne u mehaničku energiju označava se koeficijentom iskoristivosti stroja η prema sljedećoj relaciji:

$$\eta = \frac{P_{izl}}{P_{ul}} \leq 0,85$$

Nazivna ili nominalna vrijednost rada stroja

Nazivna ili nominalna vrijednost rada stroja je vrijednost snage, kutne brzine rotacije, momenta motora ili struje potrošnje pri kojoj je koeficijent iskoristivosti stroja maksimalan tj. vrijedi $\eta = \eta_{max}$. U tom slučaju pišemo kako je $P_{izl} = P_n$, $\omega = \omega_n$, $M_{el} = M_n$ i $I_a = I_n$

Crtanje grafa statičke karakteristike istosmjernog stroja

Polazeći od jednadžbe statičke karakteristike istosmjernog stroja, moguća su dva krajnja slučaja i to:

- a) Kada je moment stroja jednak nuli tj. vrijedi $M_{el} = 0$. Tada vrijedi da je:

$$\omega = \frac{R_a}{k^2} \cdot 0 + \frac{U_m}{k}$$

odnosno maksimalna kutna brzina ili brzina praznog hoda ω_{max} iznosi:

$$\omega_{max} = \omega_0 = \frac{U_m}{k}$$

- b) Kada je kutna brzina stroja jednaka nuli tj. vrijedi $\omega = 0$ što znači da je stroj zakočen i ne može se dalje rotirati, tada vrijedi:

$$0 = \frac{R_a}{k^2} \cdot M_{el} + \frac{U_m}{k}$$

odnosno maksimalni moment motora M_{max} iznosi:

$$M_{max} = k \cdot \frac{U_m}{R_a} = k \cdot I_{ks}$$

gdje je: I_{ks} - struja kratkog spoja

- c) Kada je kutna brzina stroja jednaka nuli tj. vrijedi $\omega = 0$, a stroj nije zakočen tada je potrebno odrediti minimalni napon pokretanja stroja U_p pri čemu je stroj opterećen nazivnim momentom M_n . Napon pokretanja stroja U_p tada iznosi:

$$U_p = \frac{R_a}{k} \cdot M_n$$

Na sljedećem primjeru pokazat će se način crtanja grafa statičke karakteristike istosmjernog stroja, kao i proračun radnih parametara stroja.

Primjer br. 1

Zadan je istosmjerni stroj s konstantim magnetskim tokom statora Φ . Zadani su sljedeći parametri: napon stroja iznosi $U_m = 430V$, konstanta stroja iznosi $k = 1,2Vs$, nazivni moment stroja iznosi $M_n = 100Nm$ i otpor aramature rotora iznosi $R_a = 0,8 \Omega$. Potrebno je nacrtati graf statičke karakteristike stroja te odrediti nazivnu snagu stroja P_n , nazivnu struju potrošnje stroja I_n , koeficijent iskoristivosti stroja η i napon pokretanja stroja U_p .

Rješenje:

Jednadžba statičke karakteristike glasi:

$$\omega = -\frac{R_a}{k^2} \cdot M + \frac{U}{k} = -\frac{0,8}{1,2^2} \cdot M + \frac{430}{1,2}$$

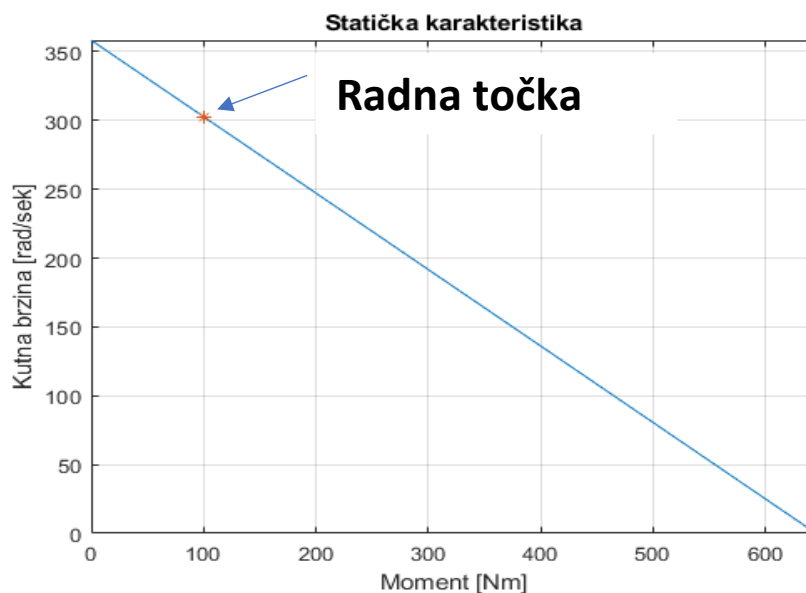
Odnosno:

$$\omega = -0,5556 \cdot M + 358,333$$

Vrijednost nazivne kutne brzine ω_n iznosi:

$$\omega_n = -0,5556 \cdot M_n + 358,333 = -0,5556 \cdot 100 + 358,333 = 302,777 \text{ rad/sek}$$

Na slici 2.4 prikazana je statička karakteristika i radna točka.



Sl. 2.4 - Statička karakteristika i radni parametri istosmjernog stroja

Nazivna snaga P_n iznosi:

$$P_n = M_n \cdot \omega_n = 100 \cdot 302,77 = 30,277kW$$

Nazivna struja potrošnje I_n iznosi:

$$I_n = \frac{M_n}{k} = \frac{100}{1,2} = 83,33A$$

Ulazna snaga P_{ul} iznosi:

$$P_{ul} = U_m \cdot I_n = 430 \cdot 83,33 = 35,833 kW$$

Koeficijent iskoristivosti η iznosi:

$$\eta = \frac{P_n}{P_{ul}} = \frac{30,277}{35,833} \cong 84,5\%$$

Napon pokretanja U_p iznosi:

$$U_p = \frac{R_a}{k} \cdot M_n = \frac{0,8}{1,2} \cdot 100 = 66,67V$$

Karakteristika opterećenja

Karakteristika opterećenja rezultat je djelovanja reaktivnih momenata stroja koji rezultiraju mehaničkim momentom te je određena je sljedećom jednažbom:

$$M_{meh} = M_{din} + M_t + M_{kt} + M_{st} + M_{vt}$$

Dinamički moment posljedica je sile inercije, stoga vrijedi relacija:

$$M_{din} = J_m \cdot \dot{\omega}$$

gdje je:

$$J_m = m \cdot r^2 - \text{moment inrcije stroja [kgm}^2\text{]}$$

Moment viskoznog trenja nastaje u kugličnim ležajevima rotora i vrijedi relacija:

$$M_{vt} = k_v \cdot \omega$$

gdje je:

$$k_v - \text{konstanta viskoznog trenja [Nms/rad]}$$

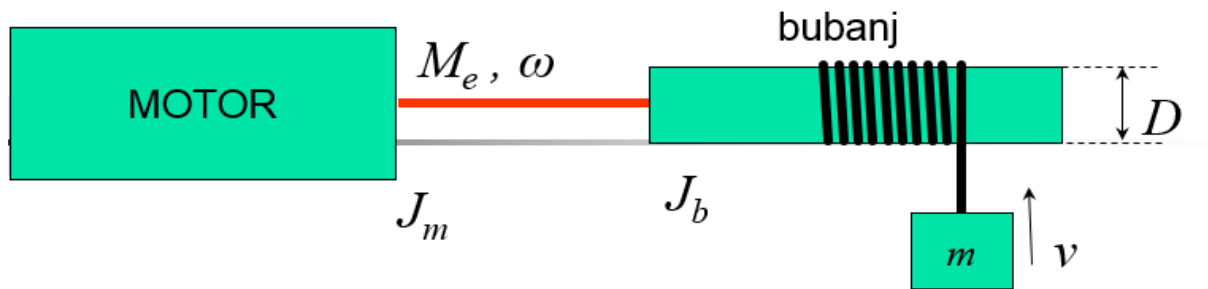
Moment statičkog trenja i moment suhog trenja mogu se zanemariti.

Na sljedećem primjeru pokazati će se način određivanja karakteristike opterećenja za slučaj električne dizalice.

Primjer br. 2

Na slici 2.5. dat je shematski prikaz električne dizalice koja se sastoji od istosmjernog motora, bubnja, čelične saile i tereta. Zadani su sljedeći dodatni podaci: moment inercije stroja $J_m = 0,8 \text{ kgm}^2$, moment inercije bubnja $J_b = 1,2 \text{ kgm}^2$, konstanta viskoznog trenja $k_v = 0,1 \text{ Nms/rad}$, promjer bubnja $D = 20 \text{ cm}$, masa tereta $m = 100 \text{ kg}$ i linearna brzina podizanja

tereta $v = 10\text{m/s}$. Ostali podaci isti su kao i u primjeru br. 1. Potrebno je odrediti radnu točku stroja i dizalice, struju potrošnje I i koeficijent iskoristivosti η .



Sl. 2.5 – Shematski prikaz električne dizalice

Rješenje:

Radna točka stroja je ona točka u kojoj se sjeku statistička karakteristika stroja i karakteristika opterećenja (u ovom slučaju dizalice) u stacionarnom stanju.

Opće rješenje bilo bi sljedeće:

$$M_{meh} = M_{din} + M_t + M_{vt}$$

Odnosno:

$$M_{meh} = J_{uk} \cdot \dot{\omega} + M_t + k_v \cdot \omega$$

gdje:

$$J_{uk} - \text{ukupni moment inercije [kgm}^2\text{]}$$

Ukupan moment inercije iznosi:

$$J_{uk} = J_m + J_b + J_t = J_m + J_b + \frac{m \cdot D^2}{4}$$

Moment tereta iznosi:

$$M_t = \frac{m \cdot g \cdot D}{2}$$

gdje je :

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2 - \text{gravitacija}$$

Kutna brzina podizanja tereta iznosila bi:

$$\omega = 2 \cdot \frac{v}{D}$$

Optimizacija izbora radne točke rada stroja u odnosu na opterećenje jedna je od najvažnijih zadaća projektiranja pogona. Optimizacija se provodi na temelju sljedeće jednadžbe:

$$M_{el} = M_{meh}$$

Slijedi da je:

$$M_{el} = \frac{k}{R_a} \cdot (U_m - k \cdot \omega)$$

$$M_{meh} = J_{uk} \cdot \dot{\omega} + M_t + k_v \cdot \omega$$

Odnosno vrijedi:

$$\frac{k}{R_a} \cdot (U_m - k \cdot \omega) = J_{uk} \cdot \dot{\omega} + M_t + k_v \cdot \omega$$

Sređivanjem dobija se:

$$-J_{uk} \cdot \dot{\omega} = M_t + k_v \cdot \omega - \frac{k}{R_a} \cdot (U_m - k \cdot \omega)$$

Završno vrijedi:

$$J_{uk} \cdot \dot{\omega} = \frac{k}{R_a} \cdot (U_m - k \cdot \omega) - M_t - k_v \cdot \omega$$

Kako je u stacionarnom stanju $\dot{\omega} = 0$, može se pisati da je:

$$0 = \frac{k}{R_a} \cdot U_m - M_t - \left(\frac{k^2}{R_a} + k_v\right) \cdot \omega$$

Napon stroja iznosi:

$$U_m = \frac{R_a}{k} [M_t + \left(\frac{k^2}{R_a} + k_v\right) \cdot \omega] = \frac{R_a}{k} \cdot M_t + \left(k + \frac{k_v}{k} \cdot R_a\right) \cdot \omega$$

Općenito tada statička karakteristika istosmjernog stroja glasi:

$$\omega = -\frac{1}{k + \frac{k_v}{k} \cdot R_a} \frac{R_a}{k} M + \frac{U_m}{k + \frac{k_v}{k} \cdot R_a} = -\frac{R_a}{k^2 + k_v \cdot R_a} M + \frac{k \cdot U_m}{k^2 + k_v \cdot R_a}$$

Struju potrošnje I moguće je odrediti na temelju sljedećih relacija:

$$U_m = R_a \cdot I + k \cdot \omega$$

$$M_t = k \cdot I - k_v \cdot \omega$$

Slijedi:

$$I = \frac{k \cdot M_t + k_v \cdot U_m}{k^2 + k_v \cdot R_a}$$

Izlazna snaga stroja iznosi:

$$P_{izl} = M_t \cdot \omega$$

Ulazna snaga stroja iznosi:

$$P_{ul} = U_m \cdot I$$

Koeficijent iskoristivosti motora iznosi:

$$\eta = \frac{P_{izl}}{P_{ul}}$$

Moment inercije J_t iznosi:

$$J_t = \frac{m \cdot D^2}{4} = \frac{100 \cdot 0,2^2}{4} = 1 \text{kgm}^2$$

Ukupni moment inercije J_{uk} iznosi:

$$J_{uk} = J_m + J_b + J_t = 0,8 + 1,2 + 1 = 3 \text{kgm}^2$$

Moment tereta M_t iznosi:

$$M_t = \frac{m \cdot g \cdot D}{2} = \frac{100 \cdot 9,81 \cdot 0,2}{2} = 98,1 \text{Nm}$$

Kutna brzina podizanja tereta ω iznosi:

$$\omega = 2 \cdot \frac{v}{D} = 2 \cdot \frac{10}{0,2} = 100 \text{rad/sek}$$

Odnosno broj okretaja n iznosi:

$$n = \frac{30}{\pi} \cdot \omega = \frac{30}{\pi} \cdot 100 = 636,62 \text{okr/min}$$

Moment opterećenja M_{opt} iznosi:

$$M_{opt} = M_t + k_v \cdot \omega = 98,1 + 0,1 \cdot 100 = 108,1 \text{Nm}$$

Potreban napon stroja U_m iznosi:

$$U_m = \frac{R_a}{k} \cdot M_t + \left(k + \frac{k_v}{k} \cdot R_a \right) \cdot \omega = \frac{0,8}{1,2} \cdot 98,1 + \left(1,2 + \frac{0,1}{1,2} \cdot 0,8 \right) = 192 \text{V}$$

Statička karakteristika iznosi:

$$\omega = -\frac{R_a}{k^2 + k_v \cdot R_a} M + \frac{k \cdot U_m}{k^2 + k_v \cdot R_a} = -\frac{0,8}{1,2^2 + 0,1 \cdot 0,8} M + \frac{1,2 \cdot 192}{1,2^2 + 0,1 \cdot 0,8}$$

Odnosno:

$$\omega = -0,5263 \cdot M + 151,63$$

Struja potrošnje I iznosi:

$$I = \frac{k \cdot M_t + k_v \cdot U_m}{k^2 + k_v \cdot R_a} = \frac{1,2 \cdot 98,1 + 0,1 \cdot 192}{1,2^2 + 0,1 \cdot 0,8} = 90 \text{A}$$

Izlazna snaga stroja P_{izl} iznosi:

$$P_{izl} = M_t \cdot \omega = 98,1 \cdot 100 = 9,81 \text{kW}$$

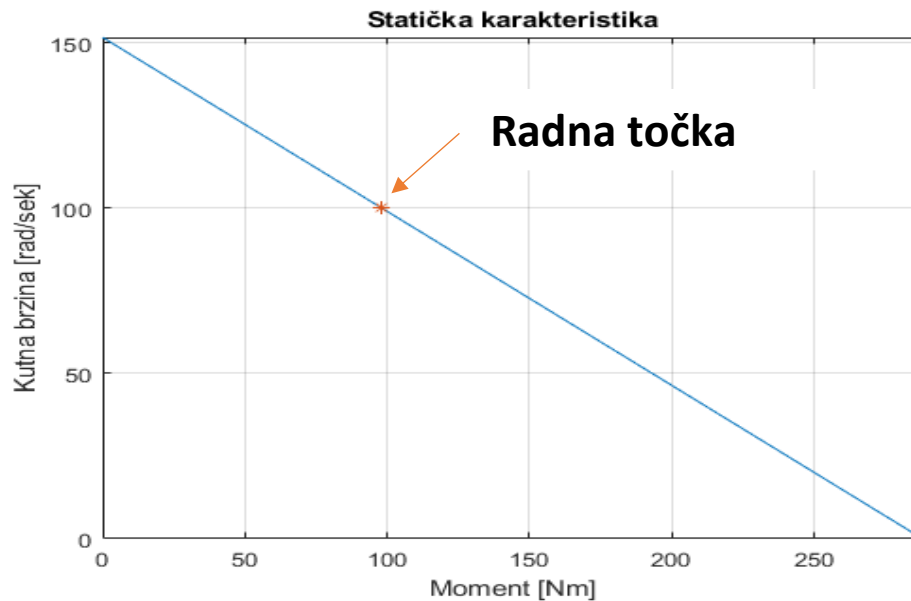
Ulazna snaga stroja P_{ul} iznosi:

$$P_{ul} = U_m \cdot I = 192 \cdot 90 = 17,3 \text{kW}$$

Koeficijent iskoristivosti motora η iznosi:

$$\eta = \frac{P_{izl}}{P_{ul}} = \frac{9,81}{17,3} \cong 56,7\%$$

Na slici 2.6 prikazana je statička karakteristika i radna točka.



Sl. 2.6 – Radna točka stroja

2.1.2 Dinamička karakteristika istosmjernog stroja (DC motor)

Dinamička karakteristika istosmjernog stroja uzima u obzir prijelaznu pojavu stoga je ovisna o vremenu. Osim dinamičkog momenta $M_{din} = M_{din}(t)$ potrebno je uzeti u obzir i induktivitet armature rotora stroja L_a [H]. Na temelju ekvivalentne električne sheme istosmjernog stroja s premanentnim magnetima odnosno fiksnim magnetskim tokom statora, postavljaju se jednažbe električne i mehaničke ravnoteže kako slijedi:

a) Električna ravnoteža

$$R_a \cdot I(t) + \dot{I}(t) \cdot L_a = U_m(t) - k \cdot \omega(t)$$

b) Mehanička ravnoteža

$$J_m \cdot \dot{\omega}(t) + k_v \cdot \omega(t) = k \cdot I(t) - M_t(t)$$

Kako se radi o diferencijalnim jednadžbama, koristit će se Lapalceova transformacija. Slijedi transformacija u s područje:

$$R_a \cdot I(s) + s \cdot I(s) \cdot L_a = U_m(s) - k \cdot \Omega(s)$$

$$J_m \cdot s \cdot \Omega(s) + k_v \cdot \Omega(s) = k \cdot I(s) - M_t$$

Sređivanjem relacija dobija se:

$$(s \cdot L_a + R_a) \cdot I(s) + k \cdot \Omega(s) = U_m(s)$$

$$k \cdot I(s) - (J_m \cdot s + k_v) \cdot \Omega(s) = M_t(s)$$

Korištenjem determinanti određujemo dinamičke karakteristike istosmjernog stroja kako slijedi:

$$I(s) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} U_m(s) & k \\ M_t(s) & -(J_m \cdot s + k_v) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s \cdot L_a + R_a & k \\ k & -(J_m \cdot s + k_v) \end{vmatrix}}$$

$$\Omega(s) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} s \cdot L_a + R_a & U_m(s) \\ k & M_t(s) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s \cdot L_a + R_a & k \\ k & -(J_m \cdot s + k_v) \end{vmatrix}}$$

Sređivanjem slijedi:

$$I(s) = \frac{-(J_m \cdot s + k_v) \cdot U_m(s) - k \cdot M_t(s)}{-(s \cdot L_a + R_a) \cdot (J_m \cdot s + k_v) - k^2}$$

$$\Omega(s) = \frac{(s \cdot L_a + R_a) \cdot M_t(s) - k \cdot U_m(s)}{-(s \cdot L_a + R_a) \cdot (J_m \cdot s + k_v) - k^2}$$

Vrijedi:

$$I(s) = \frac{(J_m \cdot s + k_v) \cdot U_m(s)}{(s \cdot L_a + R_a) \cdot (J_m \cdot s + k_v) + k^2} + \frac{k \cdot M_t(s)}{(s \cdot L_a + R_a) \cdot (J_m \cdot s + k_v) + k^2}$$

Odnosno

$$I(s) = G_{mI}(s) \cdot U_m(s) + G_{tI}(s) \cdot M_t(s)$$

Gdje je:

$$G_{mI}(s) = \frac{J_m \cdot s + k_v}{(s \cdot L_a + R_a) \cdot (J_m \cdot s + k_v) + k^2}$$

$$G_{tI}(s) = \frac{k}{(s \cdot L_a + R_a) \cdot (J_m \cdot s + k_v) + k^2}$$

Jednako tako vrijedi:

$$\Omega(s) = \frac{k \cdot U_m(s)}{(s \cdot L_a + R_a) \cdot (J_m \cdot s + k_v) + k^2} - \frac{(s \cdot L_a + R_a) \cdot M_t(s)}{(s \cdot L_a + R_a) \cdot (J_m \cdot s + k_v) + k^2}$$

Odnosno

$$\Omega(s) = G_{m\Omega}(s) \cdot U_m(s) - G_{t\Omega}(s) \cdot M_t(s)$$

Gdje je:

$$G_{m\Omega}(s) = \frac{k}{(s \cdot L_a + R_a) \cdot (J_m \cdot s + k_v) + k^2}$$

$$G_{t\Omega}(s) = \frac{(s \cdot L_a + R_a)}{(s \cdot L_a + R_a) \cdot (J_m \cdot s + k_v) + k^2}$$

Karakteristična jednadžba $A(s)$ iznosi:

$$\begin{aligned} A(s) &= (s \cdot L_a + R_a) \cdot (J_m \cdot s + k_v) + k^2 \\ &= L_a \cdot J_m \cdot s^2 + (R_a \cdot J_m + L_a \cdot k_v) \cdot s + R_a \cdot k_v + k^2 \end{aligned}$$

Koristeći prije navedene relacije odredit će se prijelazna funkcija struje I i kutne brzine stroja ω za slučaj dizalice.

Primjer br. 3.

Potrebno je odrediti se prijelaznu funkcija struje I i kutne brzine stroja ω za slučaj dizalice za prije zadane parametre uz uvjet da je induktivitet armature rotora jednak $L_a = 10\text{mH}$ i da se koristi ukupni moment inercije J_{uk} kao moment motora J_m .

Rješenje:

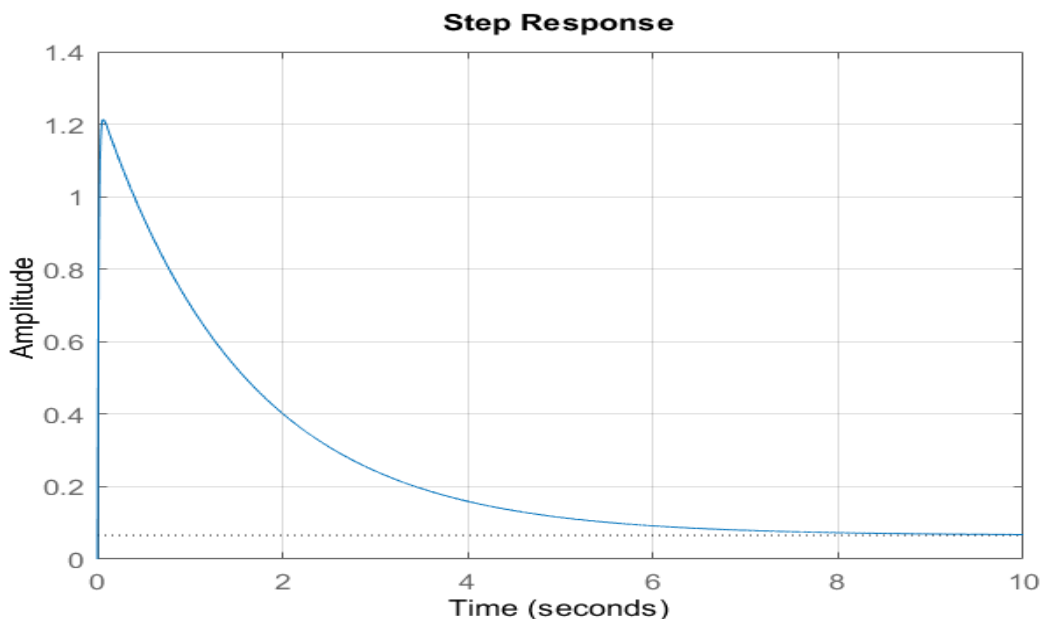
Prijenosna funkcija $G_{mI}(s)$ iznosi:

$$G_{mI}(s) = \frac{J_m \cdot s + k_v}{(L_a \cdot s + R_a) \cdot (J_m \cdot s + k_v) + k^2} = \frac{3 \cdot s + 0,1}{(0,01 \cdot s + 0,8) \cdot (3 \cdot s + 0,1) + 1,2^2}$$

Odnosno:

$$G_{mI}(s) = \frac{3 \cdot s + 0,1}{0,03 \cdot s^2 + 2,4 \cdot s + 1,52}$$

Na slici 2.7 prikazan je odziv prijenosne funkcija $G_{mI}(s)$ na step pobudu u prijelaznom procesu.



Sl. 2.7 - Odziv prijenosne funkcija $G_{mI}(s)$ na step pobudu

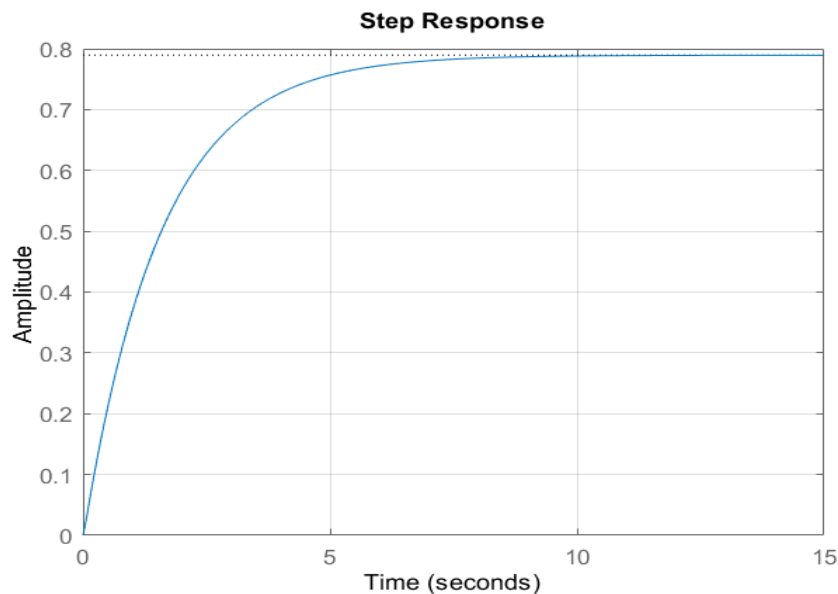
Prijenosna funkcija $G_{tl}(s)$ iznosi:

$$G_{tl}(s) = \frac{k}{(L_a \cdot s + R_a) \cdot (J_m \cdot s + k_v) + k^2} = \frac{1,2}{(0,01 \cdot s + 0,8) \cdot (3 \cdot s + 0,1) + 1,2^2}$$

Odnosno:

$$G_{tl}(s) = \frac{1,2}{0,03 \cdot s^2 + 2,4 \cdot s + 1,52}$$

Na slici 2.8 prikazan je odziv prijenosne funkcija $G_{tl}(s)$ na step pobudu u prijelaznom procesu.



Sl. 2.8 - Odziv prijenosne funkcija $G_{tl}(s)$ na step pobudu

Prijelazna funkcija struje $I(s)$ iznosila bi:

$$I(s) = \frac{(J_m \cdot s + k_v) \cdot U_m(s)}{(L_a \cdot s + R_a) \cdot (J_m \cdot s + k_v) + k^2} + \frac{k \cdot M_t(s)}{(L_a \cdot s + R_a) \cdot (J_m \cdot s + k_v) + k^2}$$

Odnosno:

$$I(s) = \frac{3 \cdot s + 0,1}{0,03 \cdot s^2 + 2,4 \cdot s + 1,52} U_m(s) + \frac{1,2}{0,03 \cdot s^2 + 2,4 \cdot s + 1,52} M_t(s)$$

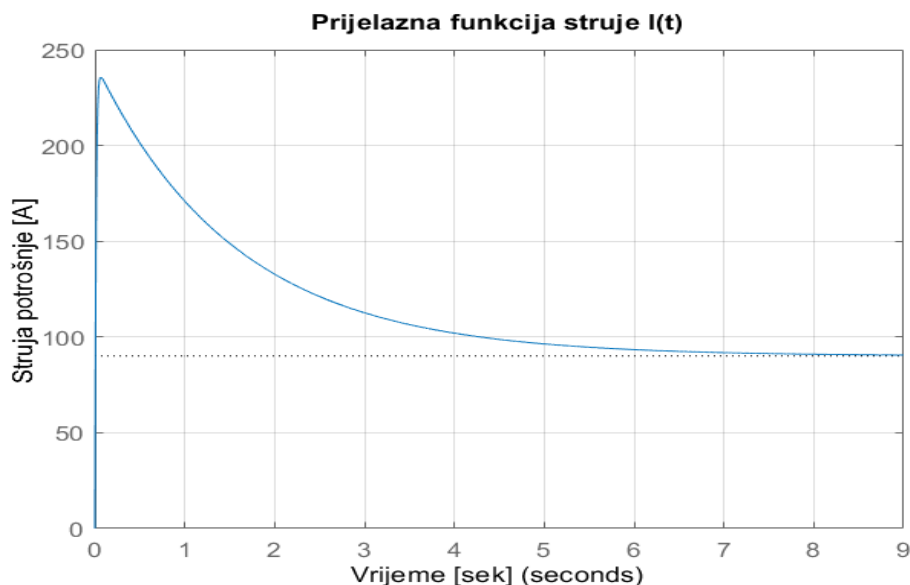
Gdje je:

$$U_m(s) = \frac{430}{s}$$

$$M_t(s) = \frac{98,1}{s}$$

Na slici 2.9 prikazana je prijelazna funkcija struje $I = I(t)$ na step pobudu tijekom prijelaznog procesa do stacionarnog stanja stroja, te se može uočiti kako je prisutna prijelazna pojava pri

čemu je maksimalna struja I_{max} na početku procesa koja zatim pada na vrijednost struje u radnoj točki.



Sl. 2.9 – Prijelazna funkcija struje $I = I(t)$

Na temelju prijelazne funkcije struje $I = I(t)$ može uočiti kako je maskimalna povučena struja $I_{max} = 235A$ dok je struja potrošnje uradnoj točki jednaka $I = 90,58A$. Rezultat odgovara vrijednosti koja je utvrđena pri crtanju grafa statičke karakteristike. Jednako tako uočava se trajanje prijelaznog procesa od cca 9 sekundi kada stroj ulazi u stacionarno (ustaljeno) stanje.

Analogno prethodno prikazanome, određena je prijenosna funkcija $G_{m\Omega}(s)$:

$$G_{m\Omega}(s) = \frac{k}{(L_a \cdot s + R_a) \cdot (J_m \cdot s + k_v) + k^2} = \frac{1,2}{(0,01 \cdot s + 0,8) \cdot (3 \cdot s + 0,1) + 1,2^2}$$

Odnosno:

$$G_{m\Omega}(s) = \frac{1,2}{0,03 \cdot s^2 + 2,4 \cdot s + 1,52}$$

Jednako tako prijenosna funkcija

$$G_{t\Omega}(s) = \frac{(L_a \cdot s + R_a)}{(L_a \cdot s + R_a) \cdot (J_m \cdot s + k_v) + k^2} = \frac{0,01 \cdot s + 0,8}{(0,01 \cdot s + 0,8) \cdot (3 \cdot s + 0,1) + 1,2^2}$$

Odnosno:

$$G_{t\Omega}(s) = \frac{0,01 \cdot s + 0,8}{0,03 \cdot s^2 + 2,4 \cdot s + 1,52}$$

Slijedom prije napisnoga prijenosna funkcija kutne brzine $\Omega(s)$ iznosi:

$$\Omega(s) = \frac{k \cdot U_m(s)}{(s \cdot L_a + R_a) \cdot (J_m \cdot s + k_v) + k^2} = \frac{(s \cdot L_a + R_a) \cdot M_t(s)}{(s \cdot L_a + R_a) \cdot (J_m \cdot s + k_v) + k^2}$$

Odnosno:

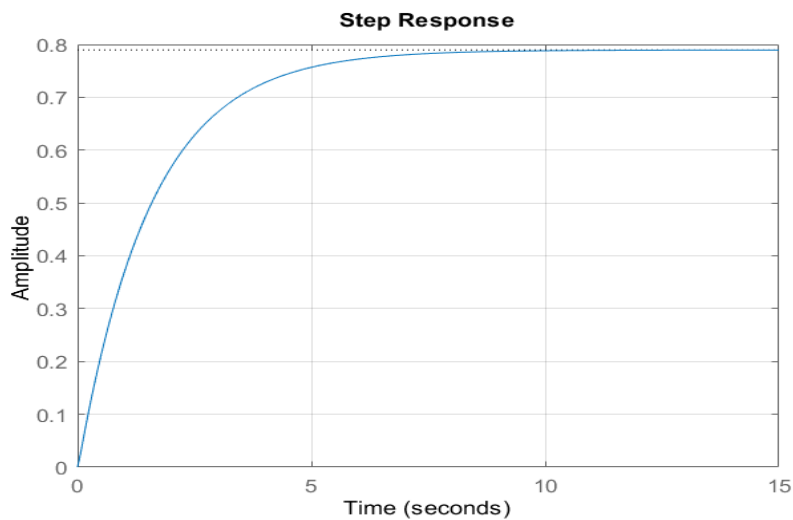
$$\Omega(s) = \frac{1,2}{0,03 \cdot s^2 + 2,4 \cdot s + 1,52} U_m(s) - \frac{0,01 \cdot s + 0,8}{0,03 \cdot s^2 + 2,4 \cdot s + 1,52} M_t(s)$$

Gdje je:

$$U_m(s) = \frac{430}{s}$$

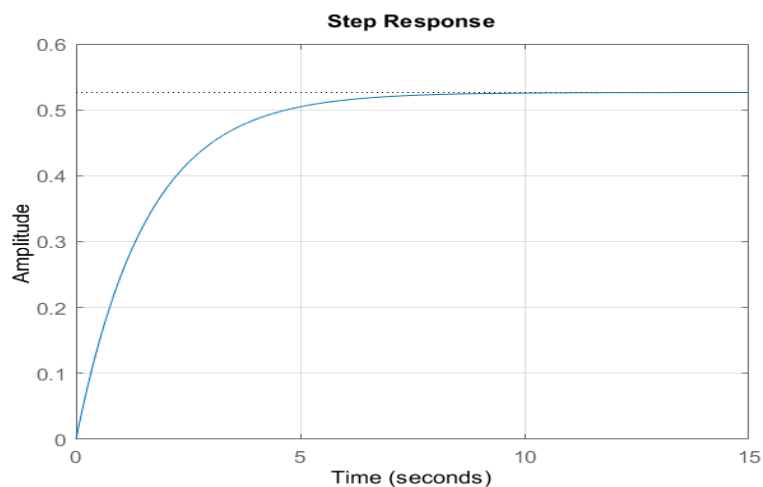
$$M_t(s) = \frac{98,1}{s}$$

Na slici 2.10 prikazan je odziv prijenosne funkcija $G_{m\Omega}(s)$ na step pobudu u prijelaznom procesu.



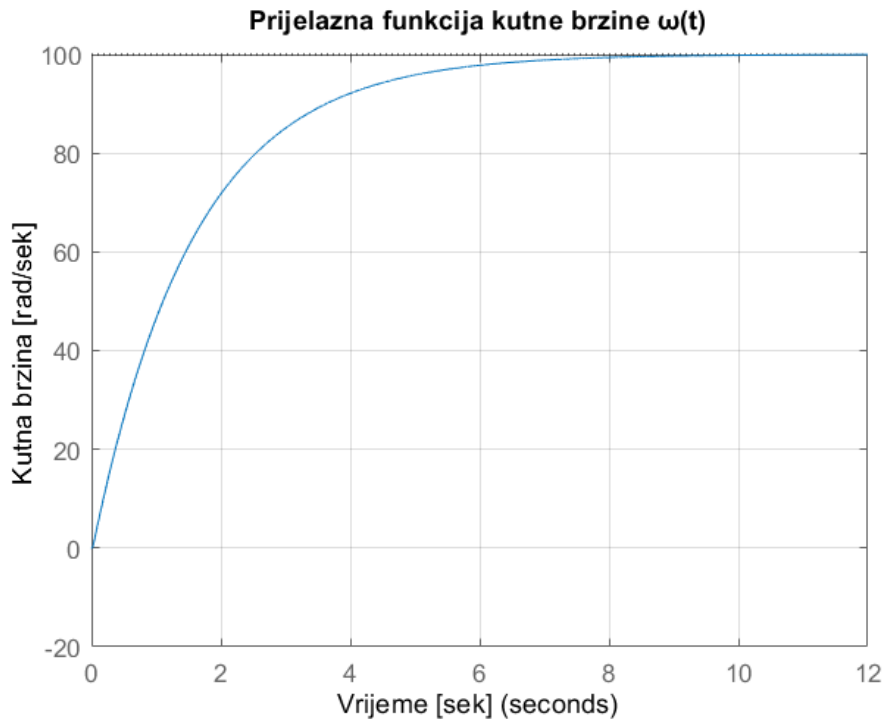
Sl. 2.10 - Odziv prijenosne funkcija $G_{m\Omega}(s)$ na step pobudu

Na slici 2.11 prikazan je odziv prijenosne funkcija $G_{t\Omega}(s)$ na step pobudu u prijelaznom procesu.



Sl. 2.11 - Odziv prijenosne funkcija $G_{t\Omega}(s)$ na step pobudu

Na slici 2.12 prikazana je vrijednost kutne brzine ω tijekom prijelaznog procesa do stacionarnog stanja stroja, te se može uočiti kako prijelazna pojava pri čemu je prijelazni proces monoton.



Sl. 2.12 – Prijelazna funkcija struje $\omega = \omega(t)$

Na temelju prijelazne funkcije kutne brzine $\omega = \omega(t)$ može uočiti kako je prijelazni proces monoton i vrijednost kutne brzine u stacionatnom stanju iznosi $\omega = 100 \text{ rad/sek}$. Rezultat odgovara vrijednosti koja je utvrđena pri crtanju grafa statičke karakteristike. Jednako tako uočava se, kao i u prethodnom slučaju, trajanje prijelaznog procesa od cca 9 sekundi kada stroj ulazi u stacionarno (ustaljeno) stanje.

Prethodno predstavljani model kojim je opisana dinamika istosmjernog stroja naziva SISO model (engl. Single Input Single Output), u nastavku žće se prikazati MIMO modle (engl. Multiple Input Multiple Output)

MIMO model

Osim SISO modela, dinamika istosmjernog stroja može se opisati MIMO modelom (engl. Multiple Input Multiple Output), a radi se modeliranju u prostoru stanja. Matematički opis određen je na temelju modela opisanog prije datim relacijama odnosno jednadžbama električne i mehaničke ravnoteže:

$$R_a \cdot I(s) + s \cdot I(s) \cdot L_a = U_m(s) - k \cdot \Omega(s)$$

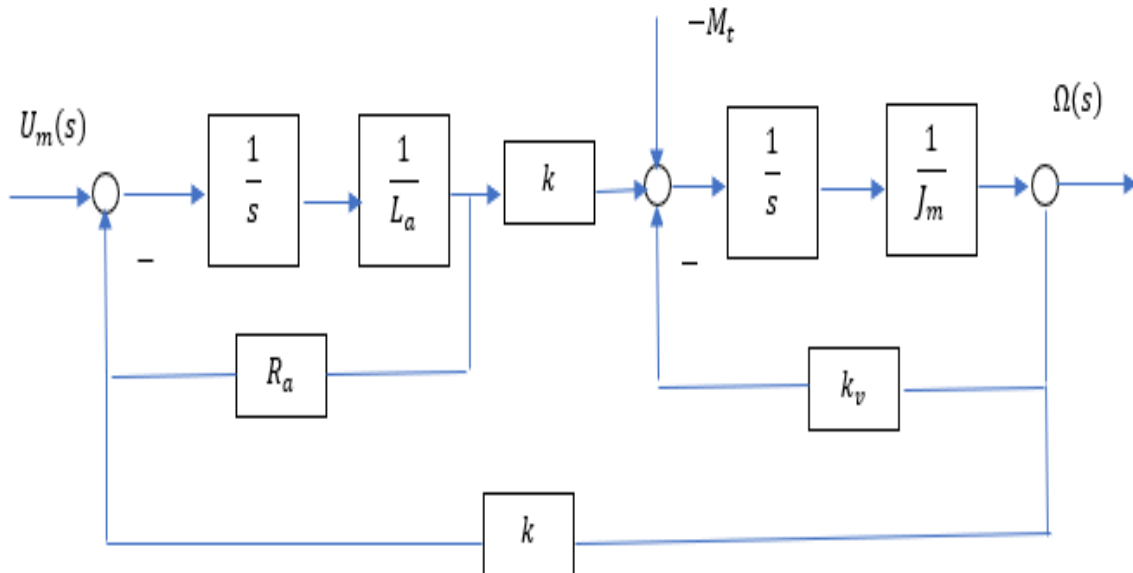
$$J_m \cdot s \cdot \Omega(s) + k_v \cdot \Omega(s) = k \cdot I(s) - M_t$$

Na temelju prije navedenih jednadžbi slijedi:

$$G_{el}(s) = \frac{I(s)}{U_m(s) - k \cdot \Omega(s)} = \frac{1}{s \cdot L_a + R_a} = \frac{\frac{1}{L_a \cdot s}}{1 + \frac{R_a}{L_a \cdot s}}$$

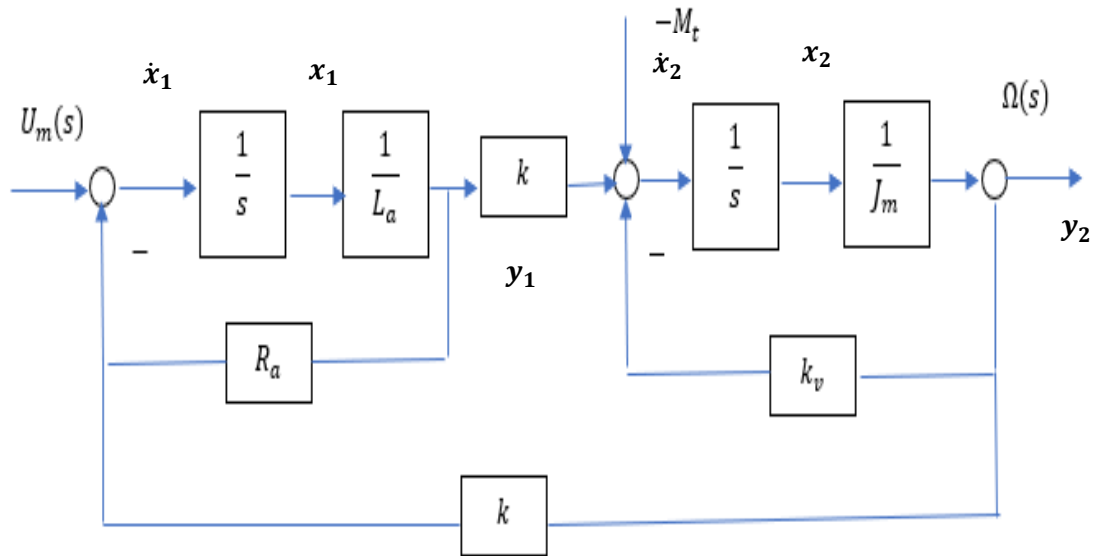
$$G_{meh}(s) = \frac{\Omega(s)}{k \cdot I(s) - M_t} = \frac{1}{s \cdot J_m + k_v} = \frac{\frac{1}{J_m \cdot s}}{1 + \frac{k_v}{J_m \cdot s}}$$

Model istosmjernog stroja u prostoru stanja prikazan je na slici 2.13:



sl. 2.13 – Model istosmjernog stroja u prostoru stanja

Uz prije navedeni model na sl. 2.13 potrebno je uvesti varijable stanja kako je prikazano na slici 2.14.



sl. 2.14 – Model istosmjernog stroja u prostoru stanja s varijablama stanja

Na temelju modela prikazanog na slici 2.12 vrijede sljedeće jednačbe:

$$\dot{x}_1 = -\frac{R_a}{L_a} \cdot x_1 - \frac{k}{J_m} \cdot x_2 + U_m \cdot 1$$

$$\dot{x}_2 = \frac{k}{L_a} \cdot x_1 - \frac{k_v}{J_m} \cdot x_2 - M_t \cdot 1$$

$$y_1 = \frac{1}{L_a} \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 +$$

$$y_2 = 0 \cdot x_1 + \frac{1}{J_m} \cdot x_2$$

Sređivanjem jednačbi slijedi:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{k}{J_m} \\ \frac{k}{L_a} & -\frac{k_v}{J_m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_m \\ -M_t \end{bmatrix} \cdot 1$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

U MIMO modelu određene su sljedeće matrice:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{k}{J} \\ \frac{k}{L} & -\frac{k_v}{J} \end{bmatrix} - \text{matrica sustava}$$

$$B = \begin{bmatrix} U_m \\ -M_t \end{bmatrix} - \text{matrica upravljanja}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ & J \end{bmatrix} - \text{matrica izlaza}$$

Ulazno izlazna matrica jednaka je nuli. Označava se sa $D = [0]$.

Primjer br. 4

Potrebno je odrediti se prijelaznu funkcija struje I i kutne brzine stroja ω za slučaj dizalice za prije zadane parametre pomoću MIMO modela.

Rješenje (programska rutina u MatLab-u) je sljedeće:

```
'Zadano'
Jm=0.8 %Moment inercije stroja [kgm^2]
Jb=1.2 %Moment inercije bubnja [kgm^2]
kv=0.1 %Konstanta viskoznog trenja [Nms/rad]
D=0.2 %Promjer bubnja [m]
m=100 %Masa tereta [kg]
v=10 %Brzina podizanja tereta [m/s]
g=9.81 %Gravitacija [m/sek^2]
Ra=0.8 %Otpor armature [Om]
k=1.2 %Konstanta motora [Vs]
La=10e-3 %Induktivitete armature [H]

'Rješenje'
'1-Moment inercije tereta i ukupni moment inercije [kgm^2]'
Jt=m*D^2/4 %Moment inercije tereta
Juk=Jm+Jb+Jt %Ukupni moment inercije

'2-Moment tereta [Nm]'
Mt=m*g*D/2 %Moment tereta stroja [Nm]

'3-Kutna brzina podizanja tereta [rad/sek] i broj okretaja [okr/min]'
omr=2*v/D %Kutna brzina (radna) [rad/sek]
n=20/pi*omr %Broj okretaja stroja [okr/min]
'4-Potrebni napon stroja [V]'
Um=Ra/k*Mt+(k+kv/k*Ra)*omr %Napone stroja [V]

'5-Prijelazna funkcija I(t)'
A=[-Ra/La -k/Juk;k/La -kv/Juk];
B=[Um;-Mt];
```

```

C=[1/La 0];
D=[0];
I=ss(A,B,C,D);
[num,den]=ss2tf(A,B,C,D);
G=tf(num,den)
step(G)
title('Prijelazna funkcija struje I(t)')
xlabel('Vrijeme [sek]')
ylabel('Struja potrošnje [A]')
grid

'6-Prijelazna funkcija w(t)'
A=[-Ra/La -k/Juk;k/La -kv/Juk];
B=[Um;-Mt];
C=[0 1/Juk];
D=[0];
om=ss(A,B,C,D);
[num,den]=ss2tf(A,B,C,D);
G=tf(num,den)
step(G)
title('Prijelazna funkcija kutne brzine w(t)')
xlabel('Vrijeme [sek]')
ylabel('Kutna brzina [rad/sek]')
grid

```

Parametri

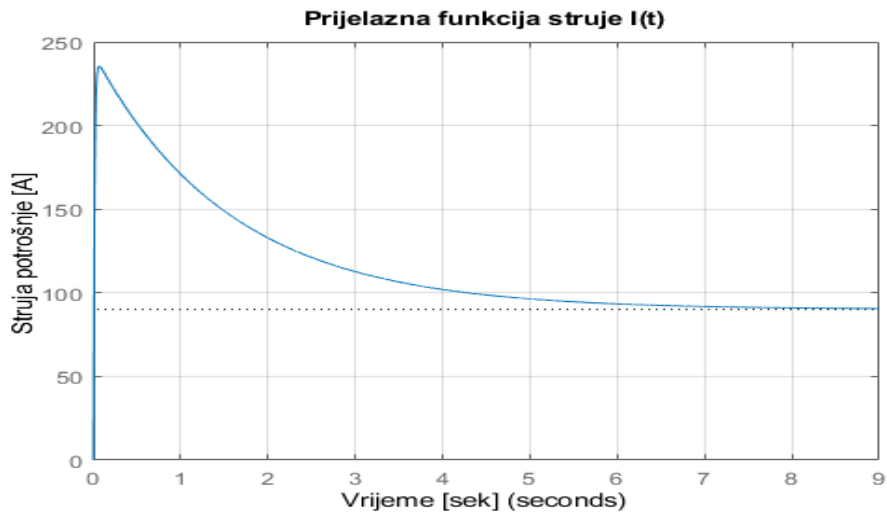
```

ans = 'Zadano'
Jm = 0.8000
Jb = 1.2000
kv = 0.1000
D = 0.2000
m = 100
v = 10
g = 9.8100
Ra = 0.8000
k = 1.2000
La = 0.0100
ans = 'Rješenje'
ans = '1-Moment inercije tereta i ukupni moment inercije [kgm^2]'
Jt = 1.0000
Juk = 3
ans = '2-Moment tereta [Nm]'
Mt = 98.1000
ans = '3-Kutna brzina podizanja tereta [rad/sek] i broj okretaja [okr/min]'
omr = 100
n = 636.6198
ans = '4-Potrebni napon stroja [V]'
Um = 192.0667

```

Na slici 2.15 prikazana je prijelazna funkciju struje $I(t)$ na step pobudu.

```
ans = '6-Prijelazna funkcija I(t)'  
G =  
-----  
1.921e04 s + 4564  
s^2 + 80.03 s + 50.67  
Continuous-time transfer function.
```



Sl. 2.15 - prijelazna funkciju struje $I(t)$ na step pobudu

Na slici 2.16 prikazana je prijelazna funkciju kutne brzine $\omega(t)$ na step pobudu.

```
ans = '6-Prijelazna funkcija ω(t)'  
G =  
-----  
-32.7 s + 5067  
s^2 + 80.03 s + 50.67  
Continuous-time transfer function.
```

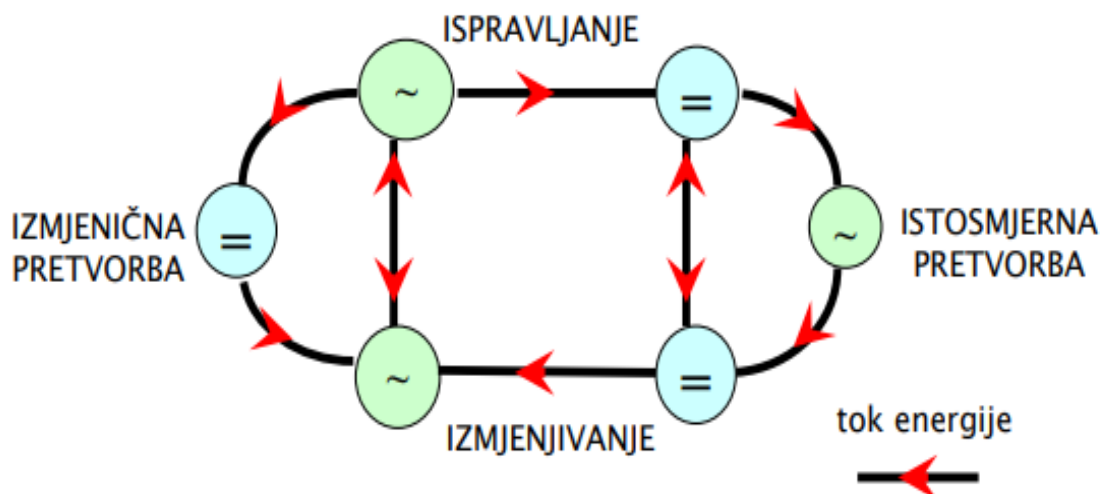


Sl. 2.16 - prijelazna funkciju kutne brzine $\omega(t)$ na step pobudu

Rezultati su identični kao i u SISO modelu.

2.2 Učinski (energetski) pretvarači istosmjernog stroja

Učinski (energetski) pretvarači koje se koriste se za upravljanje istosmjernih strojeva nazivaju se usmjerivači (engl. *Line Commutated Convertors*). Usmjerivač je poseban tip ispravljača koji omogućava izmjenu energije u dva smjera i to: a) od izmjenične na istosmjernu, i istosmjerne na izmjeničnu. Na slici 2.17. prikazana je izmjena energije kroz dvije faze: ispravljanje i izmjenjivanje.

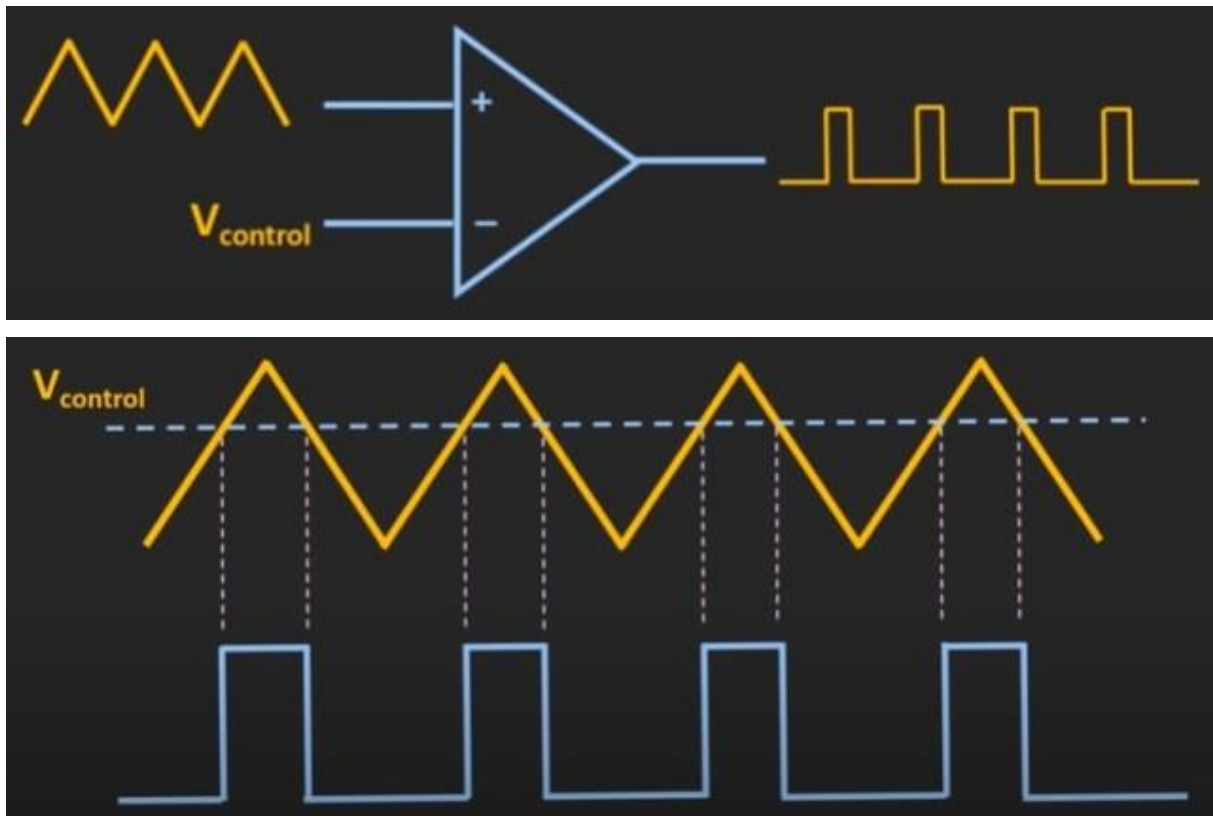


Sl. 2.17 – Usmjerivački proces sklopa za upravljanje istosmjernog stroja [Izvor: Darko Kezić]

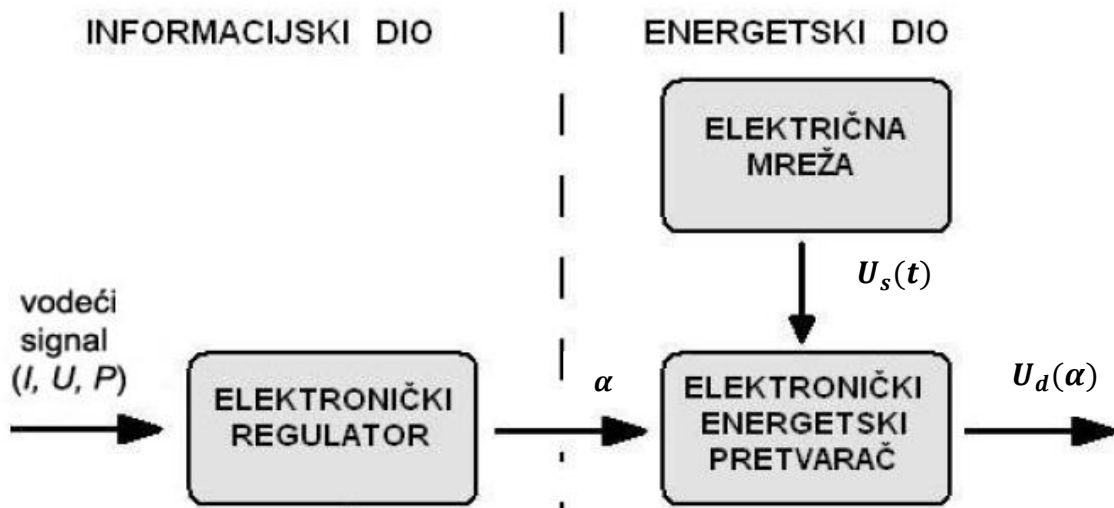
Za razliku od usmjerivača (AC/DC) koji napajaju istosmjerni stroj promjenljivim istosmjernim naponom iz standardne izmjenične mreže, postoje i istosmjerni pretvarači tzv. čoperi (engl. *Chopper*, DC/DC converter) koji konstantan istosmjerni izvor napajanja pretvaraju u promjenljivi istosmjerni napon kojim se napaja stroj.

2.2.1 Usmjerivač

Usmjerivački elementi za istosmjerni stroj uglavno su realizirani s tiristorskim poluvodičkim sklopkama koje imaju visoku razinu strujne i naponske opterećenosti. Sastavni dio usmjerivača je impulsni sklop (generator impulsa) koji osigurava sinhronizirani rad poluvodičkih tiristorskih sklopki s frekvencijom naponske mreže na koju je priključen. Još se naziva i okidni sklop. Na ulaz u usmjerivač dovodi se istosmjerni upravljački napon ($V_{control}$), kako je prikazano na slici 2.18., kojim se određuje kut okidanja tiristora α (engl. *Fire Angle*). Ovakav način modulacije naziva se pulsno širinska modulacija (engl. *Puls With Modulation, PWM*)

Sl. 2.18 – PWM modulacija⁵

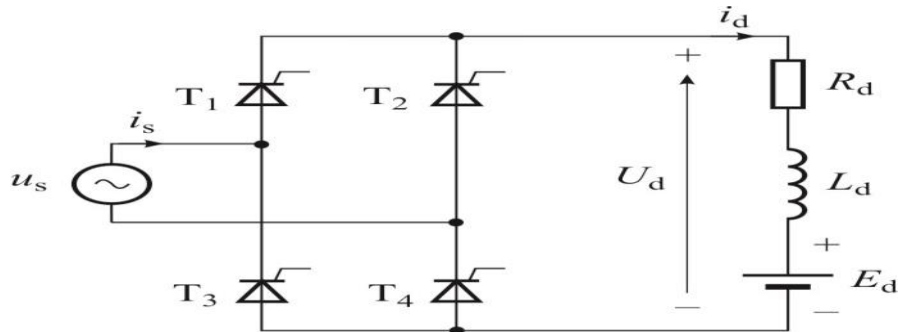
Na slici 2.19 prikazan je princip regulacije i stavni dio regulatora je PWM modulacija. Na ulazu u regulator dolazi upravljački (vodeći) signal koji određuje kut okidanja tiristora α , a na izlazu iz usmjerivača dobija se srednja vrijednost ispravljenog napona koji predstavlja ulazni napon istosmjernog stroja $U_d(\alpha)$.



Sl. 2.19 – Princip regulacije usmjerivača pomoću PWD modulacije [Izvor: FER - ZESA]

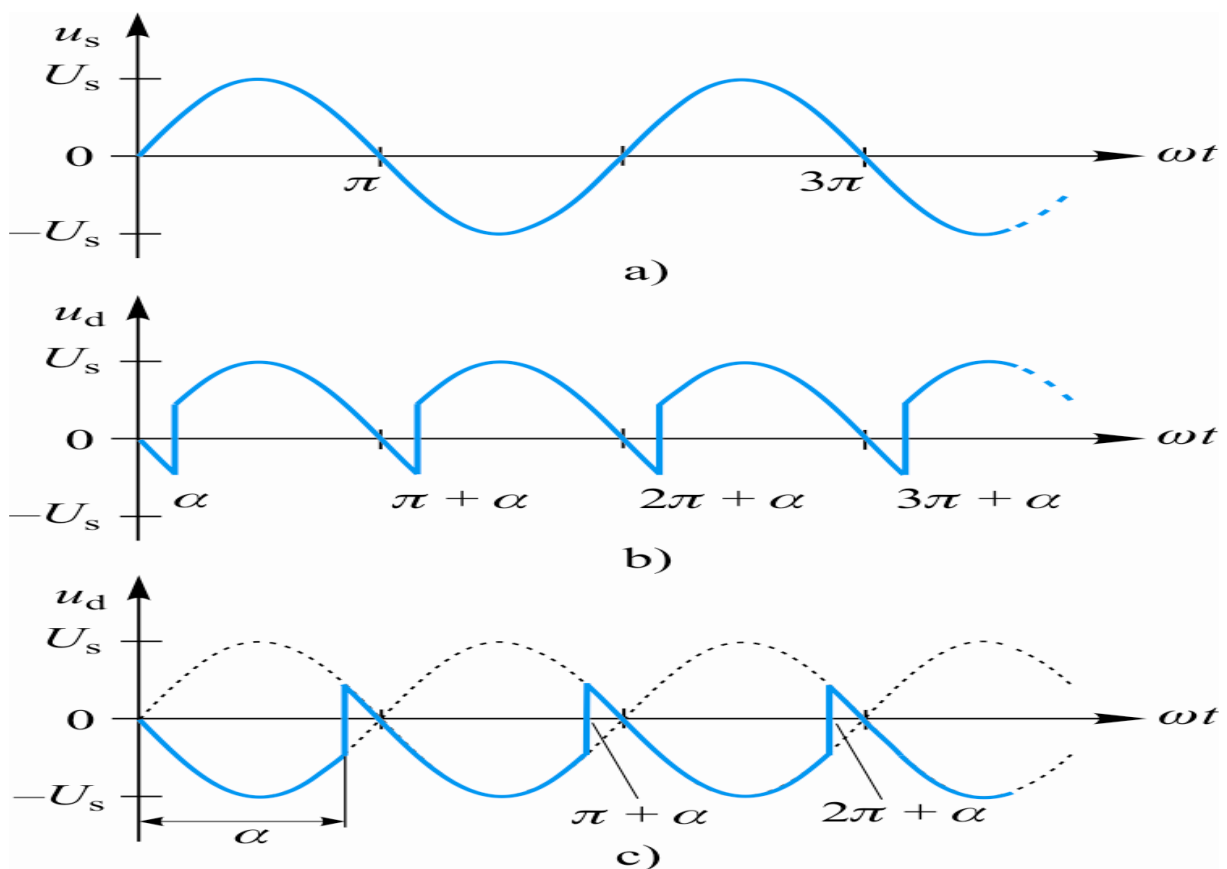
⁵ <https://www.electronicclinic.com/pulse-width-module-pwm-fully-explained-with-calculation-and-arduino-led-example/>

Na manjim snagama (do 10kW) najčešće se koriste jednofazni usmjerivač u mosnom spoju, dok se za veće snage koristi trofazni usmjerivač u mosnom spoju. Na slici 2.20 prikazan je jednofazni usmjerivač u mosnom spoju za RLE trošilo (istosmjerni stroj) sa četiri tiristora ($T_1 - T_4$)



Sl.2.20 - Jednofazni usmjerivača u mosnom spoju [Izvor: FER - ZESA]

Na slici 2.21 pod a) prikazan je ulazni signal u usmjerivač, dok se pod b) prikazuje izlazni napon u ispravljačkom načinu rada, a pod c) prikazuje se izlazni napon u izmjenjivačkom načinu rada usmjerivača. Do promjena načina rada (moda) dolazi kada je kut okidanja tiristora $\alpha \geq 90^\circ$



Sl. 2.21 – Princip rada usmjerivača [Izvor: FER - ZESA]

Srednja vrijednost napona U_d na izlazu iz usmjerivača za kut okidanja α iznosi:

$$U_d(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi+\alpha} U_s \cdot \sin \varphi d\varphi = \frac{2 \cdot U_s}{\pi} \cdot \cos \alpha = 0,636 \cdot U_s \cdot \cos \alpha$$

gdje je:

U_s – maksimalna vrijednost amplitude napona mreže [V]

Granični kut okidanja određuje se prema sljedećoj relaciji:

$$\alpha_{gr} = \arctan\left(\frac{\omega \cdot L_d}{R_d}\right) = \arctan(\omega \cdot T_d)$$

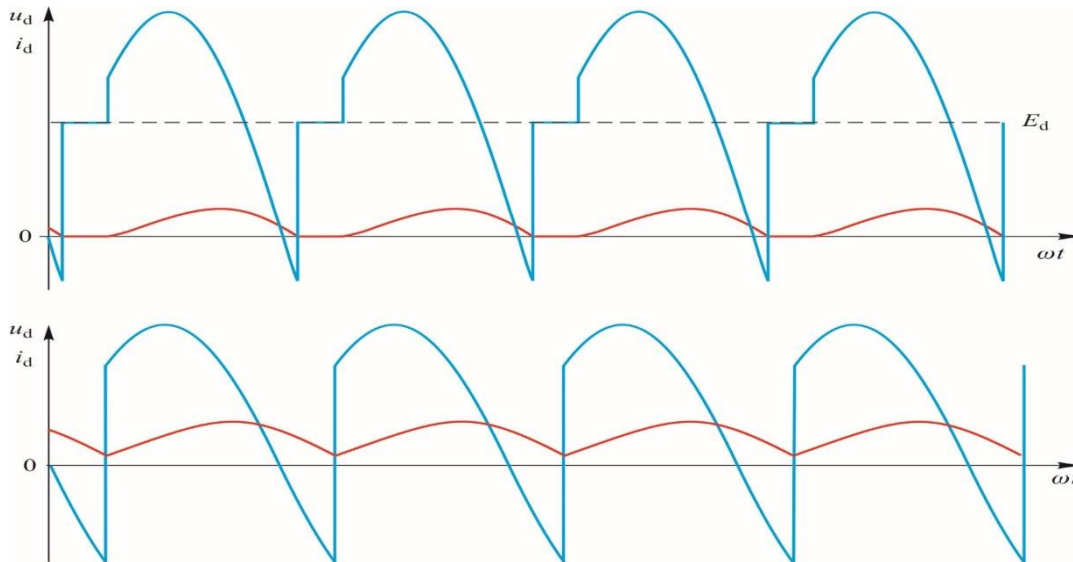
$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

gdje je:

T_d – električna vremenska konstanta RLE trošila[s]

f - frekvencija električne mreže [Hz]

Na slici 2.22 prikazana su dva moda rada usmjerivača: prvi je isprekidana struja trošila, a drugi je neisprekidana struja trošila. U prvom slučaju uočava se utjecaj elektromotorne sile E_d



Sl. 2.22 – Modovi rada usmjerivača [Izvor: FER - ZESA]

Struja potrošnje I_d iznosi:

$$I_d = \frac{U_d(\alpha) - E_d}{R_d}$$

gdje je:

E_d – inducirana elektromotorna sila [V]

Primjer br. 5

Zadan su sljedeći parametri: maksimalna amplituda napona $U_s = 240V$, kut okidanja tiristora $\alpha = 30^\circ$, induktivitet trošila iznosi $L_d = 10mH$, otpor trošila iznosi $R_d = 5\Omega$, inducirana elektromotorna sila $E_d = 50V$ i frekvencija mreže $f = 50Hz$. Potrebno je odrediti izlazni napon U_d iz jednofaznog usmjerivača u mosnom spoju (sl. 2.16), granični kut okidanja tiristora α_{gr} i struju potrošnje I_d . Jednako tako potrebno je nacrtati naponsku i upravljačku karakteristiku usmjerivača.

Rješenje (programska rutina u MatLab-u) je sljedeće:

```
'Zadano'
Us=240 %Maksimalna amplituda napona mreže
f=50 %Frekvencija mreže
alfa=30 %Kut okidanja tiristora
Rd=5 %Otpor trošila
Ld=10e-3 %Induktivitet trošila
Ed=50 %Elektromotorna sila

'Rješenje'
'1-Napon usmjerivača Ud'
Ud=2*Us/pi*cos(alfa*pi/180)
Ud0=2*Us/pi
'2-Struja usmjerivača Id'
Id=(Ud-Ed)/Rd

'3-Granični kut okidanja tiristora alfagr'
Td=Ld/Rd;
alfagr=180/pi*atan(2*pi*f*Td)

'4 - Naponska karakteristika'
alfae=180/pi*asin(Ed/Us)
syms alf
U=Us*sin(alf*pi/180);
fplot(U,[alfa 180+alfae])
hold on
U=-Us*sin(alf*pi/180);
fplot(U,[0 alfae])
hold on
fplot(Ed,[alfae alfa])
hold on
U=-Us*sin(alf*pi/180);
fplot(U,[alfa+180 360+alfae])
hold on
fplot(Ed,[alfae+180 alfa+180])
hold on
```

```
title('Naponska karakteristika' )
xlabel('Kut  $\phi$ [ $^{\circ}$ '])
ylabel('Napon  $U(\phi)$ [V]')
grid
hold off

'5 - Upravljačka karakteristika usmjerivača'
syms alf
Upk=cos(alf*pi/180);
fplot(Upk,[0 180])
p=Ud/(2*Us/pi)
hold on
plot(alfa,p, '*')
grid on

title('Upravljačka karakteristika' )
xlabel('Kut alfa  $\alpha$ [ $^{\circ}$ '])
ylabel('Ud/Ud0')
txt=['RLE trošilo'];
text(90,0.95,txt)
txt=['Napon Ud=',num2str(Ud), '[V]'];
text(90,0.75,txt)
txt=['Kut  $\alpha$ =',num2str(alfa), '[ $^{\circ}$ ]'];
text(90,0.65,txt)
txt=['Kut granični  $\alpha$ =',num2str(alfagr), '[ $^{\circ}$ ]'];
text(90,0.55,txt)
hold off
```

Parametri

```
ans = 'Zadano'
Us = 240
f = 50
alfa = 30
Rd = 5
Ld = 0.0100
Ed = 50

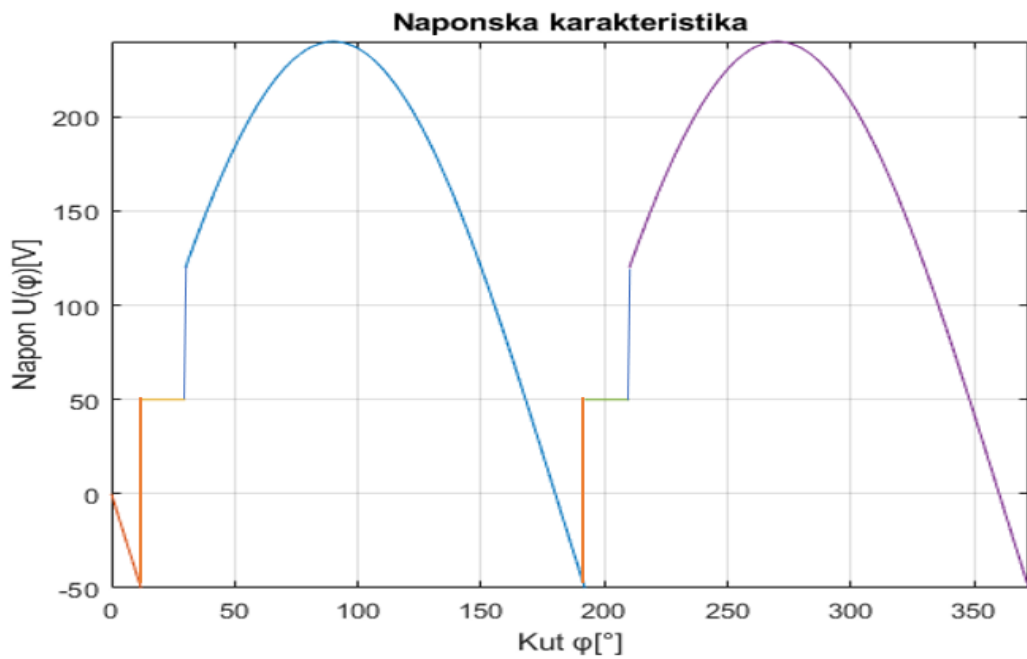
ans = 'Rješenje'
ans = '1-Napon usmjerivača Ud'
Ud = 132.3189
Ud0 = 152.7887
ans = '2-Struja usmjerivača Id'
Id = 16.4638

ans = '3-Granični kut okidanja tiristora alfagr'

alfagr = 32.1419
```

Na slici 2.23 prikazana je naponska karakteristika usmjerivača $U = U(\varphi)$

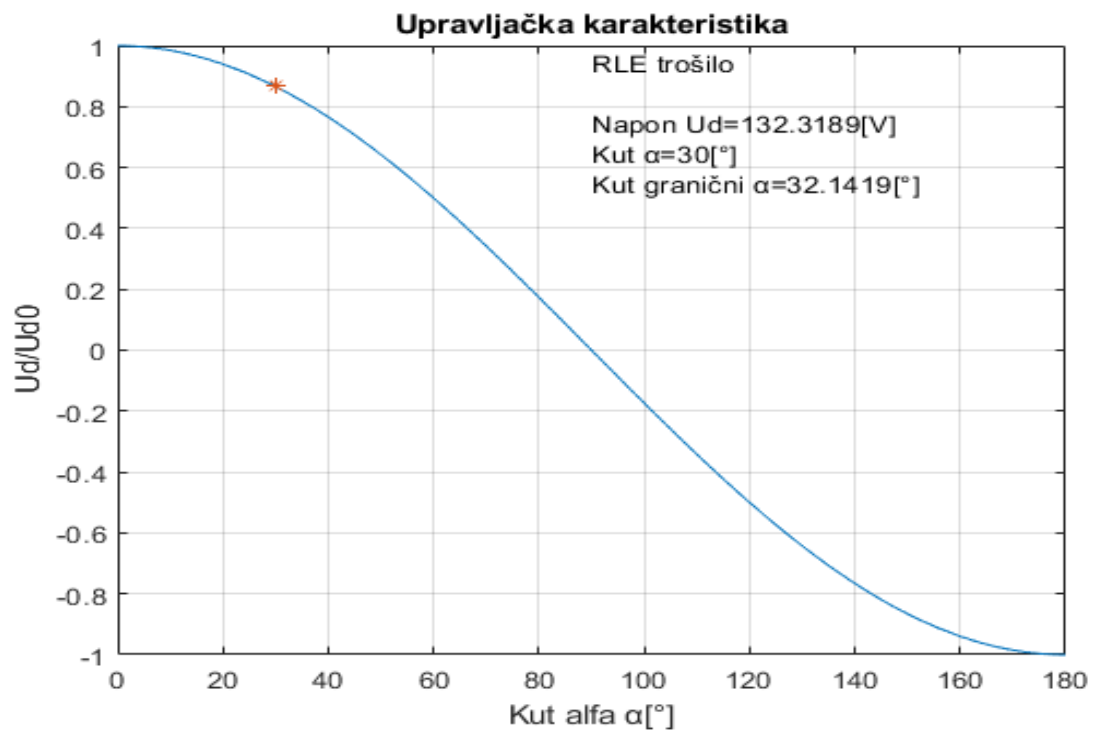
```
ans = '4 - Naponska karakteristika'
alfae = 12.0247
```



Sl. 2.23 – Naponska karakteristika

Na slici 2.24 prikazana je upravljačka karakteristika usmjerivača $U_d(\alpha) = U_d(0) \cdot \cos(\alpha)$.

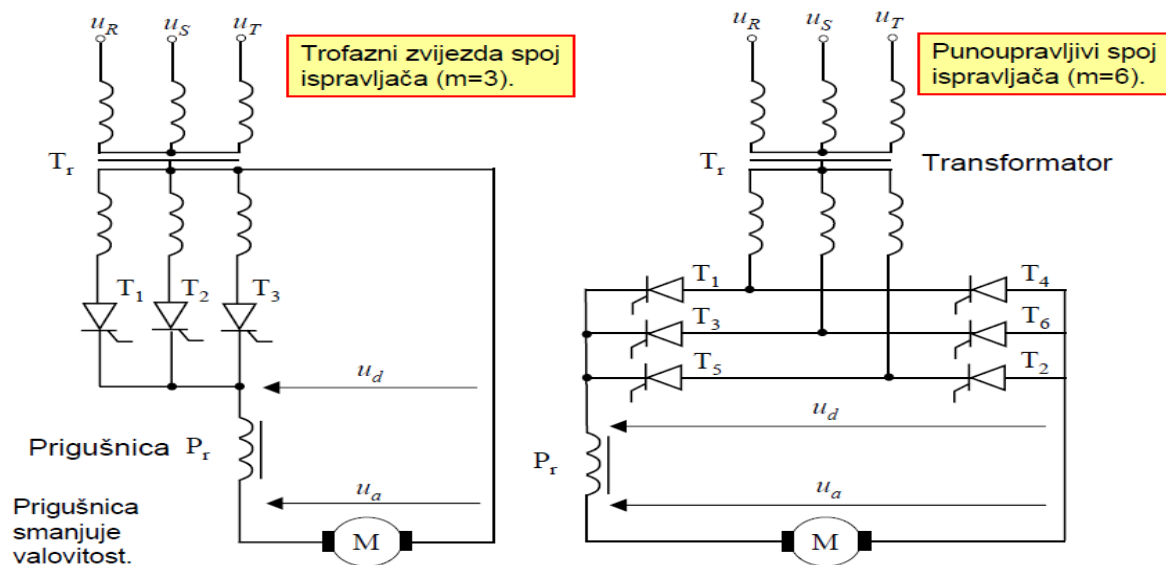
```
ans = '5 - Upravljačka karakteristika usmjerivača'
p = 0.8660
```



Sl. 2.24 - Upravljačka karakteristika usmjerivača

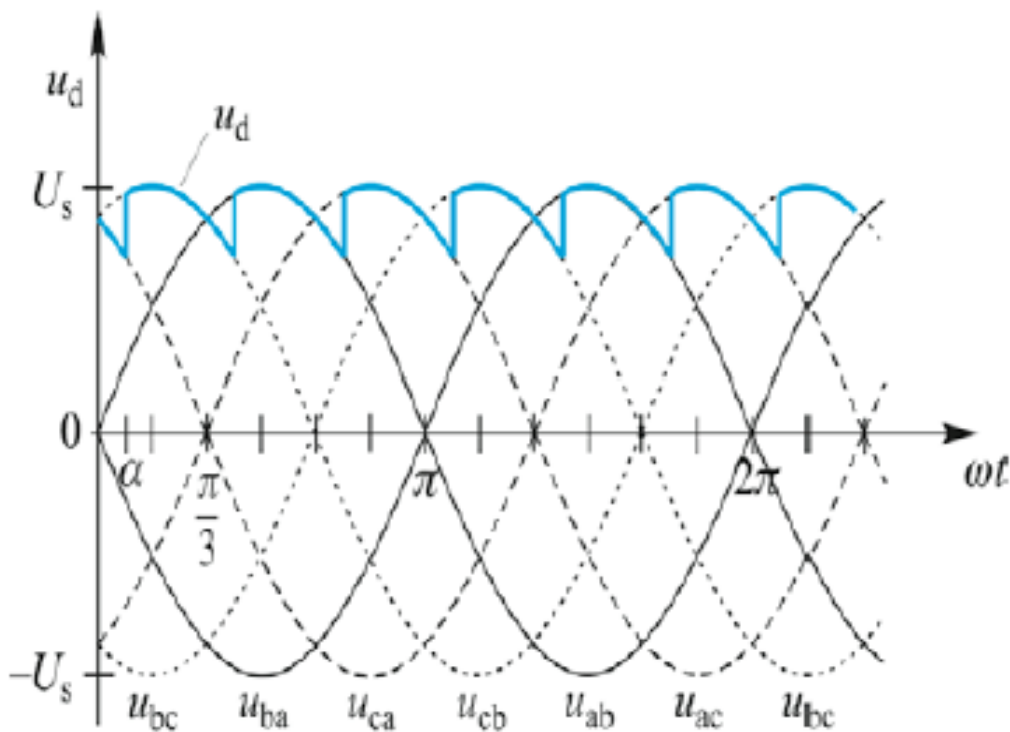
Na većim snagama (iznad 10kW) koristi se trofazni usmjerivač u mosnom spoju ($m = 3$ ili $m = 6$) kako je prikazano na slici 2.25.

Tiristorski ispravljač



Sl. 2.25 - Trofazni usmjerivač u mosnom spoju [Izvor: FER - ZESA]

Na slici 2.26. prikazana je naponska karakteristika trofaznog usmjerivača u mosnom spoju.



Sl. 2.26 - Naponska karakteristika trofaznog usmjerivača u mosnom spoju [Izvor: FER - ZESA]

Srednja vrijednost napona U_d na izlazu iz usmjerivača za kut okidanja α i broj tiristora m iznosi:

$$U_d(\alpha) = \frac{1}{\frac{2\pi}{m}} \int_{\alpha - \frac{\pi}{m}}^{\alpha + \frac{\pi}{m}} U_s \cdot \sin \varphi d\varphi = U_s \cdot \frac{m}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{m}\right) \cdot \cos \alpha$$

Prije napisanu relaciju moguće je zapisati i u sljedećem obliku:

$$U_d(\alpha) = U_d(0) \cdot \cos \alpha$$

gdje je:

- za $m=3$ vrijednost napona $U_d(0)$ jednaka:

$$U_d(0) = \frac{m}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{m}\right) \cdot U_s = \frac{3}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot U_s$$

- za $m=6$ vrijednost napona $U_d(0)$ jednaka:

$$U_d(0) = \frac{m}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{m}\right) \cdot U_s = \frac{6}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot U_s$$

Linijski napon U_s može se izraziti putem efektivnog faznog napona U_{f-rms} na sljedeći način:

$$U_s = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot U_{f-rms}$$

Stoga sređivanjem slijede relacije:

$$U_d(0) = 1,17 \cdot U_{f-rms}$$

$$U_d(0) = 2,34 \cdot U_{f-rms}$$

Gdje je: U_{f-rms} – fazni efektivni napon (engl. Rote Mean Square Voltage)

Primjer br. 6

Istosmjerni stroj napaja se iz trofazne mreže efektivnog linijskog napona $U_{ef} = 208V$ rms kroz punoupravljivi mosni spoj isprvaljača $m = 6$. Moment opterećenja motora iznosi $M = 20Nm$, a kutna brzina motora iznosi $\omega = 60$ rad/sek. Konstanta stroja iznosi $k = 2$ Vs, otpor aramature iznosi $R_a = 1\Omega$, induktivitet armature iznosi $L_a = 15mH$ i frekvencija mreže iznosi $f = 50Hz$.

Potrebno je odrediti referentni kut okidanja tiristora α_{ref} i referentnu struju potrošnje I_{ref} istosmjernog stroja. Koliko će iznositi kut okidanja tiristora α i struja potrošnje I ako se opterećenje motora poveća za 2, 5 puta (250%)?

Rješenje (programska rutina u MatLab-u) je sljedeće:

```
'Zadano'
Uef=208 %Efektivni linijski napon [V]
m=6 %Punoupravljivi mosni spoj
Mt=20 %Moment tereta [Nm]
om=60 %Kutna brzina stroj [rad/sek]
k=2 %Konstanta stroj [Vs]
Ra=1 %Otpor armature rotora [Om]
La=15e-3 %Induktivitet armature [H]
f=50 %Frekvencija mreže
'Rješenje'
'1-Napon Ud(0)'
Ud0=2.34*Uef/sqrt(3)
'2-Referentna struja Iref'
Iref=Mt/k
'3- Elektromotorna sila Ed'
Ed=k*om
'4- Kut okidanja tiristora aref'
alfaref=180/pi*acos((Iref*Ra+Ed)/Ud0)
'5- Kut okidanja tiristora α'
I=2.5*Mt/k
alfa=180/pi*acos((I*Ra+Ed)/Ud0)
'6-Granični kut okidanja tiristora alfagr'
Td=La/Ra;
alfagr=180/pi*atan(2*pi*f*Td)
'7-Upravljačka karakteristika usmjerivača'
syms alf
Upk=cos(alf*pi/180);
fplot(Upk,[0 180])
hold on
p1=cos(alfaref*pi/180)
hold on
p2=cos(alfa*pi/180)
hold on
plot(alfaref,p1,'*')
plot(alfa,p2,'+')
grid on
title('Upravljačka karakteristika')
xlabel('Kut alfa α[°]')
ylabel('Uα/Ud0')
txt=['RLE trošilo'];
text(90,0.95,txt)
txt=['Struja Iref=',num2str(Iref),'[A]'];
text(90,0.85,txt)
txt=['Struja I=',num2str(I),'[A]'];
text(90,0.75,txt)
txt=['Kut aref=',num2str(alfaref),'[°]'];
text(90,0.65,txt)
txt=['Kut α=',num2str(alfa),'[°]'];
text(90,0.55,txt)
txt=['Kut agr=',num2str(alfagr),'[°]'];
text(90,0.45,txt)
```

Parametri

```

ans = 'Zadano'
Uef = 208
m = 6
Mt = 20
om = 60
k = 2
Ra = 1
La = 0.0150
f = 50

ans = 'Rješenje'
ans = '1-Napon Ud(0)'
Ud0 = 281.0079

ans = '2-Referentna struja Iref'
Iref = 10

ans = '3- Elektromotorna sila Ed'
Ed = 120

ans = '4- Kut okidanja tiristora aref'
alfaref = 62.4437

ans = '5- Kut okidanja tiristora α'
I = 25
alfa = 58.9357

ans = '6-Granični kut okidanja tiristora alfagr'

alfagr = 78.0192

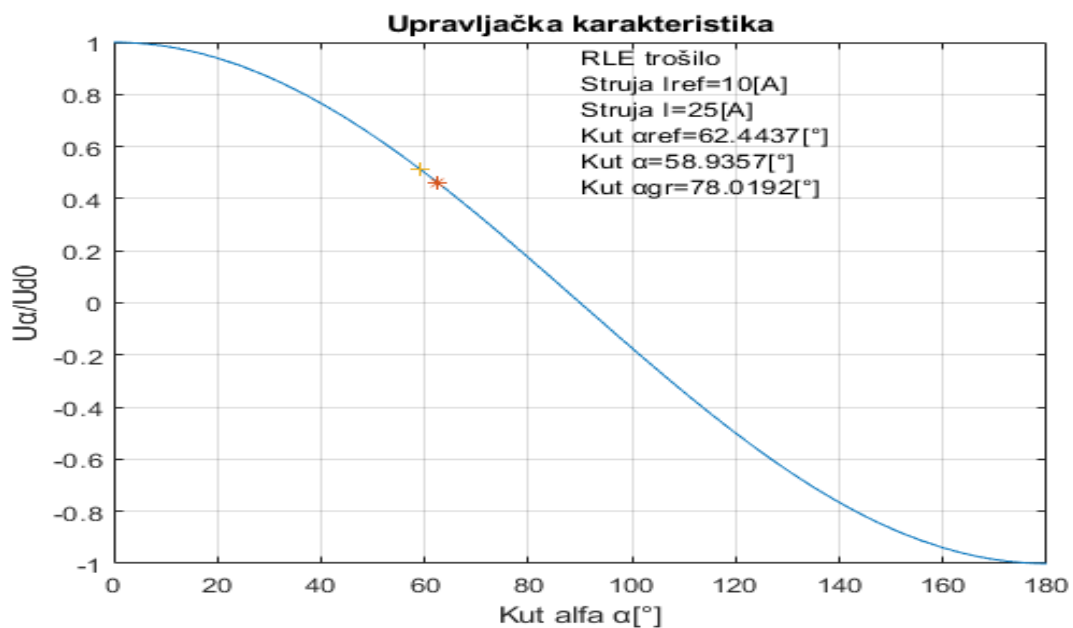
```

Na slici 2.27 prikazana je upravljačka karakteristika usmjerivača $U_d(\alpha) = U_d(0) \cdot \cos(\alpha)$

```
ans = '7-Upravljačka karakteristika usmjerivača'
```

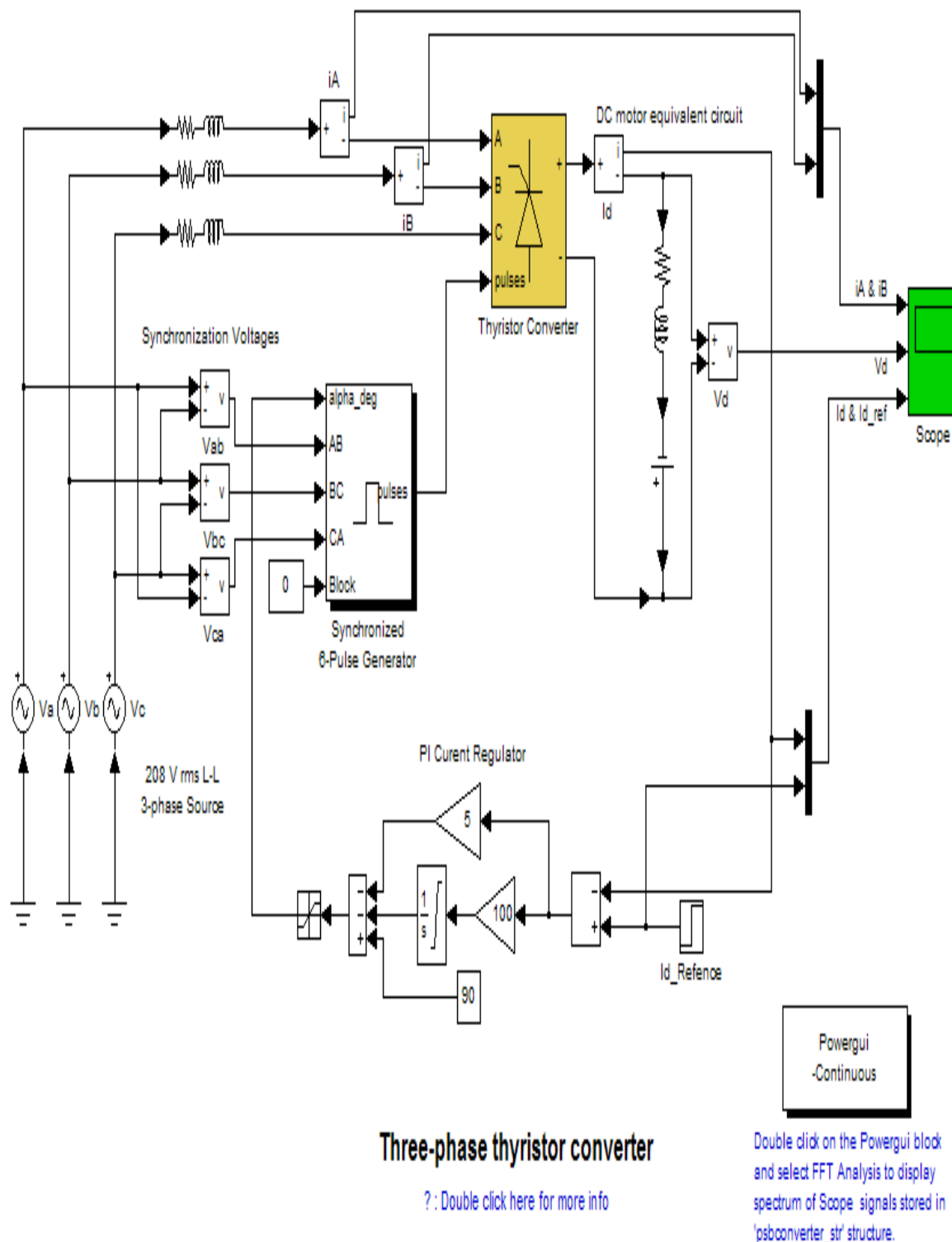
```
p1 = 0.4626
```

```
p2 = 0.5160
```



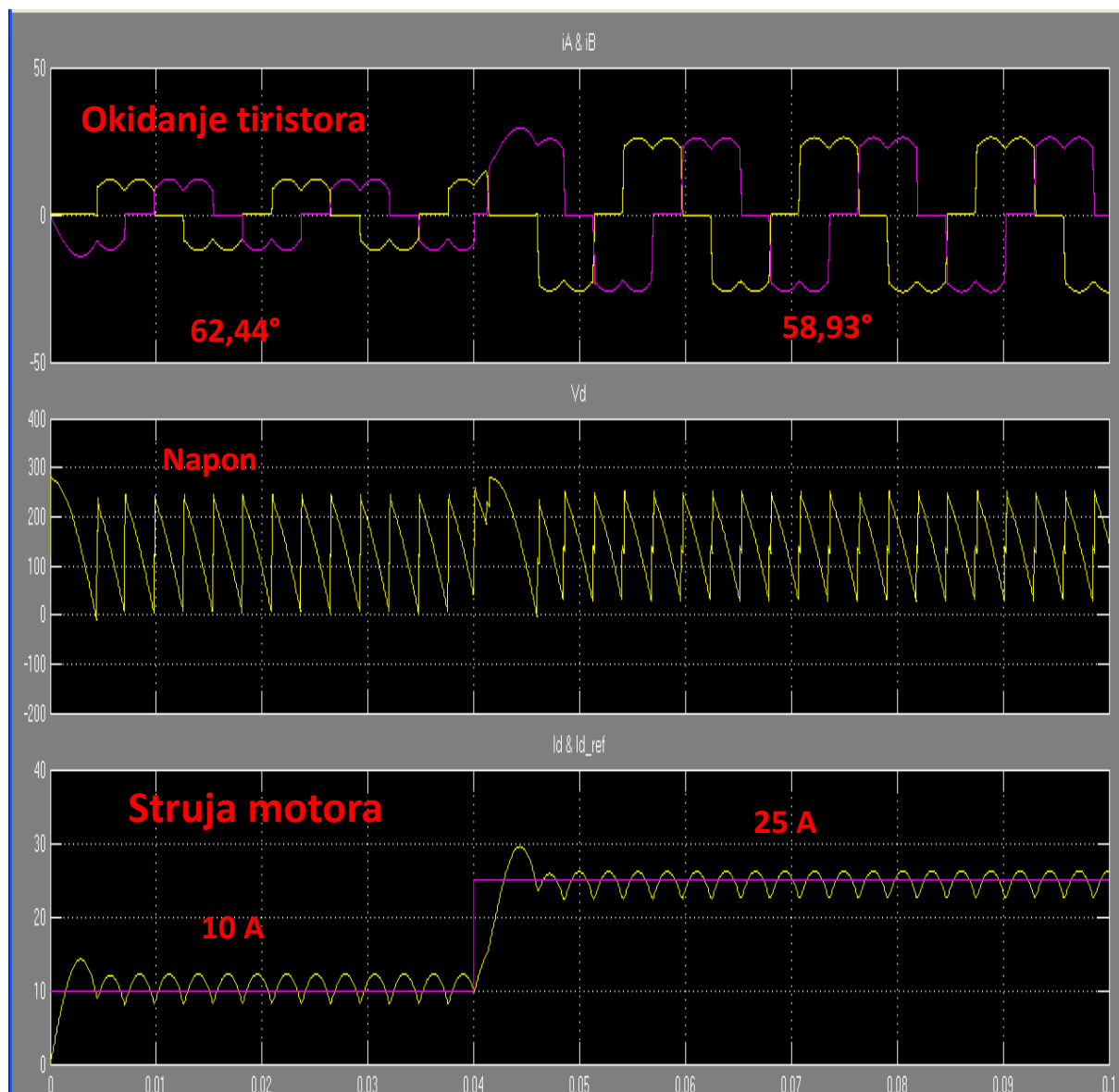
Sl. 2.27 – Upravljačka karakteristika usmjerivača

Na slici 2.28 prikazan je simulacijski model regulacije istosmjernog stroja pomoću PI regulatora u spoj s tiristorskim usmjerivačem i sklopom za sinhronizaciju s trofaznom mrežom.



Sl. 2.28 – Simulacijski model regulacije trofaznog istosmjernog stroja [Izvor: MatLab]

Na slici 2.29 prikazan je izlazni signali simulacijskog modela sa slike 2.28.

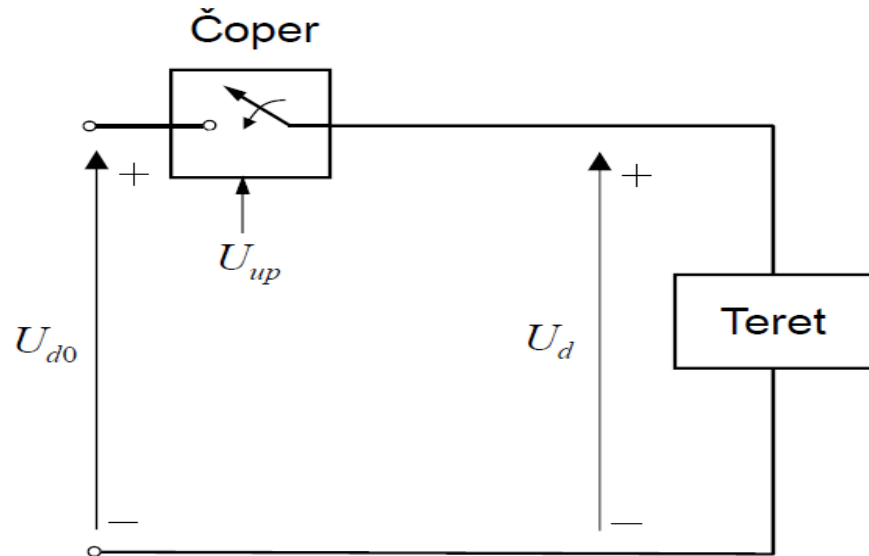


Sl. 2.29 – Rezultati simulacijskog modela

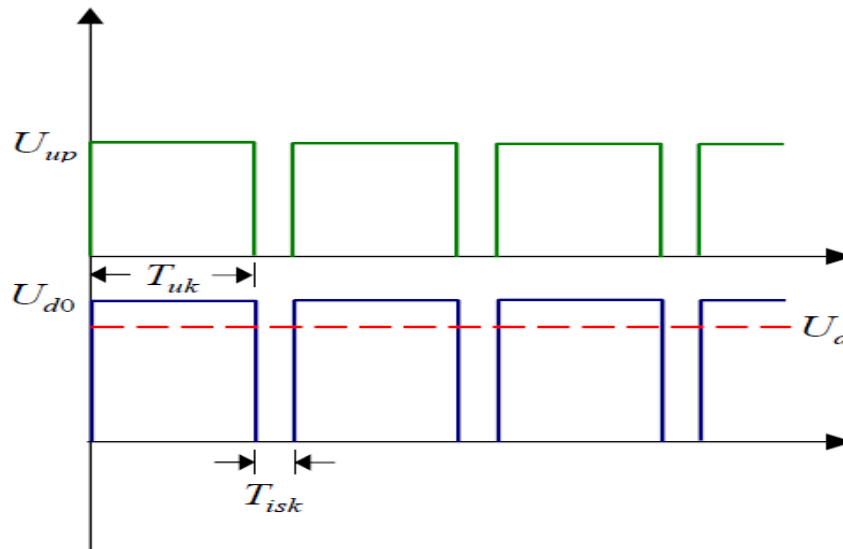
Rezultati simulacijskog modela u potpunosti su istovjetni proračunu pomoći MatLab rutine .

2.2.2 Čoper

Kako je prethodno spomenuto, istosmjerni pretvarači tzv. čoperi (engl. *Choppers* - sjekači) pretvaraju konstantan istosmjerni izvor napajanja u promjenljivi istosmjerni napon kojim se napaja stroj. Na slici 2.30 a) prikazana je električna shema rada tranzistorskog čopera, dok su na slici 2.30 b) prikazani radni naponi i vremenske konstante unipolarne modulacije. Logički napon U_{up} služi za upravljanje čoperom, dok je U_{a0} ulazni istosmjerni napon u čoper, a U_d izlazni napon iz čopera. Vrijeme T_{uk} je vrijeme trajanja uključanja čopera, dok je vrijeme T_{isk} vrijeme isključenja rada čopera.



Sl. 2.30 a) – Električna shema čopera [Izvor: FER - ZESA]



Sl. 2.30 b) – Naponi i vremenske konstante čopera [Izvor: FER - ZESA]

Važan parametar za rad čopera je popunjenost signala ε (engl. *Duty Cycle*), a definira se na sljedeći način:

$$\varepsilon = \frac{T_{uk}}{T_{uk} + T_{isk}} = \frac{U_d}{U_{d0}}$$

Granična popunjenost signala ε_{gr} je ona vrijednost popunjenosti signala pri kojem istosmjerni stroj radi u kontinuiranom režimu vođenja. Granična popunjenost signala određena je sljedećom relacijom:

$$\varepsilon_{gr} = \frac{T_a}{T} \ln \left[1 + \frac{E}{U_{d0}} (e^{\frac{T}{T_a}} - 1) \right]$$

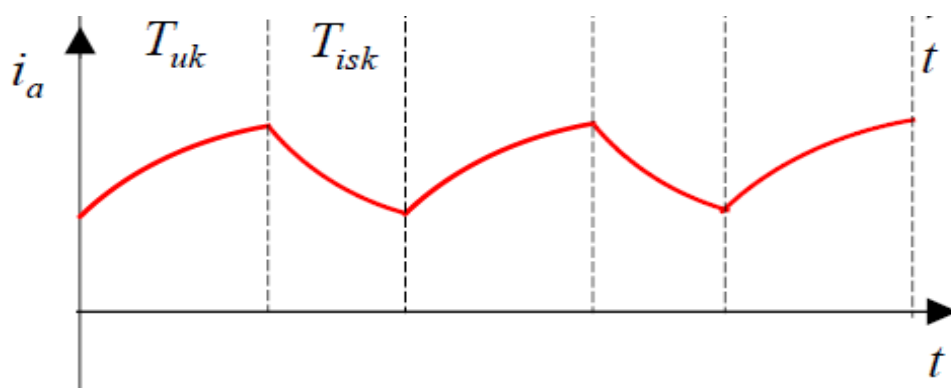
gdje je:

$$T_a = \frac{L_a}{R_a} - \text{električna vremenska konstanta stroja [sek]}$$

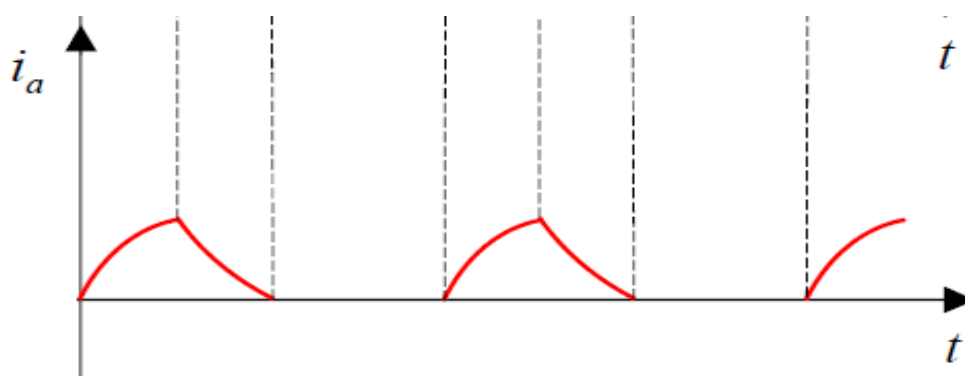
$$T = \frac{1}{f_{\check{c}}}; f_{\check{c}} - \text{frekvencija \u010dopera [Hz]}$$

E – inducirana elektromotorna sila [V]

Na slici 2.31 a) i b) prikazan je kontinuirani i diskontinuirani režim vo\u0111enja \u010dopera.



Sl. 2.31 a) – Kontinuirani režim vo\u0111enja



Sl. 2.31 b) – Diskontinuirani režim vo\u0111enja

Kut okidanja tiristora α ra\u010duna se relacijom:

$$\alpha = \arccos \frac{U_d(\alpha)}{U_d(0)}$$

Prilikom promjene kuta okidanja tiristora α s promjenom napona s promjenom napona $U_d(0)$ dolazi do odre\u0111enog ka\u0161njenja (mrtvo vrijeme τ) nakon kojeg se veli\u010dina napona $U_d(\alpha)$ po\u010dinje mjenjati. Do ove pojave dolazi jer tiristor nije u mogu\u0107nosti promjeniti kut vo\u0111enja (okidanja) u bilo kojem trenutku. Prosje\u010dno mrtvo vrijeme usmjeriva\u010da τ definirano je relacijom:

$$\tau = \frac{1}{2 \cdot m \cdot f}$$

gdje je:

m – broj pulzacija u jednoj periodi napona napajanja

f – frekvencija izmjeničnog napona napajanja (mreže) [Hz]

Punoupravljivi mosni spoj trofaznog usmjerivača ima 6 pulzacija, a frekvencija izmjeničnog napona iznosi 50Hz. Stoga vrijedi:

$$\tau = \frac{1}{2 \cdot m \cdot f} = \frac{1}{2 \cdot 6 \cdot 50} = 1,666ms$$

Kako se radi o prosječnom mrtvom vremenu, ovaj se iznos najčešće zaokružuje na iznos od $\tau = 2ms$.

Prijenosna funkcija usmjerivača $G_u(s)$ glasi:

$$G_u(s) = K_u \cdot e^{-\tau \cdot s} \cong \frac{K_u}{1 + \tau \cdot s}$$

gdje je:

K_u – pojačanje tiristorskog usmjerivača

Prije navedena aproksimacija dobra je jer je vremenska konstanta od 2ms značajno mala u odnosu na električnu vremensku konstantu motora T_a . No, jedna od važnih značajki usmjerivača je valovitost struje. Ako je struja valovita tada je i moment valovit što je nepovoljna pojava pogotovo kod pozicijskih sustava regulacije. Stoga se u tehnološki zahtjevnijim operacijama gdje se zahtjeva mala valovitost struje (momenta) koriste 12-pulsni ili 24-pulsni usmjerivači koji se na trofaznu mrežu priključuju preko posebnih transformatora.

Tranzistorski istosmjerni pretvarači ili čoperi najčešće su realizirani bipolarnim tranzistorima, MOSFET-om ili IGBT tranzistorom. Osim unipolrane modulacije širine impulsa prisutna je i bipolarna modulacija širine impulsa kada se popunjenost signala računa po relaciji:

$$\varepsilon = 0,5 \cdot \left(1 + \frac{U_d}{U_{d0}}\right)$$

Tranzistorski čoperi dijele se u tri grupe: silazni (engl. *Step-down (Buck)*), uzlazni (engl. *Step-Up (Boost)*) i silazno-uslazni (engl. *Buck-Boost*) čoperi. Slično kao i kod tiristora, prijenosna funkcija silaznog čopera $G_{s\check{c}}(s)$ glasi:

$$G_{s\check{c}}(s) = K_{s\check{c}} \cdot e^{-\tau \cdot s} \cong \frac{K_{s\check{c}}}{1 + \tau \cdot s}$$

gdje je:

$K_{s\check{c}}$ – pojačanje silaznog čopera

$\tau = \frac{T}{2}$ – mrtvo vrijeme silaznog čopera [sek]

$T = \frac{1}{f_{\check{c}}}$; $f_{\check{c}}$ – frekvencija čopera [Hz]

Kako je frekvencija čopera relativno velika u odnosu na vremenske konstante istosmjernog stroja, prijenosna funkcija silazanog čopera može se opisati samo pojačenjem:

$$G_{s\check{c}}(s) = K_{s\check{c}}$$

Može se uočiti kako su prijenosne funkcije tiristorskog usmjerivača i tranzistorskog čopera strukturno potpuno iste. Prema tome sustav regulacije istosmjernog stroja s tiristorskim usmjerivačem u mosnom spoju može se realizirati isto kao i sa istosmjernim pretvaračem (čoperom).

Temeljna razlika tiristorskog usmjerivača i tranzistorskog čopera u pogledu regulacije rada istosmjernog stroja sastoji se u tome što se u prvom slučaju (tiristorski usmjerivač) energija kočenja pretvara u električnu energiju koja se vraća u mrežu, dok se kod tranzistorskog čopera energija kočenja troši na posebnom sklopu za kočenje tj. na potrošaču.

Primjer br. 7

Zadan je istosmjerni stroj napajan iz čopera koji je vezan na izlaz trofaznog mosnog spoja diodnog ispravljača ($m=6$) priključenog na trofaznu mrežu ($3ph, 380V_{rms}, 50 Hz$). Stroj ima sljedeće karakteristike: nazivni broj okretaj $n = 500 \text{ okr/min}$, otpor armature $R_a = 0,488\Omega$, induktivitet armature $L_a = 15mH$, konstanta motora $k = 2,46Vs$, frekvencija čopera $f_{\check{c}} = 2kHz$ i popunjenost čopera $\varepsilon = 55\%$. Potrebno je utvrditi radi li stroj u kontinuiranom režimu vođenja i odrediti njegove glavne parametre (napon, struja, moment, snaga i iskoristivost).

Rješenje (programska rutina u MatLab-u) je sljedeće:

```
'Zadano'
U1=380 %Efektivni linijski napon mreže [V]
Ra=0.488 %Otpor armature rotora [Om]
k=2.46 %Konstanta motora [V]
La=15e-3 %Induktivitet armature [H]
n=500 %Nazivni broj okretaka [okr/min]
em=0.55 %Popunjenost čopera
fc=2e3 %Frekvencija čopera [Hz]
```

```
'Rješenje'
'1-Napon diodnog pretvarača [V]'
Ud0=2.34*U1/sqrt(3)
'2-Eelektromotorna sila [V]'
E=k*n*pi/30
```

```
'3-Granična popunjenost emgr [%]'
T=1/fc
Ta=La/Ra
```

$$\text{emgr} = T_a/T * \log(1 + E/U_d \theta * (\exp(T/T_a) - 1)) * 100$$

'4-Napon na izlazu iz čopera [V]'

$$U_d = e_m * U_{d\theta}$$

'5-Struja potrošnje [A]'

$$I = (U_d - E) / R_a$$

'6-Moment motora [Nm]'

$$M = k * I$$

'7-Izlazna snaga stroja [kW]'

$$P_{izl} = M * n * \pi / 30 / 1000$$

'8-Ulazna snaga stroja [kW]'

$$P_{ul} = U_d * I / 1000$$

'9-Iskoristivost stroja [%]'

$$\text{isk} = P_{izl} / P_{ul} * 100$$

Parametri

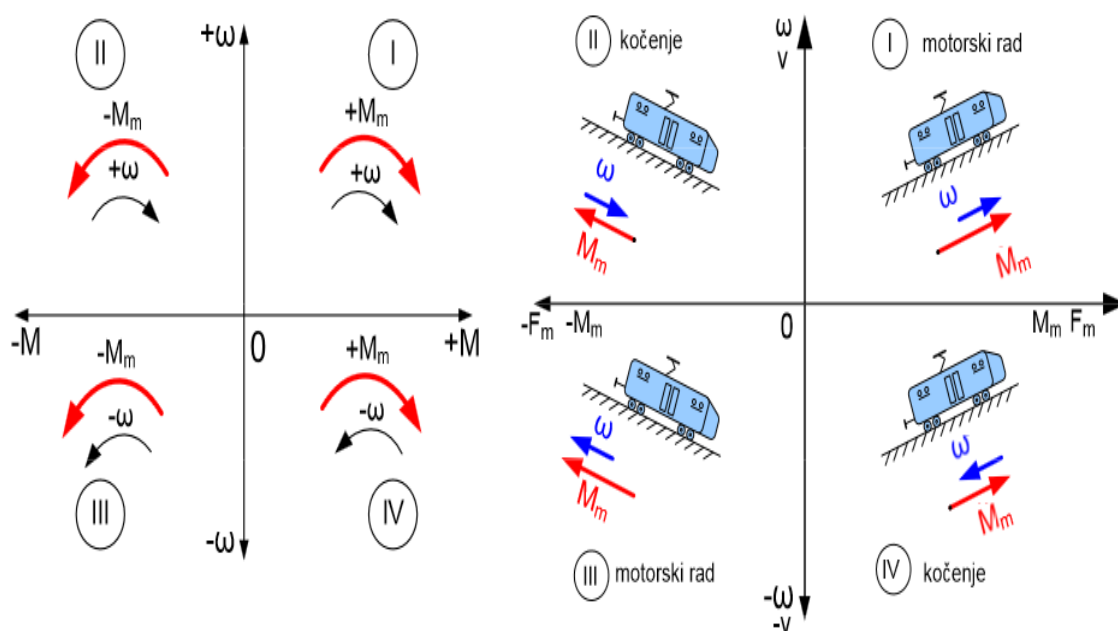
```
ans = 'Zadano'
U1 = 380
Ra = 0.4880
k = 2.4600
La = 0.0150
n = 500
em = 0.5500
fc = 2000
ans = 'Rješenje'
ans = '1-Napon diodnog pretavarača [V]'
Udθ = 513.3799
ans = '2-Eelektromotorna sila [V]'
E = 128.8053
ans = '3-Granična popunjenost emgr [%]'
T = 5.0000e-04
Ta = 0.0307
emgr = 25.2429
ans = '4-Napon na izlazu iz čopera [V]'
Ud = 282.3589
ans = '5-Struja potrošnje [A]'
I = 314.6591
ans = '6-Moment motora [Nm]'
M = 774.0613
ans = '7-Izlazna snaga stroja [kW]'
Pizl = 40.5298
ans = '8-Ulazna snaga stroja [kW]'
Pul = 88.8468
ans = '9-Iskoristivost stroja [%]'
isk = 45.6176
```

Stroj radi u kontinuiranom režimu vođenja jer je $\varepsilon > \varepsilon_{gr}$

U nastavku će se pozornost posvetiti kočenju istosmjernog stroja.

2.3 Kočenje istosmjernog stroja

Istosmjerni stroj kombinacija je dva temeljna tipa rada i to: motorski rad, kada moment stroja djeluje u smjeru vrtnje stroja, i generatorski rad, kada moment stroja djeluje suprotno od smjera vrtnje stroja. Stoga su prisutna četiri kvadranta rada istosmjernog stroja – prvi kvadrant je motorski (pozitivan moment i pozitivna brzina vrtnje), drugi kvadrant je generatorski (smjer brzine i momenta su suprotni, stroj je u režimu kočenja), treći kvadrant je motorski (rad u suprotnom smjeru), a četvrti kvadrant je generatorski rad u suprotnom smjeru (režim kočenja). Na slici 2.32 prikazani su kvadranti rada istosmjernog stroja.



Sl. 2.32 -Kvadranti rada istosmjernog stroja [Izvor: FER - ZESA]

Tri su temeljna načina kočenja istosmjernog stroja - to su generatorsko (rekuperativno) kočenje, protustrujno kočenje i elektrodinamičko (otporno) kočenje.

2.3.1 Generatorsko (rekuperativno) kočenje

U slučaju generatorskog (rekuperativnog) kočenja električna energija se vraća u mrežu. Radni mehanizam djeluje na stroj tako da brzina vrtnje n postaje veća od brzine vrtnje idealnog praznog hoda n_0 tj. vrijedi $n > n_0$

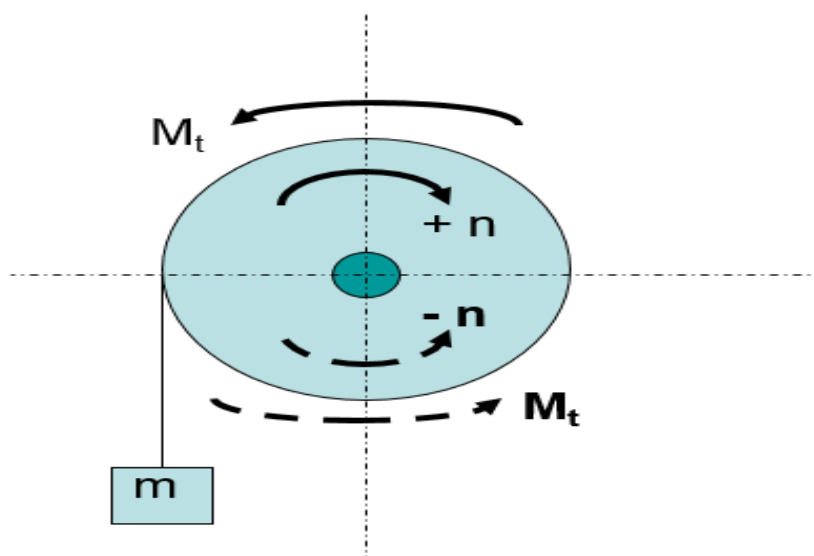
Brzina vrtnje idealnog praznog hoda određena je relacijom:

$$n_0 = \frac{30}{\pi} \cdot \omega_{max} = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{U_m}{k}$$

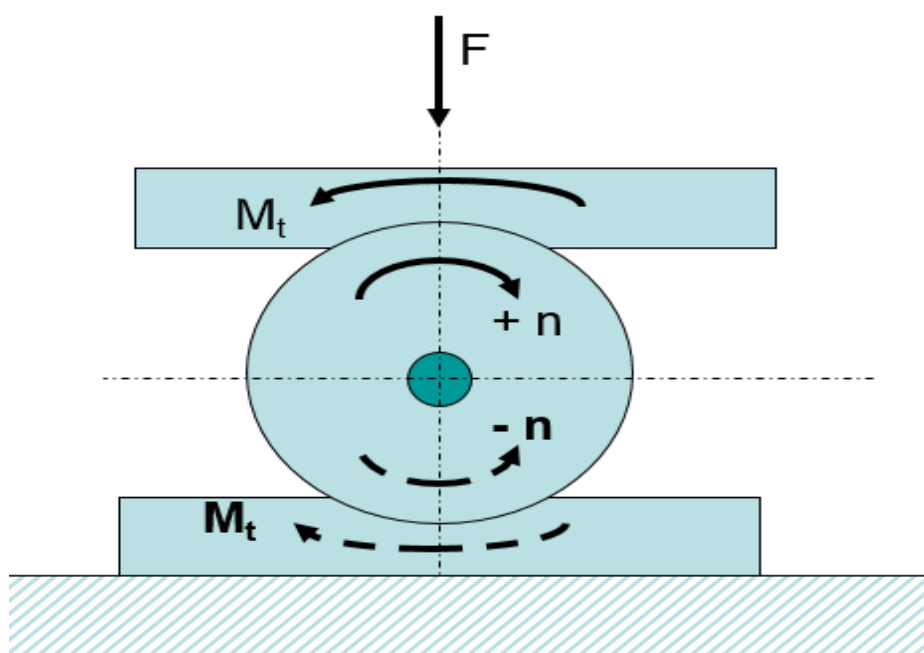
Uz uvjet da je viskozno trenje može zanemariti tj. $k_v = 0$.

U slučaju kada je $n > n_0$ elektromotorna sila E postaje veća od narinutog napona motora U_m pa struja armature I_a i moment motora M_{el} mjenjaju smjer u odnosu na motorski režim rada. Tada se stroj nalazi u stanju generatorskog kočenja što odgovara drugom i četvrtom kvadrantu rada stroja. Mehanička energija radnog mehanizma pretvara se u električnu energiju i vraća se u mrežu umanjena za gubitke u stroju.

Generatorsko kočenje primjenjuje se npr. kod dizalica i u transportu (vuča i sl.) gdje je moment tereta aktivan (potencijalan), a brzina kočenja je veća od brzine praznog hoda. Na slici 2.33 a) i b) prikazan je aktivni i reaktivni tereti.



Sl. 2.33 a) – Aktivni teret (vanjske sile i momenti) [Izvor: FER - ZESA]



Sl. 2.33 b) – Reaktivni teret (Sile i momenti trenja) [Izvor: FER - ZESA]

Primjer br. 8

Brzina slobodnog pada tereta dizalice v_{sp} dobar je primjer kojim će se pobliže objasniti princip rada generatorskog kočenja. Neka je data dizalica čiji je su parametri: konstanta stroja iznosi $k = 1,2Vs$, otpor aramature rotora iznosi $R_a = 0,8 \Omega$, moment tereta iznosi $M_t = 98,1 Nm$, ukupni moment inercije iznosi $J_{uk} = 3kgm^2$, promjer bubnja iznosi $D = 20cm$ i linearna brzina podizanja tereta iznosi $v = 10m/s$. Viskozno trenje će se zanemariti tj. vrijedi da je konstanta viskozno trenja $k_v = 0 Nms/rad$.

Slijedom prije navdenoga radna kutna brzina stroja ω_r iznosi:

$$\omega_r = 2 \cdot \frac{v}{D} = 2 \cdot \frac{10}{0,2} = 100 \text{ rad/sek}$$

Potrebni napon stroja U_m iznosi:

$$U_m = \frac{R_a}{k} \cdot M_t + k \cdot \omega_r = \frac{0,8}{1,2} \cdot 98,1 + 1,2 \cdot 100 = 185,4V$$

Uzimajući u obzir prije navedene podatke moguće je odrediti statičku karakteristiku istosmjernog stroja koja glasi:

$$\omega = -\frac{R_a}{k^2} \cdot M + \frac{U_m}{k} = \frac{0,8}{1,2^2} \cdot M + \frac{185,4}{1,2} = -0,555 \cdot M + 154,5$$

Prema tome, vrijedi da je kutna brzina slobodnog hoda ω_{max} odnosno brzina okretaja stroja u praznom hodu n_0 iznose:

$$\omega_{max} = 154,5 \text{ rad/sed}$$

$$n_0 = \frac{30}{\pi} \cdot \omega_{max} = \frac{30}{\pi} \cdot 154,5 = 1.475,4 \text{ okr/min}$$

Broj okretaja stroja n kojim dizalica podiže teret iznosi:

$$n = \frac{30}{\pi} \cdot \omega_r = \frac{30}{\pi} \cdot 100 = 954,93 \text{ okr/min}$$

Brzina slobodnog pada tereta v_{sp} može se izračunati prema sljedećoj relaciji:

$$v_{sp} = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

Odnosno kutna brzina slobodnog pada ω_{sp} jednaka je:

$$\omega_{sp} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot h}}{D}$$

Slijedom nevedene relacije može se izračinati visina h s koje teret može slobodnim padom dostići kutnu brzinu slobodnog pada tj. vrijedi:

$$\omega_{max} = \omega_{sp}$$

Visina h tada iznosi:

$$h = \frac{\left(\frac{D}{2} \cdot \omega_{max}\right)^2}{2 \cdot g} = \frac{\left(\frac{0,2}{2} \cdot 154,5\right)^2}{2 \cdot 9,81} = 13m$$

Tako će npr. ako je $h=14m$ brzina slobodnog pada ω_{sp} iznositi će:

$$\omega_{sp} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot h}}{D} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 14}}{0,2} = 165,73 \text{ rad/sek}$$

Elektromotorna sila E tada iznosi:

$$E = k \cdot \omega_{sp} = 1,2 \cdot 165,73 = 198,88 \text{ V}$$

Struja I tada iznosi:

$$I = \frac{U_m - E}{R_a} = \frac{192 - 198,88}{0,8} = -8,6A$$

Struja I ima negativan predznak, a to znači kako se ista vraća u mrežu i stroj radi u generatorskom režimu rada. Kako struja ima negativan predznak, tako će i električni moment stroja M_{el} imati negativni predznak i on iznosi:

$$M_{el} = k \cdot I = 1,2 \cdot (-8,6) = -10,23Nm$$

Do kočenja će doći već u prvom trenutku kada elektromotorna sila postane veća od napona motora tj. vrijedi $E > U_m$ stoga se brzina kočenja ω_k može izračunati prema relaciji:

$$\omega_k = -\frac{R_a}{k^2} \cdot M_t - \omega_{max}$$

Prema tome vrijedi:

$$\omega_k = -\frac{0,8}{1,2^2} \cdot 98,1 - 154,5 = -209 \text{ rad/sek}$$

$$n_k = \frac{30}{\pi} \cdot (-209) = -1.995,8 \text{ rad/sek}$$

Rješenje (programska rutina u MatLab-u) je sljedeće:

```
'GENERATORSKO KOČENJE stroja '
```

```
'Zadano'
```

```
k=1.2 %Konstanta stroj [Vs]
Ra=0.8 %Otpor armature rotora [Om]
Mt=98.1 %Moment tereta [Nm]
D=0.2 %Promjer osovine dizalice [m]
v=10 %Radna kutna brzina stroja [m/s]
```

```

'Rješenje'
'1-Kutna brzina stroja (radna) i broj okretaja [rad/sek]'
omr=2*v/D
n=30/pi*omr

'2- Potrebni napon stroja [V]'
Um=Ra/k*Mt+k*omr

'3- Makimalna kutna brzina i brzina okretaja praznog hoda) [rad/sek]'
ommax=Um/k
nmax=30/pi*ommax

'4 - Struja potrešnje [A]'
I=Mt/k

'4-Makimalni moment [Nm]'
Mmax=k*Um/Ra

'5-Statička karakteristika - pogon i kočenje '
syms M
om=-Ra/k^2*M+ommax;
fplot(om,[0 Mmax])
grid
hold on
om=-Ra/k^2*M-ommax;
fplot(om,[0 Mmax])

title('Statička karakteristika snage')
xlabel('Moment M[Nm]')
ylabel('kutna brzina stroja om[rad/sek]')
hold on
plot(Mt,omr, '*')
plot(0,omr, '+')
plot(Mt,0, '+')
txt=['Radna brzina stroja omr=',num2str(omN), '[rad/sek]'];
text(0,0.85*omr,txt)
hold on

'6-Kutna brzina kočenja [rad/sek]'
omKg=-Ra/k^2*Mt-ommax
nk=30/pi*omKg
plot(Mt,omKg, '*')
plot(0,omKg, '+')
plot(Mt,0, '+')
grid on
txt=['Brzina gneratorskog kočenja omKg=',num2str(omKg), '[rad/sek]'];
text(0,0.9*omKg,txt)

```

Parametri

```

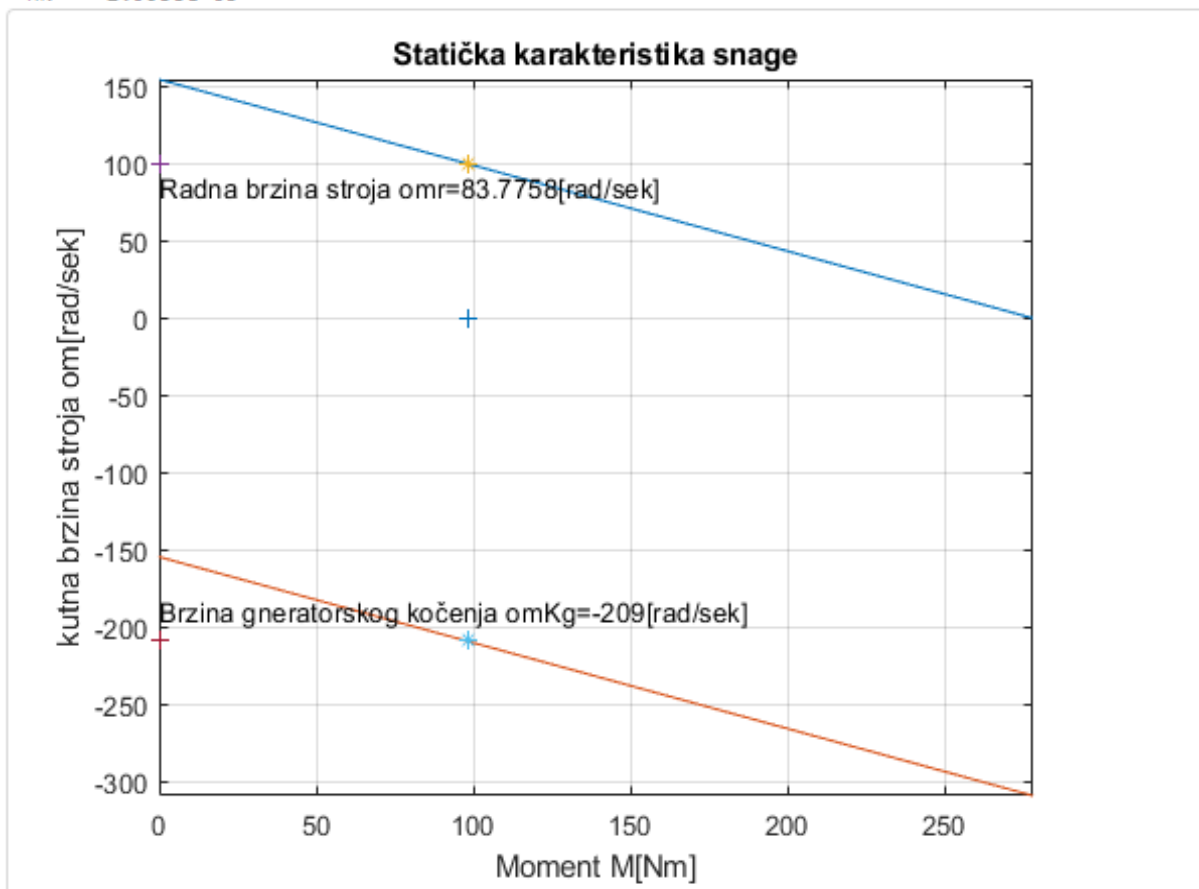
ans = 'GENERATORSKO KOČENJE stroja '
ans = 'Zadano'
k = 1.2000
Ra = 0.8000
Mt = 98.1000
D = 0.2000
v = 10
ans = 'Rješenje'
ans = '1-Kutna brzina stroja (radna) i broj okretaja [rad/sek]'
omr = 100
n = 954.9297
ans = '2- Potrebni napon stroja [V]'
Um = 185.4000
ans = '3- Makismalna kutna brzina i brzina okretaja praznog hoda) [rad/sek]'
ommax = 154.5000
nmax = 1.4754e+03
ans = '4 - Struja potrešnje [A]'
I = 81.7500
ans = '4-Makismalni moment [Nm]'
Mmax = 278.1000
    
```

Na slici 2.34 prikazana je statička karakteristika snage u motorskom režimu i režimu generatorskog kočenja.

```
ans = '6-Kutna brzina kočenja [rad/sek]'
```

```
omKg = -209
```

```
nk = -1.9958e+03
```



Sl. 2.34 - Statička karakteristika snage u motorskom režimu i režimu generatorskog kočenja

Dodavanjem otpora R_d u armaturni krug stroja, povećava se brzina generatorskog kočenja. Naime, tada vrijedi relacija:

$$\omega_k = -\frac{R_a + R_d}{k^2} \cdot M_t - \omega_{max}$$

Ako je vrijednost dodatnog otpora $R_d = 0,5\Omega$, tada kutna brzina kočenja ω_k iznosi:

$$\omega_k = -\frac{0,8 + 0,5}{1,2^2} \cdot 98,1 - 154,5 = -243 \text{ rad/sek}$$

Odnosno

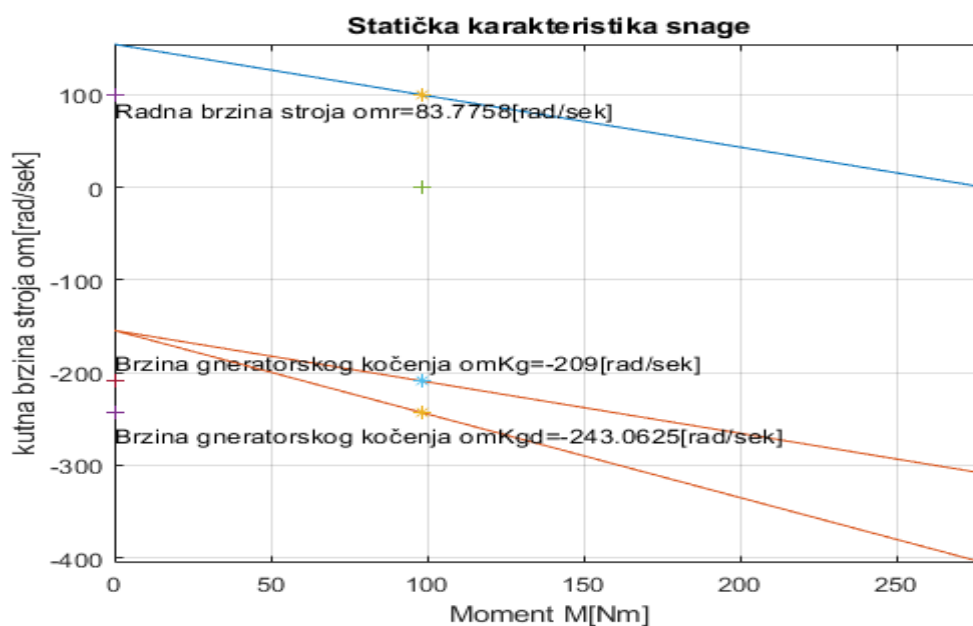
$$n_k = \frac{30}{\pi} \cdot (-243) = -2.321,1 \text{ rad/sek}$$

Rješenje (programska rutina u MatLab-u) je sljedeće:

```
'7- Kutna brzina kočenja putem dodatnog otpora'
Rd=0.5 %Dodatni otpor u armaturnom krugu [Om]
omKgd=-(Ra+Rd)/k^2*Mt-ommax
nk=30/pi*omKgd
om=- (Ra+Rd)/k^2*M-ommax;
fplot(om,[0 Mmax])
plot(Mt,omKgd,'*')
plot(0,omKgd,'+')
plot(Mt,0,'+')
grid on
txt=['Brzina gneratorskog kočenja omKgd=',num2str(omKgd),'[rad/sek]'];
text(0,1.1*omKgd,txt)
```

Na slici 2.35 prikazana je dopunjena statička karakteristika snage dodavanjem otpora R_d

```
ans = '7- Kutna brzina kočenja putem dodatnog otpora'
Rd = 0.5000
omKgd = -243.0625
nk = -2.3211e+03
```



Sl. 2.35 – Dopunjena statička karakteristika snage (dodavanje otpora R_d)

2.3.2 Protustrujno kočenje

Protustrujno kočenje istosmjernog stroja ostvaruje se dodavanjem otpora R_d u armaturni krug stroja i zamjenom polova napona stroja U_m . Naime, vrijedit će sljedeća relacija:

$$\omega_k = -\frac{R_a + R_d}{k^2} \cdot M_t - \frac{U_m}{k}$$

U režimu protustrujnog kočenja mehanička energija radnog mehanizma koja se pretvara u električnu energiju kao i energija izvora napajanja troše se u otporima armaturnog kruga stroja prevarajući tu energiju u toplinu. Zato stroj mora imati sustav hlađenja.

Važno je jednako tako voditi računa o vrsti tereta. Ako npr. stroj ne isključimo iz mreže u trenutku kada je okretanje stalo, reaktivni teret nastaviti će okretati osovinu stroja u suprotnom smjeru dostignutom brzinom kočenja, a aktivni teret će okretati osovinu u suprotnom smjeru brzinom generatorskog kočenja. Ako je moment reaktivnog tereta veći od momenta kočenja stroja, tada će pogon stati.

Primjer br. 9

U primjeru 9. koristit će se isti podaci kao i u primjeru 8., te se određuju sljedeće statičke karakteristike pogona i kočenja:

$$\omega = -\frac{R_a}{k^2} \cdot M_t + \frac{U_m}{k}$$

$$\omega_k = -\frac{R_a + R_d}{k^2} \cdot M_t - \frac{U_m}{k}$$

Stroj je imao radnu kutnu brzinu pogona od $\omega_r = 100 \text{ rad/sek}$. Pri promjeni polariteta napona stroja i dodavanjem otpora $R_d = 0,5\Omega$ u armaturni krug stroja ostavrena je kutna brzina kočenja od $\omega_k = -243 \text{ rad/sek}$.

Rješenje (programska rutina u MatLab-u) je sljedeće:

```
'PROTUSTRUJNO KOČENJE stroja '  
  
'Zadano'  
k=1.2 %Konstanta stroj [Vs]  
Ra=0.8 %Otpor armature rotora [Om]  
Mt=98.1 %Moment tereta [Nm]  
D=0.2 %Promjer osovine dizalice [m]  
v=10 %Radna kutna brzina stroja [m/s]  
Rd=0.5 %Dodatni otpor armature [Om]
```

'Rješenje'

'1-Kutna brzina stroja (radna) i broj okretaja [rad/sek]'

$$\text{omr}=2*v/D$$

$$n=30/\pi*\text{omr}$$

'2- Potrebni napon stroja [V]'

$$U_m=R_a/k*M_t+k*\text{omr}$$

'3- Makimalna kutna brzina i brzina okretaja praznog hoda) [rad/sek]'

$$\text{ommax}=U_m/k$$

$$n_{\text{max}}=30/\pi*\text{ommax}$$

'4 - Struja potrebne [A]'

$$I=M_t/k$$

'4-Makimalni moment [Nm]'

$$M_{\text{max}}=k*U_m/R_a$$

'5 - Moment kod promjene polariteta [Nm]'

$$M_d=-(\text{omr}+\text{ommax})*k^2/(R_a+R_d)$$

'6-Moment kočenja kod zaustavljanja stroja [Nm]'

$$M_k=-\text{ommax}*k^2/(R_a+R_d)$$

'7-Brzina okretanja reaktivnog tereta u suprotnom smjeru [rad/sek]'

$$\text{omre}=- (R_a+R_d)/k^2*(-M_t)-\text{ommax}$$

'8 - Brzina generatorskog kočenja [rad/sek]'

$$\text{omgk}=- (R_a+R_d)/k^2*M_t-\text{ommax}$$

'9 - Presječne točke';

$$\text{om}=\text{omr};$$

fplot(om, [-1.5*Mmax Mmax], '--')

hold on

plot(Md,omr, '*')

plot(Mk,θ, '*')

plot(θ, -ommax, '*')

plot(Mt,omgk, '*')

plot(-Mt,omre, '*')

plot(-Mt,θ, '+')

plot(θ,omre, '+')

hold on

```
'10 - Statička karakteritika snage i kočenja'
syms M
om=-Ra/k^2*M+ommax;
fplot(om,[0 Mmax])
grid
hold on
om=-(Ra+Rd)/k^2*M-ommax;
fplot(om,[-1.5*Mmax Mk], '--')
om=-(Ra+Rd)/k^2*M-ommax;
fplot(om,[Mk 0])
om=-(Ra+Rd)/k^2*M-ommax;
fplot(om,[0 Mmax], '--')

title('Statička karakteristika snage')
xlabel('Moment M[Nm]')
ylabel('kutna brzina motora omN[rad/sek]')
hold on
plot(Mt,omr, '*')
hold on
```

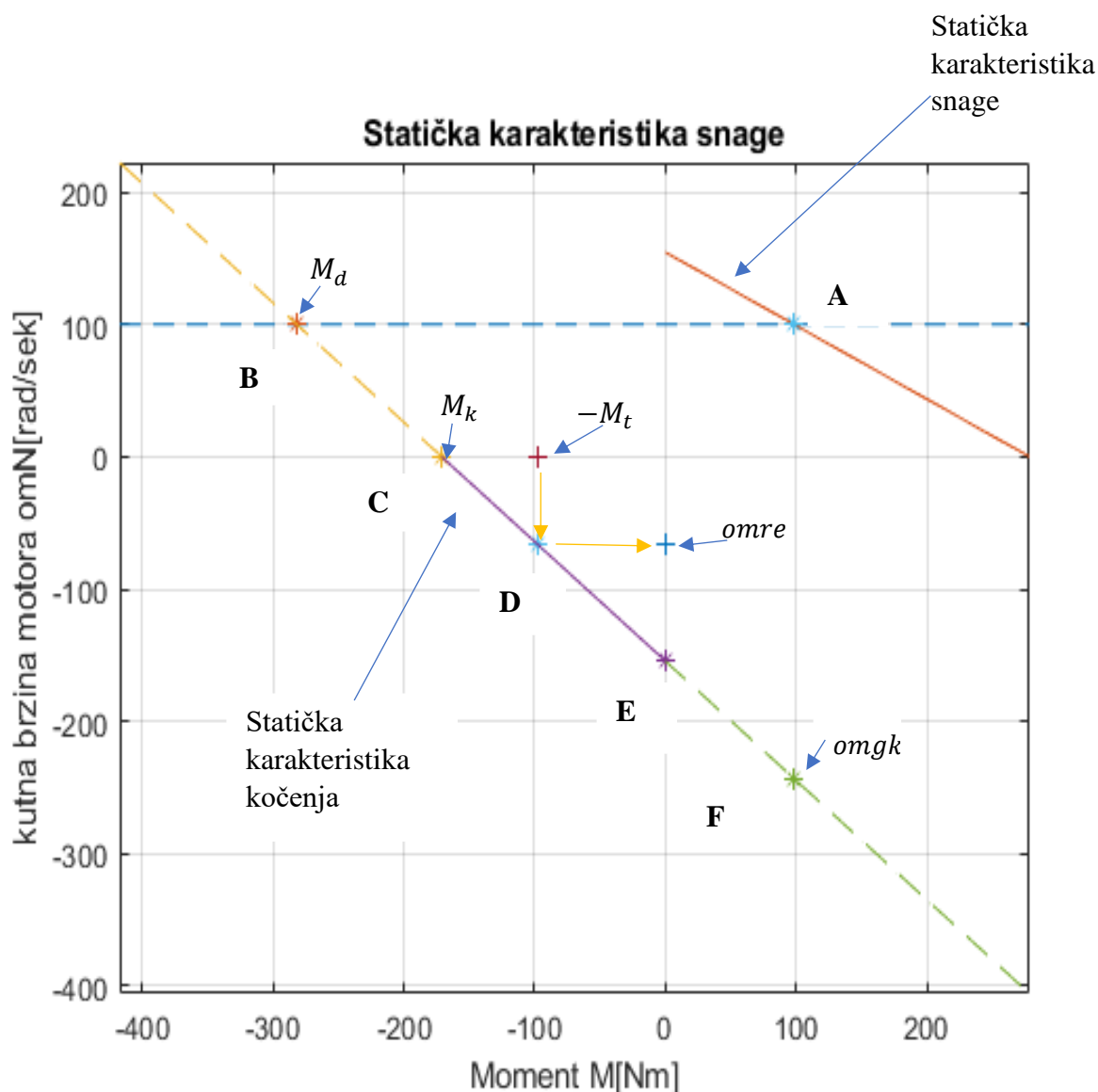
Parametri

```
ans = 'PROTUSTRUJNO KOČENJE stroja '
ans = 'Zadano'
k = 1.2000
Ra = 0.8000
Mt = 98.1000
D = 0.2000
v = 10
Rd = 0.5000
ans = 'Rješenje'
ans = '1-Kutna brzina stroja (radna) i broj okretaja [rad/sek]'
omr = 100
n = 954.9297
ans = '2- Potrebni napon stroja [V]'
Um = 185.4000
ans = '3- Makismalna kutna brzina i brzina okretaja praznog hoda) [rad/sek]'
ommax = 154.5000
nmax = 1.4754e+03
ans = '4 - Struja potrešnje [A]'
I = 81.7500
ans = '4-Makismalni moment [Nm]'
Mmax = 278.1000
```

```

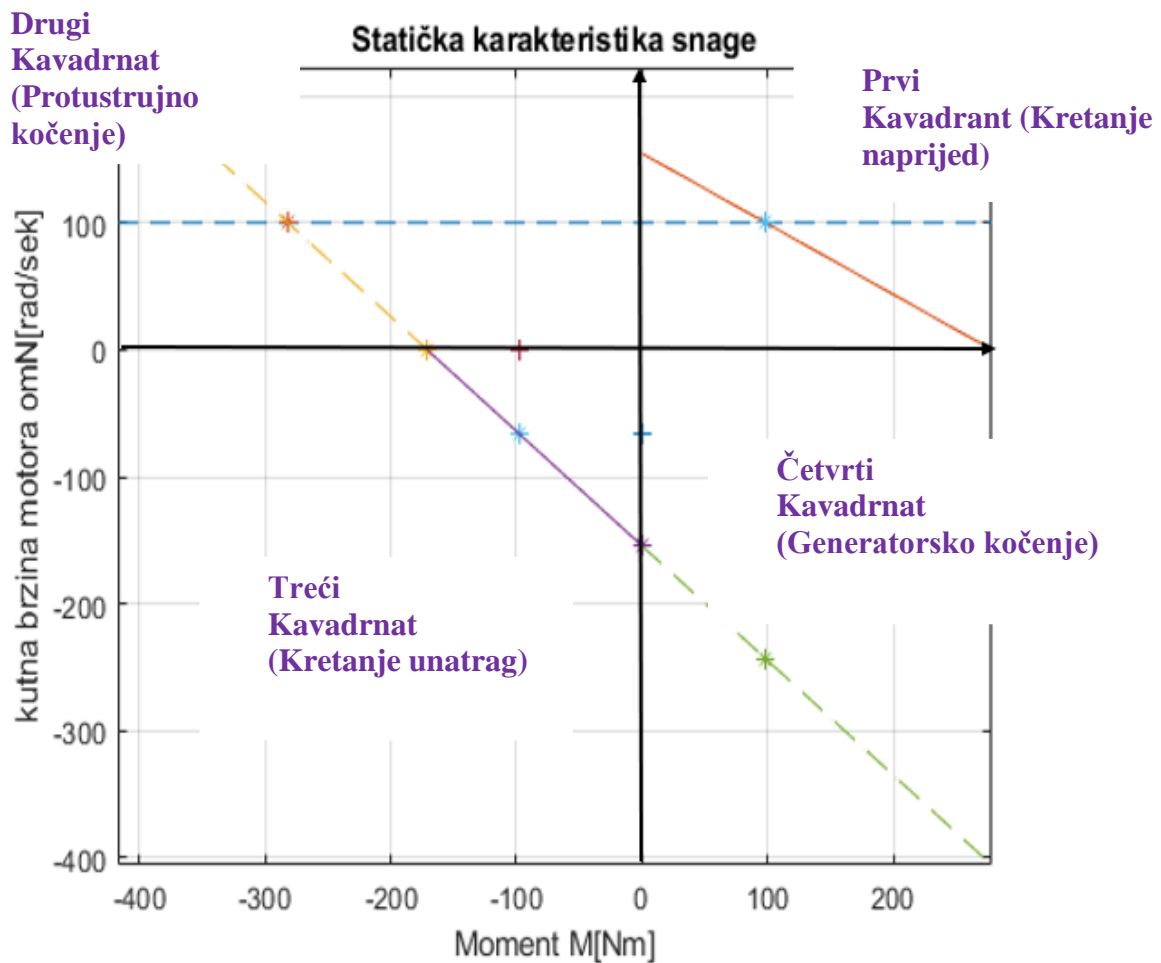
ans = '5 - Moment kod promjene polariteta [Nm]'
Md = -281.9077
ans = '6-Moment kočenja kod zaustavljanja stroja [Nm]'
Mk = -171.1385
ans = '7-Brzina okretanja reaktivnog tereta u suprotnom smjeru [rad/sek]'
omre = -65.9375
ans = '8 - Brzina generatorskog kočenja [rad/sek]'
omgk = -243.0625
    
```

Na slici 2.36 prikazana je statička karakteristika snage za slučaj protustrujnog kočenja



Sl. 2.36 – Statička karakteristika snage za slučaj protustrujnog kočenja

Na temelju slike 2.36 prikazani su na slici 2.37 kvadranti rada istosmjernog stroja.



Sl. 2.37 - Kvadranti rada istosmjernog stroja (protustrujno kočenje)

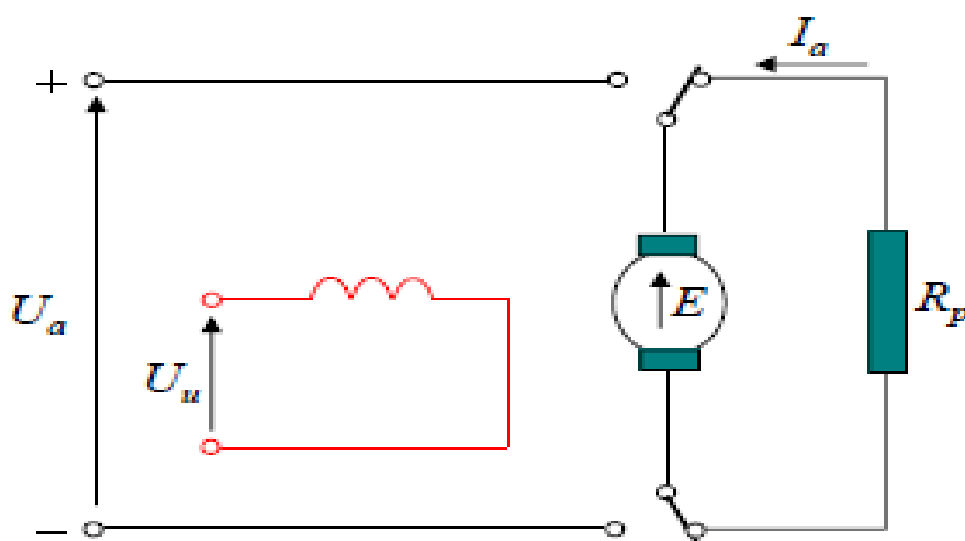
Rezultati prikazani na prethodnim slikama pokazuju sljedeće:

- istosmjerni stroj započinje rad u prvom kvadrantu (kretanje naprijed) i okreće se kutnom brzinom od $\omega_r = 100 \text{ rad/sec}$ s momentom tereta od $M_t = 98,1 \text{ Nm}$. Na statičkoj karakteristici snage to je točka A,
- U trenutku kada je uključeno kočenje dolazi do zamjene polariteta i u krug armature uključuje se otpor $R_d = 0,5\Omega$. Tada dolazi do protustrujnog kočenja i javlja se moment $M_d = -281,9 \text{ Nm}$. Na statičkoj karakteristici snage to je točka B, ujedno i sjecište sa statičkom karakteristikom kočenja,
- Ppostustrujno kočenje se nastavlja po statičkoj karakteristici kočenja do točke C kada se pojavljuje moment $M_k = -171,4 \text{ Nm}$ tj. stroj se zastavlja ($\omega = 0 \frac{\text{rad}}{\text{sek}}$). U tom trenutku potrebno je isključiti napajanje.

- Ukoliko se napajanje ne isključi, dolazi do prelaska iz drugog u treći kvadrant, a to znači da se aktivira kretanje u suprotnom smjeru. Ako se radi o reaktivnom teretu, tada će isti postići kutnu brzinu u suprotnom smjeru od $\omega_{mre} = -65,93 \text{ rad/sek}$. Ako se radi o aktivnom teretu, isti će se rotirati u suprotnom smjeru brzinom generatorskog kočenja $\omega_{mkg} = -243 \text{ rad/sek}$

2.3.3 Elektrodinamičko (otporno) kočenje

Elektrodinamičko kočenje nastaje kada se pri nekoj brzini armatura stroja odspoji od napona napajanja i spoji na otpornik R_p , a uzbuda ostane nepromijenjena kako je prikazano na slici 2.38.



Sl. 2.38 – Shema elektrodinamičkog (otpornog) kočenja [Izvor: FER - ZESA]

Stroj se zbog inercije nastavlja okretati u istom smjeru, pa se kao posljedica inducirane elektromotorne sile u armaturnom namotaju javlja struja. Smjer struje pri elektrodinamičkom kočenju je suprotan smjeru struje koji je bio u motorskom režimu rada, pa je i smjer djelovanja momenta suprotan brzini okretanja osi. Moment se smanjuje sa smanjenjem brzine okretanja osovine stroja, a isto se može na nižim brzinama regulirati tako da se smanji otpor R_p dodan u armaturni krug.

Primjer br. 10

U primjeru 10. koristiti će se isti podaci kao i u primjeru 8., te se određuju sljedeće statičke karakteristike pogona i kočenja:

$$\omega = -\frac{R_a}{k^2} \cdot M_t + \frac{U_m}{k}$$

$$\omega_k = -\frac{R_a + R_p}{k^2} \cdot M_t - \frac{U_m}{k}$$

Ako se odspoji napon napajanja U_m , tada vrijedi:

$$\omega_k = -\frac{R_a}{k^2} \cdot M_t$$

odnosno

$$\omega_k = -\frac{R_a + R_p}{k^2} \cdot M_t$$

Stroj je imao radnu kutnu brzinu pogona od $\omega_r = 100 \text{ rad/sek}$ i neka je dodani otpor jednak $R_p = 0.5\Omega$.

Ako je moment tereta reaktivan, stroj će se zaustaviti, a ako je moment aktivan stroj će se nakon zaustavljanja okretati u suprotnom smjeru do brzine vrtnje ω_{gk} . Stroj će stati ($\omega = 0 \text{ rad/sek}$), ako je teret reaktivan. No, ako je teret aktivan, a stroj ne zakočimo u trenutku kada je stao, on će krenut u drugu stranu generatorski do brzine ω_{gk} .

Rješenje (programska rutina u MatLab-u) je sljedeće:

```
'ELEKTRODINAMIČNO (OTPORNO) KOČENJE stroja'
```

```
'Zadano'
```

```
k=1.2 %Konstanta stroj [Vs]
```

```
Ra=0.8 %Otpor armature rotora [Om]
```

```
Mt=98.1 %Moment tereta [Nm]
```

```
D=0.2 %Promjer osovine dizalice [m]
```

```
v=10 %Radna kutna brzina stroja [m/s]
```

```
Rp=0.5 %Dodatni otpor armature [Om]
```

```
'Rješenje'
```

```
'1-Kutna brzina stroja (radna) i broj okretaja [rad/sek]'
```

```
omr=2*v/D
```

```
n=30/pi*omr
```

```
'2- Potrebni napon stroja [V]'
```

```
Um=Ra/k*Mt+k*omr
```

```
'3- Makimalna kutna brzina i brzina okretaja praznog hoda) [rad/sek]'
```

```
ommax=Um/k
nmax=30/pi*ommax

'4 - Struja potrešnje [A]'
I=Mt/k

'4-Makismalni moment [Nm]'
Mmax=k*Um/Ra

'5 - Moment kod promjene polariteta [Nm]'
Md=-omr*k^2/(Ra+Rp)

'6 - Brzina aktivnog tereta [rad/sek]'
omgk=-(Ra+Rp)/k^2*Mt

'7 - Statička karakteristika snage i kočenja'
syms M
om=-Ra/k^2*M+Um/k;
fplot(om, [-Mmax Mmax])
hold on
om=-Ra/k^2*M;
fplot(om, [-Mmax Mmax])
hold on
om=omr;
fplot(om, [-Mmax Mmax], '--')
hold on
om=-(Ra+Rp)/k^2*M;
fplot(om, [-Mmax Md])
hold on
om=-(Ra+Rp)/k^2*M;
fplot(om, [Md 0], '--')
hold on
om=-(Ra+Rp)/k^2*M;
fplot(om, [0 Mmax])
grid

title('Statička karakteristika snage')
xlabel('Moment M[Nm]')
ylabel('kutna brzina motora omr[rad/sek]')
hold on

plot(Mt,omr, '*')
plot(Md,omr, '*')
plot(Mt,omgk, '*')
hold on
```

Parametri

ans = 'ELEKTRODINAMIČNO (OTPORNO) KOČENJE stroja'

ans = 'Zadano'

k = 1.2000

Ra = 0.8000

Mt = 98.1000

D = 0.2000

v = 10

Rp = 0.5000

ans = 'Rješenje'

ans = '1-Kutna brzina stroja (radna) i broj okretaja [rad/sek]'

omr = 100

n = 954.9297

ans = '2- Potrebni napon stroja [V]'

Um = 185.4000

ans = '3- Makismalna kutna brzina i brzina okretaja praznog hoda) [rad/sek]'

ommax = 154.5000

nmax = 1.4754e+03

ans = '4 - Struja potrešnje [A]'

I = 81.7500

ans = '4-Makismalni moment [Nm]'

Mmax = 278.1000

ans = '5 - Moment kod promjene polariteta [Nm]'

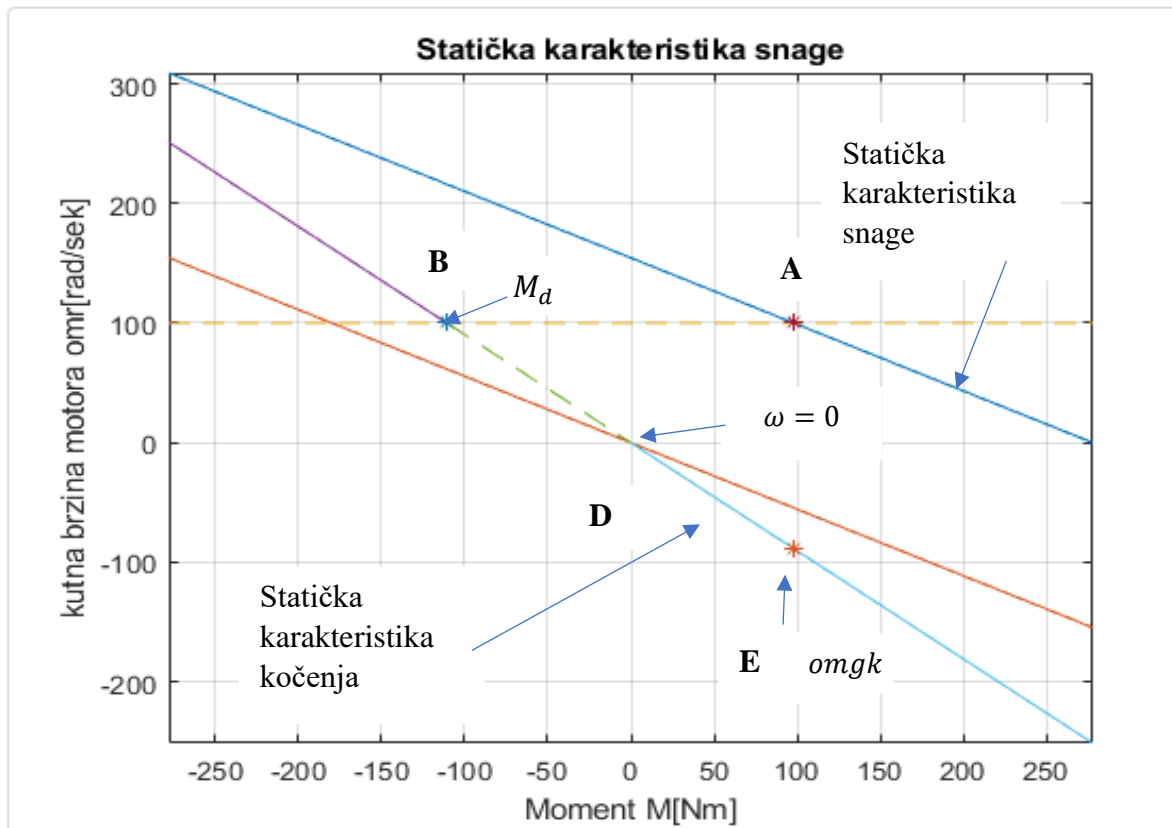
Md = -110.7692

ans = '6 - Brzina aktivnog tereta [rad/sek]'

omgk = -88.5625

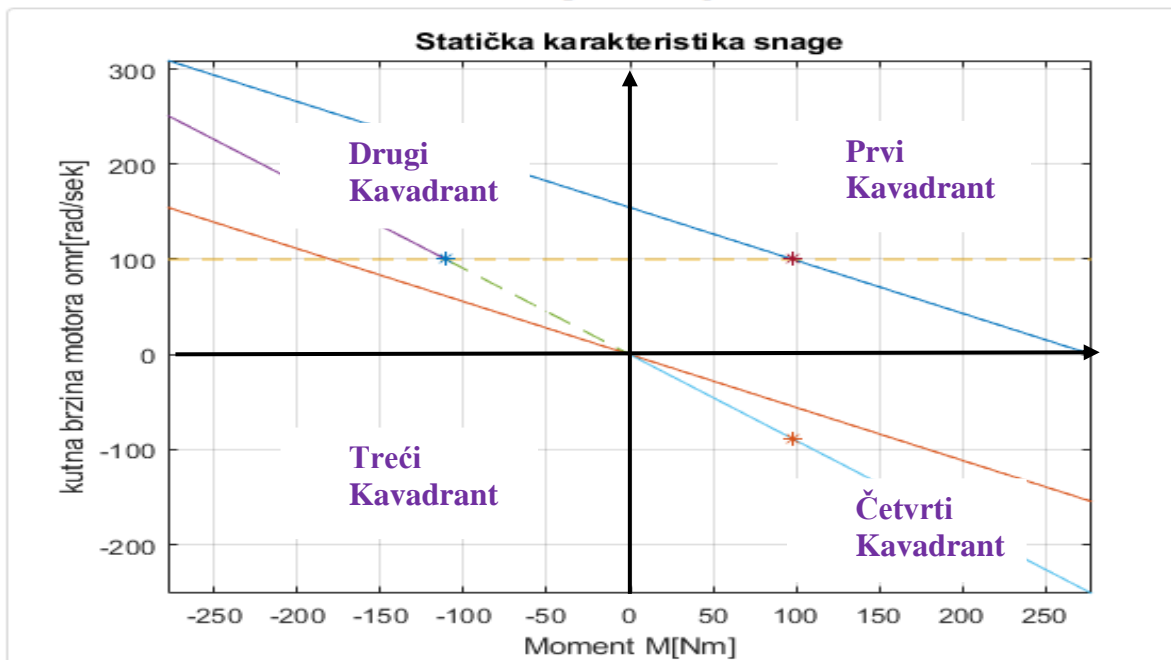
Na slici 2.39 prikazana je statička karakteristika snage za slučaj elektrodinamičkog (otpornog) kočenja.

ans = '7 - Statička karakteristika snage i kočenja'



Sl. 2.39 - Statička karakteristika snage za slučaj elektrodinamičkog (otpornog) kočenja
Na temelju slike 2.39 prikazani su na slici 2.40 kvadranti rada istosmjernog stroja.

ans = '7 - Statička karakteristika snage i kočenja'



Sl. 2.40 - Kvadranti rada istosmjernog stroja (elektrodinamičko kočenje)

2.3.4 Dinamička karakteristika kočenja

Dinamička karakteristika kočenja odredit će se na primjeru prostustrujnog kočenja na istosmjernom stroju uz zanemarivanje viskoznog trenja, a uz dodatak da će se moment tereta uključiti u stationarnom stanju, dakle nakon završetka prijelaznog procesa.

U slučaju kada zanemarimo viskozno k_b mjenja se i karakteristična jednadžba $A(s)$:

$$\begin{aligned} A(s) &= (s \cdot L_a + R_a) \cdot (J_m \cdot s + k_v) + k^2 \\ &= L_a \cdot J_m \cdot s^2 + (R_a \cdot J_m + L_a \cdot k_v) \cdot s + R_a \cdot k_v + k^2 \end{aligned}$$

Koja sada glasi:

$$A(s) = L_a \cdot s^2 + R_a \cdot J_m \cdot s + k^2$$

Slijedom prije navedenoga sada vrijedi:

$$I(s) = \frac{J_m \cdot s \cdot U_m(s)}{L_a \cdot s^2 + R_a \cdot J_m \cdot s + k^2} + \frac{k \cdot M_t(s)}{L_a \cdot s^2 + R_a \cdot J_m \cdot s + k^2}$$

Odnosno

$$I(s) = G_{mI}(s) \cdot U_m(s) + G_{tI}(s) \cdot M_t(s)$$

gdje je:

$$G_{mI}(s) = \frac{J_m \cdot s}{L_a \cdot s^2 + R_a \cdot J_m \cdot s + k^2}$$

$$G_{tI}(s) = \frac{k}{L_a \cdot s^2 + R_a \cdot J_m \cdot s + k^2}$$

Jednako tako vrijedi:

$$\Omega(s) = \frac{k \cdot U_m(s)}{L_a \cdot s^2 + R_a \cdot J_m \cdot s + k^2} - \frac{(s \cdot L_a + R_a) \cdot M_t(s)}{L_a \cdot s^2 + R_a \cdot J_m \cdot s + k^2}$$

Odnosno

$$\Omega(s) = G_{m\Omega}(s) \cdot U_m(s) - G_{t\Omega}(s) \cdot M_t(s)$$

gdje je:

$$G_{m\Omega}(s) = \frac{k}{L_a \cdot s^2 + R_a \cdot J_m \cdot s + k^2}$$

$$G_{t\Omega}(s) = \frac{(s \cdot L_a + R_a)}{L_a \cdot s^2 + R_a \cdot J_m \cdot s + k^2}$$

Uvođenjem vremenskih konstanti (T_m – mehanička vremenska konstanta stroja i T_a – električna vremenska konstanta stroja) i koeficijenta (k_m i k_s) kako slijedi:

$$T_m = \frac{J_m \cdot R_a}{k^2}$$

$$T_a = \frac{L_a}{R_a}$$

$$k_m = \frac{1}{k}$$

$$k_s = k_m^2 \cdot R_a$$

Odnosno vrijedi da je:

$$G_{mI}(s) = \frac{k_m^2 \cdot J_m \cdot s}{T_m \cdot T_a \cdot s^2 + T_a \cdot J_m \cdot s + 1}$$

$$G_{tI}(s) = \frac{k_m}{T_m \cdot T_a \cdot s^2 + T_a \cdot J_m \cdot s + 1}$$

$$G_{m\Omega}(s) = \frac{k_m}{T_m \cdot T_a \cdot s^2 + T_a \cdot J_m \cdot s + 1}$$

$$G_{t\Omega}(s) = \frac{k_s \cdot (s \cdot T_a + 1)}{L_a \cdot s^2 + R_a \cdot J_m \cdot s + k^2}$$

Ako se teret uključuje nakon završetka prijelaznog procesa (odnosno u nekom trenutku t_t) tada vrijedi relacija:

$$M_t(t) = M_t \cdot S(t - t_t)$$

Laplasova transformacija glasi:

$$M_t(s) = L\{M_t \cdot S(t - t_t)\} = M_t \cdot \int_0^{\infty} S(t - t_t) \cdot e^{-st} dt = M_t \cdot \frac{e^{-t_t \cdot s}}{s}$$

Prema tome može se napisati:

$$\omega(t) = L^{-1}\left\{\frac{G_{m\Omega}(s)}{s}\right\} \cdot U_m - L^{-1}\left\{\frac{G_{t\Omega}(s) \cdot e^{-t_t \cdot s}}{s}\right\} \cdot M_t$$

$$I(t) = L^{-1}\left\{\frac{G_{mI}(s)}{s}\right\} \cdot U_m + L^{-1}\left\{\frac{G_{tI}(s) \cdot e^{-t_t \cdot s}}{s}\right\} \cdot M_t$$

Jednadžbe vrijede u slučaju pokretanja stroja pri čemu napon stroja mora biti veći od napona pokretanja stroja U_p odnosno vrijedi:

$$U_m > U_p = \frac{R_a}{k} \cdot M_t$$

Napon protustrujnog kočenja morao bi tada biti jednak:

$$U_k = -(U_m - U_p)$$

Ako se protustrujno kočenje uključi u nekom trenutku t_k tada vrijedi relacija

$$U_k(t) = U_k \cdot S(t - t_k)$$

Laplasova transformacija glasi:

$$U_k(s) = L\{M_k \cdot S(t - t_k)\} = U_k \cdot \int_0^{\infty} S(t - t_k) \cdot e^{-st} dt = U_k \cdot \frac{e^{-t_k \cdot s}}{s}$$

Jednako tako mijenjaju se vremenske konstante motora jer se u krug armature dodaje otpor R_p , pa stoga vrijedi:

$$T_{mk} = \frac{J_m \cdot (R_a + R_p)}{k^2}$$

$$T_a = \frac{L_a}{(R_a + R_p)}$$

i konstanta:

$$k_s = k_m^2 \cdot (R_a + R_p)$$

Prema tome može se napisati:

$$\omega_k(t) = L^{-1} \left\{ \frac{G_{m\Omega}(s) \cdot e^{-t_k \cdot s}}{s} \right\} \cdot U_k$$

$$I_k(t) = L^{-1} \left\{ \frac{G_{mI}(s) \cdot e^{-t_k \cdot s}}{s} \right\} \cdot U_k$$

Na temelju prijelazne karakteristike brzine kočenja $\omega_k(t)$ moguće je izračunati vrijeme kada isključiti napajanje stroja kako bi se stroj zaustavio. Vrijeme prekida kočenja t_{pk} kako bi se stroj zaustavio računa se kao vrijeme smirivanja signala T_s (engl. *Settling Time Treshold, STT*) odnosno vrijedi:

$$t_{pk} = T_s$$

U primjeru br. 11 odredit će se prijelazna funkcija i kočenja stroja na primjeru protusmjernog kočenja.

Primjer br. 11

U primjeru 11. koristiti će se isti podaci kao i u prethodnim primjerima kako bi se odredila dinamička karakteristike pogona i kočenja. Radi se o sljedećim relacijama:

a) Kutna brzina

$$\omega(t) = L^{-1} \left\{ \frac{G_{m\Omega}(s)}{s} \right\} \cdot U_m - L^{-1} \left\{ \frac{G_{t\Omega}(s) \cdot e^{-t_t \cdot s}}{s} \right\} \cdot M_t$$

$$\omega_k(t) = L^{-1} \left\{ \frac{G_{m\Omega}(s) \cdot e^{-t_k \cdot s}}{s} \right\} \cdot U_k$$

b) Struja

$$I(t) = L^{-1} \left\{ \frac{G_{mI}(s)}{s} \right\} \cdot U_m + L^{-1} \left\{ \frac{G_{tI}(s) \cdot e^{-t_t \cdot s}}{s} \right\} \cdot M_t$$

$$I_k(t) = L^{-1} \left\{ \frac{G_{mI}(s) \cdot e^{-t_k \cdot s}}{s} \right\} \cdot U_k$$

gdje je:

t_t – vrijeme uključenja tereta [sek]

t_k – vrijeme uključenja kočenja [sek]

Potrebno je odrediti vrijeme isključenja napajanja t_{pk} .

Rješenje (programska rutina u MatLab-u) je sljedeće:

```
'DINAMIČKA KARAKTERISTIKA POGONA I KOČENJA stroja'
```

```
'Zadano'
```

```
k=1.2 %Konstanta stroj [Vs]
Ra=0.8 %Otpor armature rotora [Om]
Mt=98.1 %Moment tereta [Nm]
D=0.2 %Promjer osovine dizalice [m]
v=10 %Radna kutna brzina stroja [m/s]
Rp=0.5 %Dodatni otpor armature [Om]
La=10e-3 %Induktivitete armature [H]
tt=10 %Vrijeme uključivanja tereta [sek]
tk=40 %vrijeme početka kočenja [sek]
Juk=3 %Ukupni moment inercije [kgm^2]
```

```
'Rješenje'
```

```
'1-Kutna brzina stroja (radna) i broj okretaja [rad/sek]'
```

```
omr=2*v/D
```

```
n=30/pi*omr
```

'2- Potrebni napon stroja [V]'

$$U_m = R_a / k * M_t + k * \omega_m$$

'3- Makimalna kutna brzina i brzina okretaja praznog hoda) [rad/sek]'

$$\omega_{max} = U_m / k$$

$$n_{max} = 30 / \pi * \omega_{max}$$

'4 - Struja potrešnje [A]'

$$I = M_t / k$$

'4-Makimalni moment [Nm]'

$$M_{max} = k * U_m / R_a$$

'5 - Napon pokretanja stroja [V]'

$$U_p = R_a / k * M_t$$

'6 - Parametri dinamičke karakteristike'

'Vremenske konstante stroja [sek] ';

$$T_a = L_a / R_a$$

$$T_m = J_{uk} * R_a / k^2$$

'Koeficijenti stroja'

$$k_m = 1 / k$$

$$k_s = k_m^2 * R_a$$

'7 - Prijenosna funkcija stroja'

$$a = T_m * T_a;$$

$$b = T_m;$$

$$c = 1;$$

$$G_m = tf([k_m], [a \ b \ c])$$

'8-Prijenosna funkcija tereta'

$$G_t = k_s * tf([T_a \ 1], [a \ b \ c])$$

'9 - Kašnjenje uključenja tereta'

$$s = tf('s')$$

$$M_t = M_t * \exp(-s * t_t)$$

'10 - Prijelazna funkcija pogona s teretom'

$$\omega_{mt} = G_m * U_m - G_t * M_t$$

$$\text{step}(\omega_{mt})$$

$$\text{title('Dinamička karakteristika stroja')}$$

```
xlabel('Vrijeme t[sek]')
ylabel('Kutna brzina motora om[rad/sek]')
grid

'11 - Parametri dinamičke karakteristike kočenja'
'Vremenske konstante stroja [sek] ';
R=Ra+Rp
Ta=La/R;
Tm=Juk*R/k^2

'Koeficijenti stroja'
km=1/k
ks=km^2*R

'12 - Prijenosna funkcija stroja i tereta'
a=Tm*Ta;
b=Tm;
c=1;
Gm=tf([km],[a b c])
Gt=ks*tf([Ta 1],[a b c])

'13 - Napon kočenja [V]'
Uk=-(Um-Up)

'14 - Kašnjenje uključenja kočenja'
Uk=Uk*exp(-tk*s)

'15 - Prijelazna funkcija kočenja'
omtk=Gm*Uk
t=(0:0.1:60);
S=omt+omtk
step(S,t)
title('Dinamička karakteristika stroja')
xlabel('Vrijeme t[sek]')
ylabel('Kutna brzina motora om[rad/sek]')

'16 - Vrijeme isključivanja napajanja [sek]'
S1=stepinfo(omtk,'SettlingTimeThreshold',0.02);
tpk = S1.SettlingTime
grid
```

Parametri

ans = 'DINAMIČKA KARAKTERISTIKA POGONA I KOČENJA stroja'

ans = 'Zadano'

k = 1.2000

Ra = 0.8000

Mt = 98.1000

D = 0.2000

v = 10

Rp = 0.5000

La = 0.0100

tt = 10

tk = 40

Juk = 3

ans = 'Rješenje'

ans = '1-Kutna brzina stroja (radna) i broj okretaja [rad/sek]'

omr = 100

n = 954.9297

ans = '2- Potrebni napon stroja [V]'

Um = 185.4000

ans = '3- Makimalna kutna brzina i brzina okretaja praznog hoda) [rad/sek]'

ommax = 154.5000

nmax = 1.4754e+03

ans = '4 - Struja potrešnje [A]'

I = 81.7500

ans = '4-Makimalni moment [Nm]'

Mmax = 278.1000

```

ans = '5 - Napon pokretanja stroja [V]'
Up = 65.4000
ans = '6 - Parametri dinamičke karakteristike'
Ta = 0.0125
Tm = 1.6667
ans = 'Koeficijenti stroja'
km = 0.8333
ks = 0.5556
ans = '7 - Prijenosna funkcija stroja'
Gm =
      0.8333
-----
0.02083 s^2 + 1.667 s + 1
Continuous-time transfer function.
ans = '8-Prijenosna funkcija tereta'
Gt =
      0.006944 s + 0.5556
-----
0.02083 s^2 + 1.667 s + 1
Continuous-time transfer function.
ans = '9 - Kašnjenje uključenja tereta'
s =
s
Continuous-time transfer function.
Mt =
exp(-10*s) * (98.1)
Continuous-time transfer function.
ans = '10 - Prijelazna funkcija pogona s teretom'
omt =
A =
      x1    x2    x3    x4
x1  -80    -6     0     0
x2   8     0     0     0
x3   0     0   -80    -6
x4   0     0     8     0

B =
      u1
x1  32
x2   0
x3  16
x4   0

C =
      x1    x2    x3    x4
y1   0   28.97  -2.044  -20.44

D =
      u1
y1   0

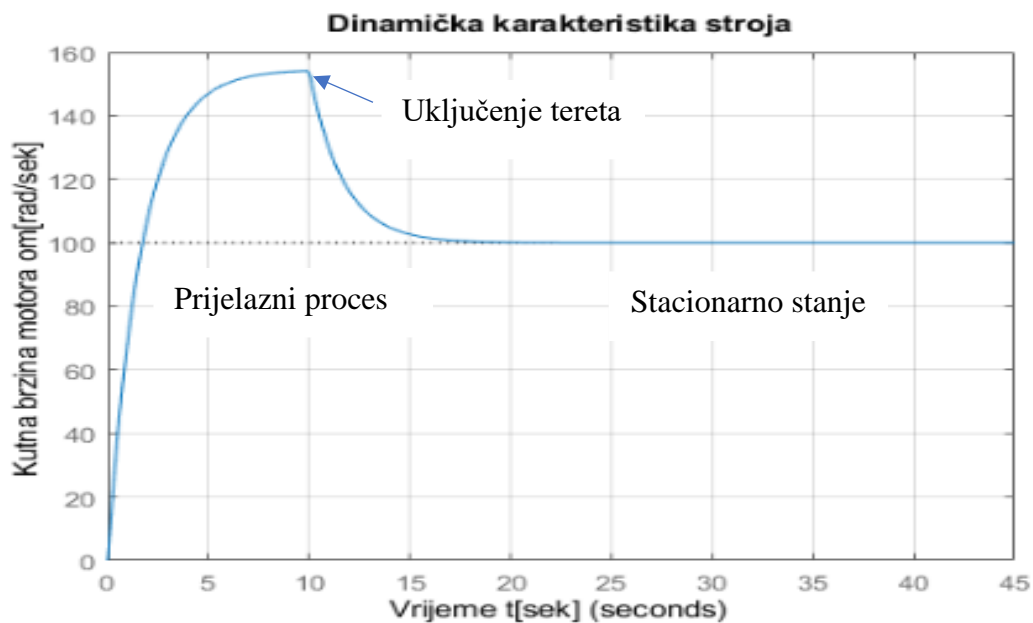
(values computed with all internal delays set to zero)

Internal delays (seconds): 10

Continuous-time state-space model.

```

Na slici 2.41 prikazan je dinamička karakteristika brzine stroja (prijelazna funkcija) u slučaju uključanja tereta.



Sl. 2.41 - Dinamička karakteristika brzine stroja (prijelazna funkcija) u slučaju uključanja tereta

Prametri

```
ans = '11 - Parametri dinamičke karakteristike kočenja'
```

```
R = 1.3000
```

```
Tm = 2.7083
```

```
ans = 'Koeficijenti stroja'
```

```
km = 0.8333
```

```
ks = 0.9028
```

```
ans = '12 - Prijenosna funkcija stroja i tereta'
```

```
Gm =
```

```
-----
0.8333
0.02083 s^2 + 2.708 s + 1
```

```
Continuous-time transfer function.
```

```
Gt =
```

```
-----
0.006944 s + 0.9028
0.02083 s^2 + 2.708 s + 1
```

```
Continuous-time transfer function.
```

```
ans = '13 - Napon kočenja [V]'
```

```
Uk = -120
```

```
ans = '14 - Kašnjenje uključanja kočenja'
```

```
Uk =
```

```
exp(-40*s) * (-120)
```

```
Continuous-time transfer function.
```

```
ans = '15 - Prijelazna funkcija kočenja'
```

```
omtk =
```

$$\exp(-40*s) * \frac{-100}{0.02083 s^2 + 2.708 s + 1}$$

```
Continuous-time transfer function.
```

```
S =
```

```
A =
```

	x1	x2	x3	x4	x5	x6
x1	-80	-6	0	0	0	0
x2	8	0	0	0	0	0
x3	0	0	-80	-6	0	0
x4	0	0	8	0	0	0
x5	0	0	0	0	-130	-6
x6	0	0	0	0	8	0

```
B =
```

	u1
x1	32
x2	0
x3	16
x4	0
x5	32
x6	0

```
C =
```

	x1	x2	x3	x4	x5	x6
y1	0	28.97	-2.044	-20.44	0	-18.75

```
D =
```

	u1
y1	0

```
(values computed with all internal delays set to zero)
```

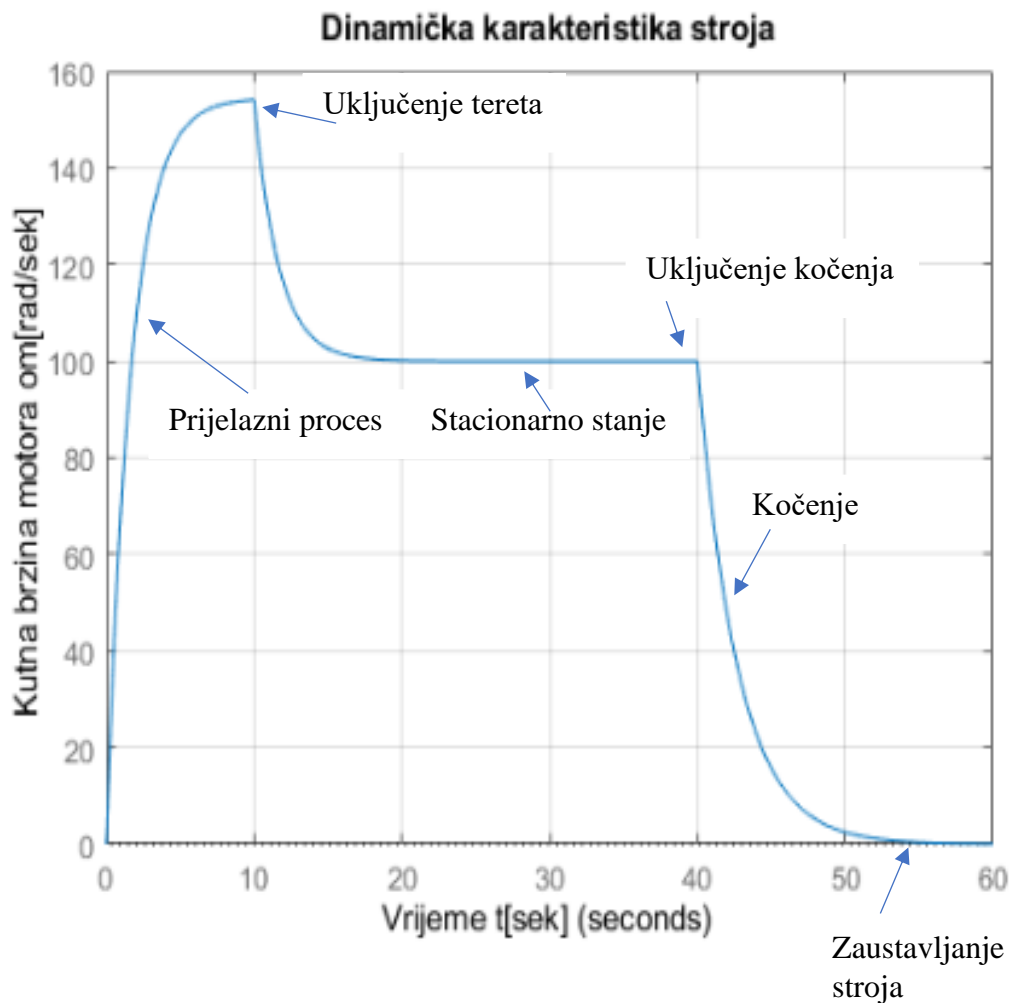
```
Internal delays (seconds): 10 40
```

```
Continuous-time state-space model.
```

```
ans = '16 - Vrijeme isključivanja napajanja [sek]'
```

```
tpk = 50.5751
```

Na slici 2.42 prikazan je dinamička karakteristika brzine stroja (prijelazna funkcija) u slučaju uključenja tereta i kočenja.



Sl. 2.42 - Dinamička karakteristika brzine stroja (prijelazna funkcija) u slučaju uključenja tereta i kočenja.

Vrijeme zaustavljanja stroj iznosi:

$$t_{pk} \cong 51 \text{ sek}$$

U nastavku će se odrediti strujna prijelazna karakteristika.

Primjer br. 12

Rješenje (programska rutina u MatLab-u):

```
'DINAMIČKA KARAKTERISTIKA POGONA I KOČENJA stroja'
'Zadano'
k=1.2 %Konstanta stroj [Vs]
Ra=0.8 %Otpor armature rotora [Om]
Mt=98.1 %Moment tereta [Nm]
D=0.2 %Promjer osovine dizalice [m]
```

```
v=10 %Radna kutna brzina stroja [m/s]
Rp=0.5 %Dodatni otpor armature [Om]
La=10e-3 %Induktivitete armature [H]
tt=10 %Vrijeme uključivanja tereta [sek]
tk=40 %vrijeme početka kočenja [sek]
Juk=3 %Ukupni moment inercije [kgm^2]
```

'Rješenje'

'1-Kutna brzina stroja (radna) i broj okretaja [rad/sek]'

```
omr=2*v/D
n=30/pi*omr
```

'2- Potrebni napon stroja [V]'

```
Um=Ra/k*Mt+k*omr
```

'3- Makismalna kutna brzina i brzina okretaja praznog hoda) [rad/sek]'

```
ommax=Um/k
nmax=30/pi*ommax
```

'4 - Struja potrešnje [A]'

```
I=Mt/k
```

'4-Makismalni moment [Nm]'

```
Mmax=k*Um/Ra
```

'5 - Napon pokretanja stroja [V]'

```
Up=Ra/k*Mt
```

'6 - Parametri dinamičke karakteristike'

'Vremenske konstante stroja [sek] ';

```
Ta=La/Ra
Tm=Juk*Ra/k^2
```

'Koeficijenti stroja'

```
km=1/k
ks=km^2*Ra
```

'7 - Prijenosna funkcija stroja'

```
a=Tm*Ta;
b=Tm;
c=1;
```

```
GmI=km^2*tf([Juk 0],[a b c])
```

```
'8-Prijenosna funkcija tereta'
```

```
GtI=tf([km],[a b c])
```

```
'9 - Kašnjenje uključenja tereta'
```

```
s=tf('s')
```

```
Mt=Mt*exp(-s*tt)
```

```
'10 - Prijelazna funkcija pogona s teretom'
```

```
Im=GmI*Um+GtI*Mt;
```

```
step(Im)
```

```
title('Dinamička karakteristika stroja')
```

```
xlabel('Vrijeme t[sek]')
```

```
ylabel('Struja potrošnje I[A]')
```

```
grid
```

```
'11 - Parametri dinamičke karakteristike kočenja'
```

```
'Vremenske konstante stroja [sek] ';
```

```
R=Ra+Rp
```

```
Ta=La/R;
```

```
Tm=Juk*R/k^2
```

```
'Koeficijenti stroja'
```

```
km=1/k
```

```
ks=km^2*R
```

```
'12 - Prijenosna funkcija stroja i tereta'
```

```
a=Tm*Ta;
```

```
b=Tm;
```

```
c=1;
```

```
GmI=km^2*tf([Juk 0],[a b c])
```

```
Gt=ks*tf([Ta 1],[a b c])
```

```
'13 - Napon kočenja [V]'
```

```
Uk=-(Um-Up)
```

```
'14 - Kašnjenje uključenja kočenja'
```

```
Uk=Uk*exp(-tk*s)
```

```
Ik=GmI*Uk;
```

```
t=(0:0.1:60);
```

```
S=Im+Ik;
```

```
step(S,t)
title('Dinamička karakteristika motora')
xlabel('Vrijeme t[sek]')
ylabel('Struja potrošnje I[A]')
S1=stepinfo(Ik,'SettlingTimeThreshold',0.02);
tpk = S1.SettlingTime
grid on
```

Parametri

```
ans = 'DINAMIČKA KARAKTERISTIKA POGONA I KOČENJA stroja'
ans = 'Zadano'
k = 1.2000
Ra = 0.8000
Mt = 98.1000
D = 0.2000
v = 10
Rp = 0.5000
La = 0.0100
tt = 10
tk = 40
Juk = 3
ans = 'Rješenje'
ans = '1-Kutna brzina stroja (radna) i broj okretaja [rad/sek]'
omr = 100
n = 954.9297
ans = '2- Potrebni napon stroja [V]'
Um = 185.4000
ans = '3- Makismalna kutna brzina i brzina okretaja praznog hoda) [rad/sek]'
ommax = 154.5000
nmax = 1.4754e+03
ans = '4 - Struja potrešnje [A]'
I = 81.7500
ans = '4-Makismalni moment [Nm]'
Mmax = 278.1000
ans = '5 - Napon pokretanja stroja [V]'
Up = 65.4000
ans = '6 - Parametri dinamičke karakteristike'
Ta = 0.0125
Tm = 1.6667
ans = 'Koeficijenti stroja'
km = 0.8333
ks = 0.5556
```

```
ans = '7 - Prijenosna funkcija stroja'
```

```
GmI =
```

$$\frac{2.083 \text{ s}}{0.02083 \text{ s}^2 + 1.667 \text{ s} + 1}$$

```
Continuous-time transfer function.
```

```
ans = '8-Prijenosna funkcija tereta'
```

```
GtI =
```

$$\frac{0.8333}{0.02083 \text{ s}^2 + 1.667 \text{ s} + 1}$$

```
Continuous-time transfer function.
```

```
ans = '9 - Kašnjenje uključenja tereta'
```

```
s =
```

```
s
```

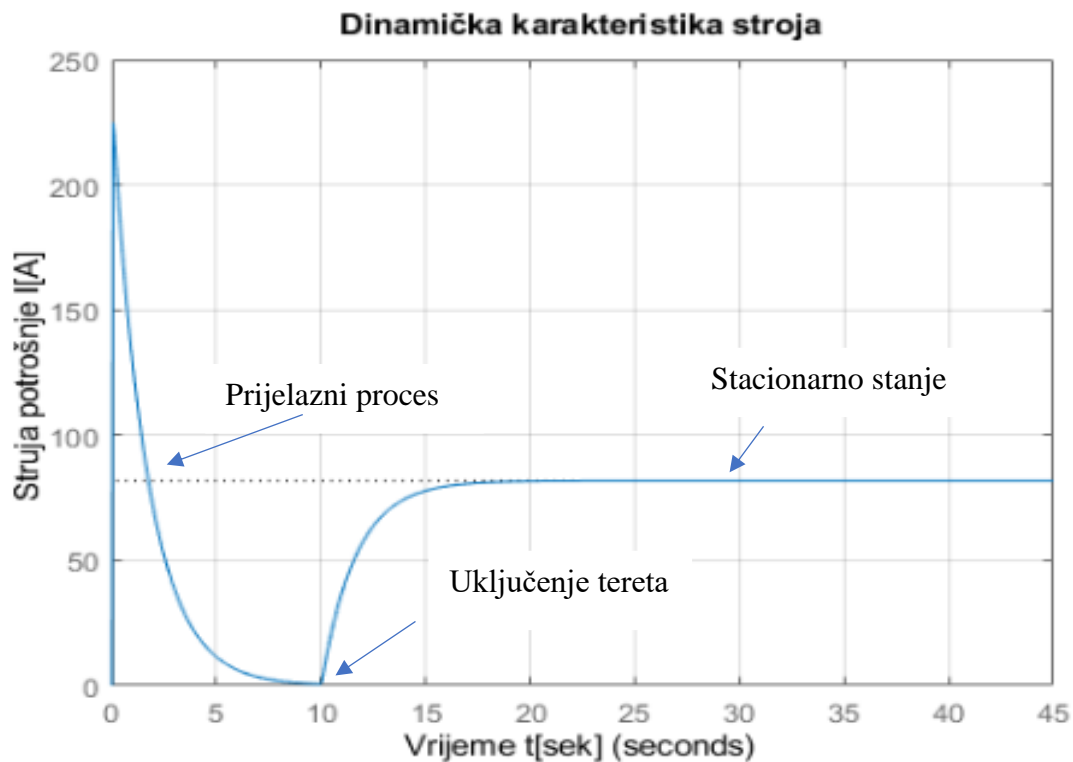
```
Continuous-time transfer function.
```

```
Mt =
```

$$\exp(-10*s) * (98.1)$$

```
Continuous-time transfer function.
```

Na slici 2.43 prikazan je dinamička strujna karakteristika stroja (prijelazna funkcija) u slučaju uključenja tereta.

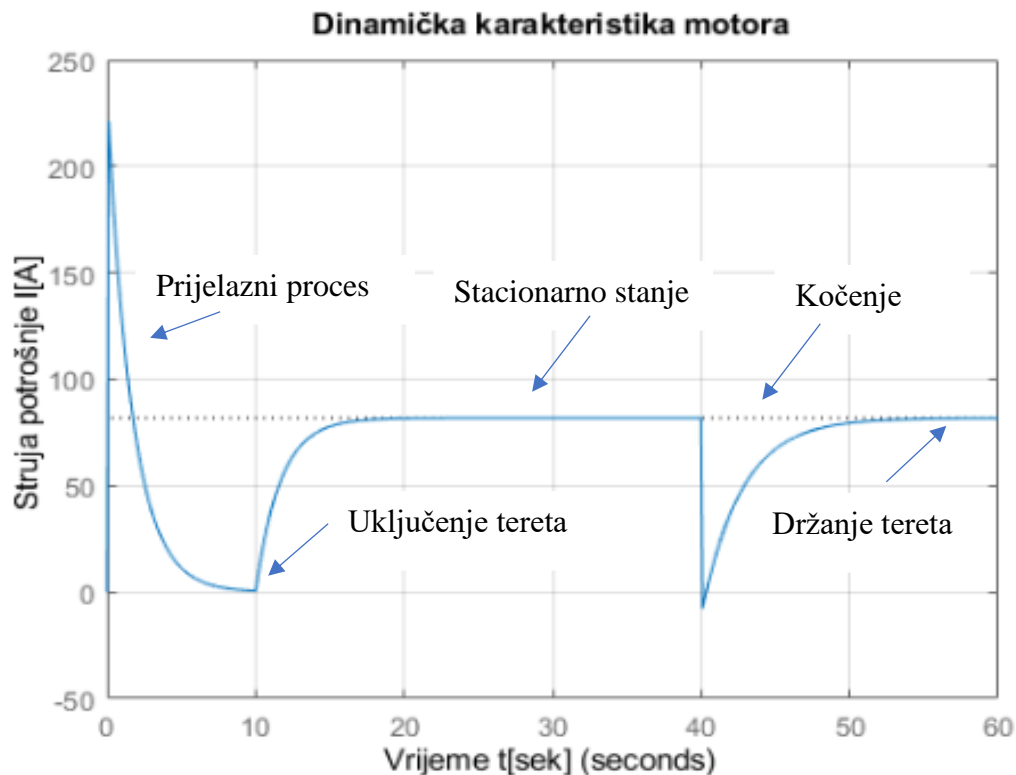


2.43 - Dinamička strujna karakteristika stroja (prijelazna funkcija) u slučaju uključenja tereta

```

ans = '12 - Prijenosna funkcija stroja i tereta'
GmI =
      2.083 s
-----
0.02083 s^2 + 2.708 s + 1
Continuous-time transfer function.
Gt =
      0.006944 s + 0.9028
-----
0.02083 s^2 + 2.708 s + 1
Continuous-time transfer function.
ans = '13 - Napon kočenja [V]'
Uk = -120
ans = '14 - Kašnjenje uključanja kočenja'
Uk =
      exp(-40*s) * (-120)
Continuous-time transfer function.
tpk = 50.7250
    
```

N slici 2.44 dinamička strujna karakteristika stroja (prijelazna funkcija) u slučaju uključanja tereta i kočenja.



Sl. 2.44 - Dinamička strujna karakteristika stroja (prijelazna funkcija) u slučaju uključanja tereta i kočenja.

2.4 Izmjenični asinhroni (indukcijski) stroj

Izmjenični asinhroni (indukcijski) stroja (AC stroj) karakterizira okretno magnetsko polje koje se okreće sinhronom kutnom brzinom ω_s po nomotaju statora, a koja se može izraziti relacijom:

$$\omega_s = 2 \cdot \pi \cdot f$$

Ako je frekvencija izmjenične električne mreže $f = 50\text{Hz}$ i ako sa p označimo broj pari polova, onda je sinhroni broj okretaja okretnog magnetskog polja n_s jednak:

$$n_s = \frac{30}{\pi} \cdot \omega_s = 60 \cdot f = 60 \cdot 50 = 3.000 \text{ okr}/\text{min}$$

odnosno kutna brzina rotora stroja ω iznosi:

$$\omega = (1 - s) \cdot \frac{\omega_s}{p}$$

gdje je:

s – klizanje stroja

Prema tome, relativna razlika između sinhronne brzine okretnog magnetskog polja ω_s i brzine rotora stroja ω naziva se klizanje stroja s .

Prema izvedbi rotora, asinhroni strojevi dijele se na: kavezne, kolutne i masivne, a prema broju faza na: jednofazne, dvofazne i trofazne stroje. U nastavku će se pozornost posvetiti trofaznom asinhronom stroju. Ulazna snaga takvog stroja određena je sljedećom relacijom:

$$P_{ul} = 3 \cdot U_{f-rms} \cdot I_{f-rms} \cdot \cos \varphi$$

gdje je:

U_{f-rms} – efektivni fazni napon [V]

I_{f-rms} – efektivna fazna struja [V]

$\cos \varphi$ – faktor snage

Snaga okretnog polja stroja P_{okr} definirana je sljedećom relacijom:

$$P_{okr} = 3 \cdot |I_r|^2 \cdot \frac{R_r}{s}$$

gdje je:

I_r - kompleksna vrijednost struje rotora [V]

R_r – otpor rotora [Ω]

s – klizanje stroja

Izlazna snaga P_{izl} asinhronog stroja jednaka je:

$$P_{izl} = M \cdot \omega$$

Ukoliko zanemarimo trenje i gubitke uslijed ventilacija (zračnog hlađenja) stroja, tada vrijedi relacija:

$$P_{izl} = M \cdot \omega = (1 - s) \cdot P_{okr}$$

gdje je:

$$M = M_{el} - \text{električni moment asinhronog stroja}$$

Prema tome vrijedi relacija:

$$M_{el} \cdot \omega = (1 - s) \cdot P_{okr} = (1 - s) \cdot 3 \cdot |I_r|^2 \cdot \frac{R_r}{s}$$

Odnosno:

$$M_{el} = 3 \cdot \frac{(1 - s)}{\omega} |I_r|^2 \cdot \frac{R_r}{s} = 3 \frac{p}{\omega_s} \cdot |I_r|^2 \cdot \frac{R_r}{s}$$

Kompleksnu vrijednost struje rotora I_r moguće je odrediti na temelju jednažbe električne ravnoteže statora i rotora asinhronog stroja, kako slijedi:

$$U_s(t) = R_s \cdot I_s(t) + \frac{d\Phi_s(t)}{dt} + \frac{d\Phi_{rs}(t)}{dt}$$

$$0 = R_r \cdot I_r(t) + \frac{d\Phi_r(t)}{dt} + \frac{d\Phi_{sr}(t)}{dt} - \frac{d\Phi_{ems}(t)}{dt}$$

gdje:

U_s – napon statora [V]

R_s – otpor statora [Ω] R_r – otpor rotora [Ω]

I_s – struja statora [A] I_r – struja rotora [A]

Φ_s – magnetski tok statora [Wb] Φ_r – magnetski tok rotora [Wb]

$\Phi_{rs} = \Phi_{sr}$ – međuinuktivitet [Wb]

Φ_{ems} – magnetski tok elektromotorne sile [Wb]

Magnetski tok statora $\Phi_s(t)$ određen je relacijom:

$$\Phi_s(t) = L_s \cdot I_s(t)$$

gdje je:

L_s – induktivitet zavojnice statora [H]

Lapasova transformacija glasi:

$$L \left\{ \frac{d\Phi_s}{dt} \right\} = L \{ L_s \cdot s \cdot I_s(s) \}$$

gdje je: $s = j\omega$ Lapalsov operator.

Na temelju prije navedenog slijedi za slučaj statora stroja sljedeća jednačba:

$$\begin{aligned} U_s(j\omega) &= R_s \cdot I_s(j\omega) + j\omega \cdot [\Phi_s(j\omega) + \Phi_{rs}(j\omega)] \\ &= R_s \cdot I_s(j\omega) + j\omega \cdot [L_s \cdot I_s(j\omega) + L_{MI} \cdot I_r(j\omega)] \end{aligned}$$

gdje je:

$$L_{MI} - \text{međuinuktivitet [H]}$$

Kako je induktivna reaktanca X (Imaginarni otpor) jednaka (npr. za stator):

$$X_s = L_s \cdot \omega_s$$

Tada vrijedi jednačba elektromagnetne ravnoteže statora:

$$U_s = (R_s + jX_s) \cdot I_s + jX_{MI} \cdot I_r$$

Analogno za slučaj rotora vrijedi:

$$\begin{aligned} 0 &= R_r \cdot I_r(j\omega) + j\omega \cdot [\Phi_r(j\omega) + \Phi_{sr}(j\omega)] - [j\omega_{ems} \cdot \Phi_{ems}(j\omega_n)] \\ &= R_r \cdot I_r(j\omega) + j\omega \cdot [L_r \cdot I_r(j\omega) + L_{MI} \cdot I_s(j\omega)] - j\omega_{ems} \\ &\quad \cdot [L_r \cdot I_r(j\omega) + L_{MI} \cdot I_s(j\omega)] \end{aligned}$$

Kako je ω_{ems} zapravo nazivna kutna brzina stroja ω_n , to vrijedi da je:

$$\omega_n = (1 - s_n) \cdot \frac{\omega_s}{p}$$

gdje je:

$$s_n - \text{nazivno klizanje stroja}$$

U tom slučaju vrijedi da je koeficijent iskoristivosti stroja jednak:

$$\eta = 1 - s_n$$

Ako općenito označimo da je sinhrona kutna brzina stroja ω tada vrijedi da je:

$$j(\omega - \omega_n) = j\omega \cdot s$$

Pri čemu će se kasnije uzeti u obzir kako je:

$$s = s_n$$

Daljnijim sređivanjem dobija se:

$$0 = R_r \cdot I_r(j\omega) + j(\omega - \omega_n) \cdot [L_r \cdot I_r(j\omega) + L_{MI} \cdot I_s(j\omega)]$$

Odnosno:

$$0 = j\omega \cdot s \cdot L_{MI} \cdot I_s(j\omega) + [R_r + j\omega \cdot s \cdot L_r] \cdot I_r(j\omega)$$

Prema tome vrijedi sljedeća jednadžba elektromagnetne ravnoteže

$$0 = jX_{MI} \cdot I_s + \left(\frac{R_r}{s} + jX_r\right) \cdot I_r$$

Sustav jednadžbi glasi:

$$U_s = (R_s + jX_s) \cdot I_s + jX_{MI} \cdot I_r$$

$$0 = jX_{MI} \cdot I_s + \left(\frac{R_r}{s} + jX_r\right) \cdot I_r$$

Odnosno matrični zapis:

$$\begin{bmatrix} U_s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + jX_s & jX_{MI} \\ jX_{MI} & \frac{R_r}{s} + jX_r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_s \\ I_r \end{bmatrix}$$

Radi lakšeg proračuna vrijednost otpora R_s može se zanemariti ($R_s \cong 0$), stoga determinante Δ_2 i Δ za izračun kompleksne vrijednosti struje rotora I_r glase:

$$I_r = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 0 + jX_s & U_s \\ jX_{MI} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} jX_s & jX_{MI} \\ jX_{MI} & \frac{R_r}{s} + jX_r \end{vmatrix}}$$

Slijedom navedenog vrijedi:

$$I_r = \frac{jX_s \cdot 0 - jX_{MI} \cdot U_s}{jX_s \cdot \left(\frac{R_r}{s} + jX_r\right) - jX_{MI} \cdot jX_{MI}} = \frac{-jX_{MI} \cdot U_s}{jX_s \cdot \frac{R_r}{s} + jX_s \cdot jX_r + X_{MI}^2}$$

Odnosno:

$$I_r = \frac{-jX_{MI} \cdot U_s}{jX_s \cdot \frac{R_r}{s} - X_s \cdot X_r + X_{MI}^2}$$

Važan parametar rada asinhronog stroja je koeficijent disipacije magnetskog toka σ koji se definira na sljedeći način:

$$\sigma = 1 - \frac{X_{MI}^2}{X_s \cdot X_r} = 1 - \frac{L_{MI}^2}{L_s \cdot L_r}$$

Slijedom navedenom možemo zamjeniti vrijednost među indukcije X_{MI} na sljedeći način:

$$X_s \cdot X_r - X_{MI}^2 = \sigma \cdot X_s \cdot X_r$$

$$X_{MI}^2 = (1 - \sigma) \cdot X_s \cdot X_r$$

U prvom koraku uvodi se sljedeća supstitucija:

$$I_r = \frac{-jX_{MI} \cdot U_s}{jX_s \cdot \frac{R_r}{s} - X_s \cdot X_r + X_{MI}^2} = \frac{-jX_{MI} \cdot U_s}{jX_s \cdot \frac{R_r}{s} - \sigma \cdot X_s \cdot X_r} = \frac{-jX_{MI} \cdot U_s \cdot s}{jX_s \cdot R_r - \sigma \cdot X_s \cdot X_r \cdot s}$$

Određujemo kvadrat apsolutne vrijednosti struje I_r kako slijedi:

$$|I_r|^2 = \left| \frac{(-X_{MI} \cdot U_s \cdot s)^2}{(X_s \cdot R_r)^2 + (-\sigma \cdot X_s \cdot X_r \cdot s)^2} \right| = \frac{X_{MI}^2 \cdot U_s^2 \cdot s^2}{X_s^2 R_r^2 + \sigma^2 \cdot X_s^2 \cdot X_r^2 \cdot s^2}$$

U drugom koraku uvodi se sljedeća supstitucija:

$$|I_r|^2 = \frac{X_{MI}^2 \cdot U_s^2 \cdot s^2}{X_s^2 R_r^2 + \sigma^2 \cdot X_s^2 \cdot X_r^2 \cdot s^2} = \frac{(1 - \sigma) \cdot X_s \cdot X_r \cdot U_s^2 \cdot s^2}{X_s^2 R_r^2 + \sigma^2 \cdot X_s^2 \cdot X_r^2 \cdot s^2}$$

Dobivenu jednadžbu potrebo je podijeliti sa $X_s \cdot X_r \cdot s^2$ i tada vrijedi:

$$|I_r|^2 = \frac{(1 - \sigma) \cdot U_s^2}{\frac{X_s^2 R_r^2}{X_s \cdot X_r \cdot s^2} + \frac{\sigma^2 \cdot X_s^2 \cdot X_r^2 \cdot s^2}{X_s \cdot X_r \cdot s^2}}$$

Odnosno sređivanjem jednadžbe dobija se:

$$|I_r|^2 = \frac{s}{R_r} \cdot \frac{1 - \sigma}{\sigma \cdot X_s} \cdot \frac{U_s^2}{\frac{s}{\frac{R_r}{X_r \cdot \sigma}} + \frac{X_r \cdot \sigma}{s}}$$

Neka je:

$$s_p = \frac{R_r}{X_r \cdot \sigma}$$

Tada se može pisati:

$$|I_r|^2 \cdot \frac{R_r}{s} = \frac{1 - \sigma}{\sigma \cdot X_s} \cdot \frac{U_s^2}{\frac{s}{s_p} + \frac{s_p}{s}}$$

Kako je prethodno izračunato:

$$M_{el} = 3 \frac{p}{\omega_s} \cdot |I_r|^2 \cdot \frac{R_r}{s}$$

To se sada može pisati:

$$M_{el} = 3 \frac{p}{\omega_s} \cdot \frac{1 - \sigma}{\sigma \cdot X_s} \cdot \frac{U_s^2}{\frac{s}{s_p} + \frac{s_p}{s}}$$

Odnosno može se pisati:

$$M_{el} = M_p \cdot \frac{2}{\frac{s}{s_p} + \frac{s_p}{s}}$$

gdje je:

$$M_p = \frac{3}{2} \cdot \frac{p}{\omega_s} \cdot \frac{1-\sigma}{\sigma \cdot X_s} \cdot U_s^2 - \text{maksimalni ili prekretni moment stroja [Nm]}$$

s_p - prekretno klizanje motora

Prekretni moment M_p možemo izraziti i na sljedeći način:

$$M_p = \frac{3}{2} \cdot \frac{p}{\omega_s} \cdot \frac{1-\sigma}{\sigma \cdot X_s} \cdot U_s^2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{p}{2 \cdot \pi \cdot f} \cdot \frac{1-\sigma}{\sigma \cdot L_s \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \cdot U_s^2 = \frac{3}{8 \cdot \pi^2} \cdot \frac{p \cdot (1-\sigma)}{\sigma \cdot L_s} \cdot \left(\frac{U_s}{f}\right)^2$$

Odnosno vrijedi:

$$M_p = \frac{3}{8 \cdot \pi^2} \cdot \frac{p \cdot (1-\sigma)}{\sigma \cdot L_s} \cdot \left(\frac{U_s}{f}\right)^2 = k_{pr} \cdot \left(\frac{U_s}{f}\right)^2$$

gdje je:

k_{pr} – koeficijent (konstanta) prekretnog momenta

p - broj pari polova statora

σ – koeficijent disipacije

L_s – induktivitet statora stroja [H]

$U_s = U_{f-rms}$ – efektivni fazni napon statora [V]

f - frekvencija električne mreže (obično 50Hz)

Dobivena relacija za električni momet:

$$M_{el} = M_p \cdot \frac{2}{\frac{s}{s_p} + \frac{s_p}{s}}$$

naziva se još *Klossova formula* za trofazni asinhorni (indukcijski) stroj.

Osim električnog momenta potrebno je još izračunati struju potrošnje statora I_s kao i ostale parametre stroja kao što su zatezni (pokretni) moment M_z , zatim nazivni moment M_n , faktor snage $\cos \varphi$ i koeficijent iskoristivosti stroja η .

Kompleksan vrijednost struje statora I_s računa se jedanko tako uz pomoć matričnog zapisa jednadžbi i determinata Δ_1 i Δ , kako slijedi:

$$\begin{bmatrix} U_s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + jX_s & jX_{MI} \\ jX_{MI} & \frac{R_r}{s} + jX_r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_s \\ I_r \end{bmatrix}$$

Vrijedi:

$$I_s = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} U_s & jX_{MI} \\ 0 & \frac{R_r}{s} + jX_r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} jX_s & jX_{MI} \\ jX_{MI} & \frac{R_r}{s} + jX_r \end{vmatrix}}$$

Slijedom navedenog vrijedi za struju statora I_s :

$$I_s = \frac{U_s \cdot \left(\frac{R_r}{s} + jX_r\right) - 0 \cdot jX_{MI}}{jX_s \cdot \left(\frac{R_r}{s} + jX_r\right) - jX_{MI} \cdot jX_{MI}} = \frac{U_s \cdot \left(\frac{R_r}{s} + jX_r\right)}{jX_s \cdot \frac{R_r}{s} - X_s \cdot X_r + X_{MI}^2}$$

Uvrsti li se supstitucija:

$$X_s \cdot X_r - X_{MI}^2 = \sigma \cdot X_s \cdot X_r$$

Tada slijedi:

$$I_s = \frac{U_s \cdot \left(\frac{R_r}{s} + jX_r\right)}{jX_s \cdot \frac{R_r}{s} - X_s \cdot X_r + X_{MI}^2} = \frac{U_s \cdot \left(\frac{R_r}{s} + jX_r\right)}{jX_s \cdot \frac{R_r}{s} - \sigma \cdot X_s \cdot X_r}$$

Sređivanjem izraza dobija se:

$$I_s = \frac{U_s \cdot \left(\frac{R_r}{s} + jX_r\right)}{jX_s \cdot \frac{R_r}{s} - \sigma \cdot X_s \cdot X_r} = \frac{U_s}{X_s} \cdot \frac{\frac{R_r}{s} + jX_r}{j\frac{R_r}{s} - \sigma \cdot X_r} = \frac{U_s}{X_s} \cdot \frac{\frac{R_r}{s \cdot X_r} + j}{j\frac{R_r}{s \cdot X_r} - \sigma}$$

Uvedeli se supstitucija:

$$v = \frac{R_r}{s \cdot X_r}$$

Tada se može pisati kako je kompleksna vrijednost struje statora I_s jednaka:

$$I_s = \frac{U_s}{X_s} \cdot \frac{\frac{R_r}{s \cdot X_r} + j}{j\frac{R_r}{s \cdot X_r} - \sigma} = \frac{U_s}{X_s} \cdot \frac{v + j}{j \cdot v - \sigma}$$

Pomnožili se sa konjugirano kompleksnim parom, tada slijedi:

$$I_s = \frac{U_s}{X_s} \cdot \frac{v + j}{j \cdot v - \sigma} \cdot \frac{-j}{-j} = \frac{U_s}{X_s} \cdot \frac{-j \cdot v + 1}{v + j \cdot \sigma}$$

Kako je prije navedeno:

$$s_p = \frac{R_r}{X_r \cdot \sigma}$$

Odnosno za $s = s_n$ vrijedi:

$$v = \frac{R_r}{s_n \cdot X_r} = \frac{s_p}{s_n} \sigma$$

Odnosno:

$$\sigma = \frac{s_n}{s_p} v$$

Sada vrijedi da je:

$$I_s = \frac{U_s}{X_s} \cdot \frac{1 - j \cdot v}{v + j \cdot \sigma} = \frac{U_s}{X_s} \cdot \frac{1 - j \cdot v}{v + j \cdot \frac{s_n}{s_p} v} = \frac{U_s}{X_s} \cdot \frac{1}{v} \cdot \frac{1 - j \cdot v}{1 + j \cdot \frac{s_n}{s_p}}$$

Kako je vrijednost struja I_s kompleksna, potrebo je odrediti apsolutnu vrijednost koja iznosi:

$$|I_s| = \frac{U_s}{X_s} \cdot \frac{1}{v} \cdot \sqrt{\frac{1^2 + (-v)^2}{1 + \left(\frac{s_n}{s_p}\right)^2}} = \frac{U_s}{X_s} \cdot \frac{1}{v} \cdot \sqrt{\frac{1^2 + v^2}{1 + \left(\frac{s_n}{s_p}\right)^2}}$$

Jasno se može uočiti da za:

$$v = \frac{s_n}{s_p}$$

Vrijednost struje iznosi:

$$I_s = \frac{U_s}{X_s} \cdot \frac{1}{v}$$

Slijedom prije navedenoga može se pisati:

$$\sigma = \frac{s_n}{s_p} v = v \cdot v$$

Prema tome slijedi da je $v = \sqrt{\sigma}$ i konačna relacija za struju potrošnje I_s :

$$I_s = \frac{U_s}{X_s} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma}} = \frac{I_o}{\sqrt{\sigma}}$$

Odnosno vrijedi:

$$\sigma = \frac{s_n}{s_p} v = \frac{s_n}{s_p} \sqrt{\sigma}$$

Može se napisati konačna relacija za nazivno klizanje stroja s_n :

$$s_n = \sqrt{\sigma} \cdot s_p$$

Slijedom prije navedenoga može se odrediti nazivni moment stroja M_n :

$$M_n = M_p \cdot \frac{2}{\frac{s_n}{s_p} + \frac{s_p}{s_n}} = M_p \cdot \frac{2}{\sqrt{\sigma} + \frac{1}{\sqrt{\sigma}}} = M_p \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{\sigma}}{1 + \sigma}$$

Jednako tako moguće je izračunati zatezni (pokretni) moment stroja M_z . To je moment stroja kada je brzina $\omega_n = 0$ i klizanje stroja $s = 1$. Stoga vrijedi:

$$M_z = M_p \cdot \frac{2}{\frac{1}{s_p} + s_p}$$

Faktor snage stroja $\cos \varphi_n$ može se sada izračunati na sljedeći način putem koeficijenta iskoristivosti stroja η . Naime, vrijedi:

$$\eta = \frac{P_{izl}}{P_{ul}} = \frac{M_n \cdot \omega_n}{3 \cdot U_s \cdot I_s \cdot \cos \varphi_n} = \frac{M_p \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{\sigma}}{1 + \sqrt{\sigma}} \cdot (1 - s_n) \cdot \frac{\omega_s}{p}}{3 \cdot U_s \cdot \frac{U_s}{X_s} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \cdot \cos \varphi_n} = 1 - s_n$$

Uvrsti li se vrijednost za M_p tada slijedi:

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{p}{\omega_s} \cdot \frac{1 - \sigma}{\sigma \cdot X_s} \cdot U_s^2 \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{\sigma}}{1 + \sqrt{\sigma}} \cdot (1 - s_n) \cdot \frac{\omega_s}{p} = 1 - s_n$$

Odnosno:

$$\cos \varphi_n = \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{p}{\omega_s} \cdot \frac{1 - \sigma}{\sigma \cdot X_s} \cdot U_s^2 \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{\sigma}}{1 + \sigma} \cdot (1 - s_n) \cdot \frac{\omega_s}{p}}{3 \cdot U_s \cdot \frac{U_s}{X_s} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \cdot (1 - s_n)}$$

Sređivanjem dobivamo:

$$\cos \varphi_n = \frac{\frac{1 - \sigma}{\sigma} \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{\sigma}}{1 + \sigma}}{\frac{1}{\sqrt{\sigma}}} = \frac{1 - \sigma}{1 + \sigma}$$

Svi parametri koji određuju rad asinhronog (indukcijskog) stroja su određeni. U nastavku će se provesti proračun prije navedenih parametra.

Primjer br. 13

Potrebo je odrediti statičku karakteristiku i parametre rada asinhronog (indukcijskog) stroja ako su zadane sljedeće vrijednosti ulazni parametara: napon stroja $U_s = 380V$, frekvencija mreže $f = 50Hz$, otpor statora $R_s = 0,36\Omega$, otpor rotora $R_r = 0,39\Omega$, imaginaran otpor statora $X_s = 39,95\Omega$, imaginarni otpor rotora $X_r = 40,16\Omega$ i imaginarni otpor međunidukcije $X_{MI} = 39\Omega$. Stroj je četveropolni (dva para polova).

Rješenje (programska rutina u MatLab-u) je sljedeće:

```
'Asinhroni motor'
'Zadano'
Us1=380
Rs=0.36
Rr=0.39
p=2
f=50
Xr=40.16
Xh=39
Xs=39.95

'Vrijednost induktiviteta'
Ls=Xs/(2*pi*f)
Lr=Xr/(2*pi*f)
Lh=Xh/(2*pi*f)
'Vrijednost efektivnog faznog napona'
Us=Us1/sqrt(3)

'Rješenje'
'1. Određujemo koeficijent rasipanja sigma'
sigma=1-Lh^2/(Ls*Lr)

'2. Određujemo prekretno klizanje'
sp=Rr/(Xr*sigma)

'3. Određujemo prekretni moment Mp'
kpr=3*p*(1-sigma)/(8*pi^2*sigma*Ls)
Mp=kpr*(Us/f)^2

'4. Određujemo zatezni (potezni) moment Mz'
Mz=Mp*2/(1/sp+sp)

'5. Određujemo sinhroni broj okretaja ns'
omegas=2*pi*f
ns=omegas*30/pi
```

'6. Određujemo brzinu okretaja prekretnog momenta M_p '
$$n_p = n_s / p * (1 - s_p)$$

'7. Određujemo nazivno klizanje s_n '
$$s_n = s_p * \sigma^{0.5}$$

'8. Određujemo nazivni moment M_n '
$$M_n = M_p * (2 * \sigma^{0.5}) / (1 + \sigma)$$

'9. Određujemo nazivni broj okretaja n_n '
$$n_n = n_s / p * (1 - s_n)$$

'10. Određujemo zatezni moment M_z '
$$M_z = M_p * 2 / (1 / s_p + s_p)$$

'11. Određujemo struju potrošnje I_n '
$$I_n = (U_s / X_s) / \sigma^{0.5}$$

'12. Određujemo maksimalnu struju I_{max} '
$$I_{max} = U_s / R_s$$

'13. Određujemo struju I_0 '
$$I_0 = U_s / X_s$$

'14. Određujemo $\cos(\phi_i)$ '
$$\cos \phi_i = (1 - \sigma) / (1 + \sigma)$$

'15. Ulazna snaga'
$$P_{ul} = 3 * U_s * I_n * \cos \phi_i$$

'16. Izlazna snaga'
$$\omega_{mn} = n_n * \pi / 30$$
$$P_n = M_n * \omega_{mn}$$

'17. Koeficijent iskoristivosti η '
$$\eta_{sk} = P_n / P_{ul}$$
$$\eta_{sk} = 1 - s_n$$

'Crtanje statičke karakteristike'
syms x
$$h = \text{matlabFunction}(2 * M_p / ((1 - x * p / n_s) / s_p + s_p / (1 - x * p / n_s)));$$
$$\text{fplot}(h, [0 \ n_s / p])$$

```
grid
title('Statička karakteristika M=M(n)')
xlabel('Brina okretajan n[okr/min]')
ylabel('Moment stroja M[Nm]')
hold on
plot(nn,Mn, '*')
plot(0,Mz, '*')
plot(np,Mp, '*')
plot(nn,0, '+')
```

Parametri

```
ans = 'Asinhroni motor'
ans = 'Zadano'
Us1 = 380
Rs = 0.3600
Rr = 0.3900
p = 2

f = 50
Xr = 40.1600
Xh = 39
Xs = 39.9500
ans = 'Vrijednost induktiviteta'
Ls = 0.1272
Lr = 0.1278
Lh = 0.1241

ans = 'Vrijednost efektivnog faznog napona'
Us = 219.3931

ans = 'Rješenje'
ans = '1. Određujemo koeficijent rasipanja sigma'
sigma = 0.0520
ans = '2. Određujemo prekretno klizanje'
sp = 0.1868

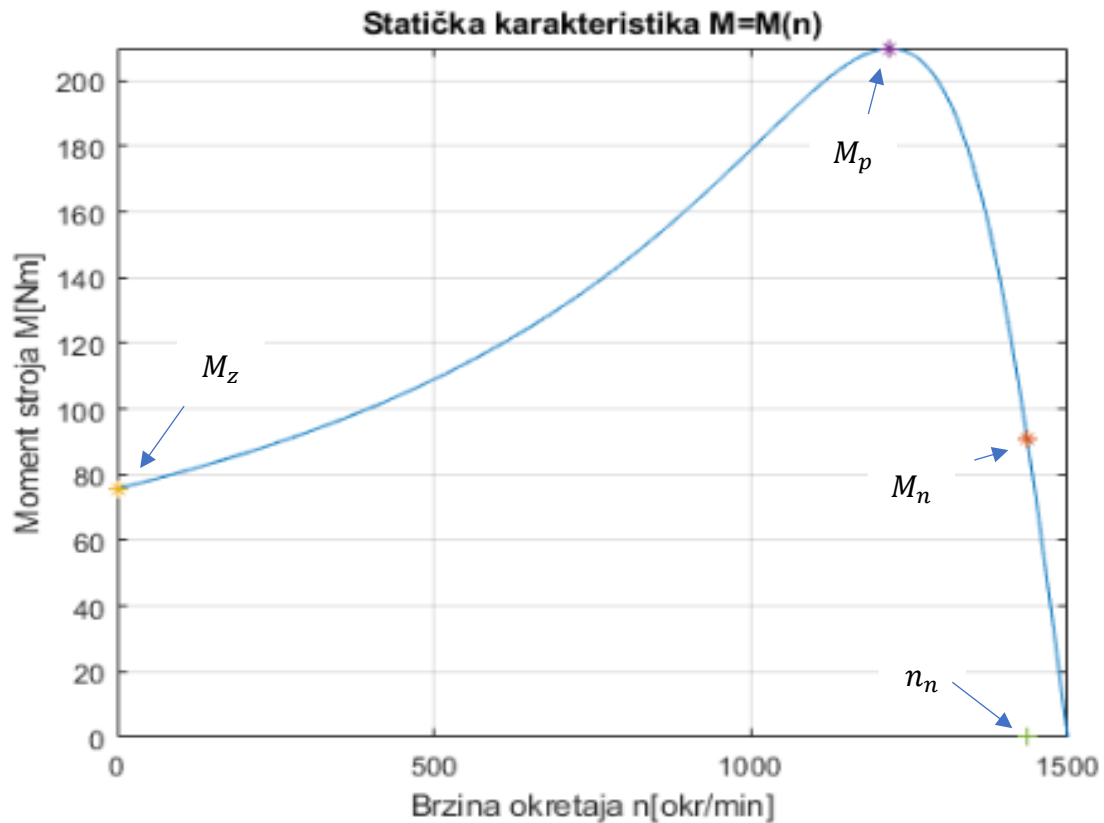
ans = '3. Određujemo prekretni moment Mp'
kpr = 10.8993
Mp = 209.8483

ans = '4. Određujemo zatezni (potezni) moment Mz'
Mz = 75.7689

ans = '5. Određujemo sinhroni broj okretaja ns'
omegas = 314.1593
ns = 3000
```

```
ans = '6. Određujemo brzinu okretaja prekretnog momenta Mp '  
np = 1.2197e+03  
ans = '7. Određujemo nazivno klizanje sn'  
sn = 0.0426  
ans = '8. Određujemo nazivni moment Mn'  
Mn = 90.9570  
ans = '9. Određujemo nazivni broj okretaja nn'  
nn = 1.4361e+03  
ans = '10. Određujemo zatezni moment Mz'  
Mz = 75.7689  
ans = '11. Određujemo struju potrošnje In'  
In = 24.0879  
ans = '12. Određujemo maksimalnu struju Imax'  
Imax = 609.4253  
ans = '13. Određujemo struju I0'  
I0 = 5.4917  
ans = '14. Određujemo cos(fi)'  
cosfi = 0.9012  
ans = '15. Ulazna snaga'  
Pu1 = 1.4287e+04  
ans = '16. Izlazna snaga'  
omn = 150.3887  
Pn = 1.3679e+04  
ans = '17. Koeficijent iskoristivosti isk'  
isk = 0.9574  
isk = 0.9574
```

Na slici 2.45 prikazana je statička karakteristika asinhronog stroja



Sl. 2.45 – Statička karakteristika asinhronog stroja

Statička karakteristika asinhronom stroja može se normirati na sljedeći način:

$$M_{el} = M_p \cdot \frac{2}{\frac{s}{s_p} + \frac{s_p}{s}} \quad \rightarrow \quad \frac{M_{el}}{M_p} = \frac{2}{\frac{1-\eta}{s_p} + \frac{s_p}{1-\eta}}$$

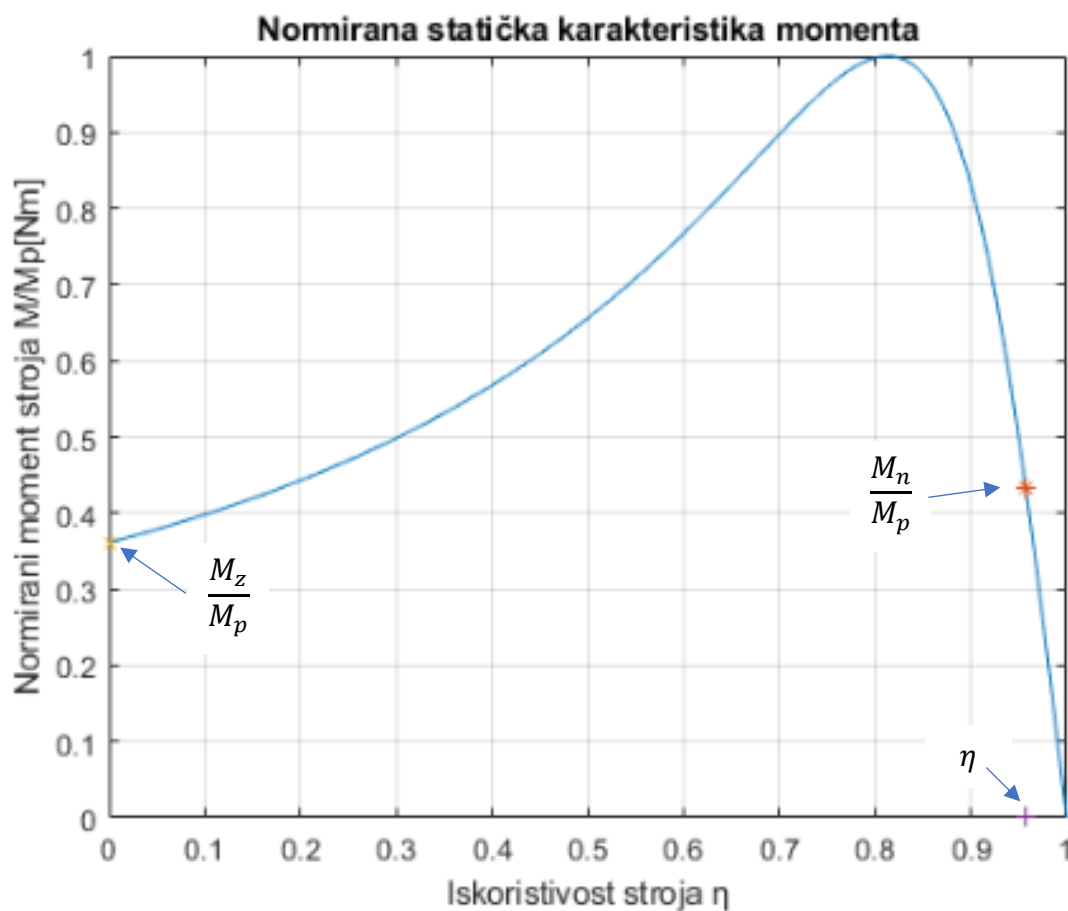
gdje je:

$$0 \leq \eta \leq 1 \text{ – koefijent iskoristivosti stroja}$$

Rješenje (programska rutina u MatLab-u) je sljedeće:

```
'Normirana statička karakteristika'
hold off
syms x
h = matlabFunction(2/((1-x)/sp+sp/(1-x)));
fplot(h,[0 1])
grid
hold on
plot(1-sn,Mn/Mp,'*')
plot(0,Mz/Mp,'X')
plot(1-sn,0,'+')
title('Normirana statička karakteristika momenta')
xlabel('Iskoristivost stroja η')
ylabel('Normirani moment stroja M/Mp[Nm]')
```

Na slici 2.46 prikazana je normirana statička karakteristika asinhronog stroja.



Sl. 2.46 – Normirana statička karakteristika asinhronog stroja

Normirana statička karakteristika stroja pokazuje kako se stroj neće moći pokrenuti jer je zakretni moment manji od nazivnog momenta, tj. vrijedi da je:

$$M_z < M_n$$

U tom slučaju nužno je smanjiti napon i frekvenciju pokretanja stroja, a zatim je povećati. Proračun novog napona i frekvencije bio bi sljedeći. Pod uvjetom da je $M_n = M_z$ vrijedi jednadžba:

$$\frac{M_n}{M_p} = \frac{2}{\frac{s}{s_p} + \frac{s_p}{s}}$$

Uvode se sljedeće supstitucije:

$$\frac{M_n}{M_p} = \frac{1}{k_n}$$

$$y = \frac{s}{s_p}$$

Na temelju istih slijedi:

$$\frac{2}{y + \frac{1}{y}} = \frac{1}{k_n}$$

Sada vrijedi:

$$2 \cdot k_n = \frac{y^2 + 1}{y}$$

Odnosno kvadratna jednažbe:

$$y^2 - 2 \cdot k_n \cdot y + 1 = 0$$

Rješenja kvadratne jednažbe jesu:

$$y_{1,2} = -k_n \pm \sqrt{k_n^2 - 1}$$

Slijedi da je:

$$s_1 = y_1 \cdot s_p$$

$$s_2 = y_2 \cdot s_p = s_n$$

Uzima se u obzir prvo rješenje s_1 , dok drugo služi za provjeru rezultata jer isto mora biti jednako nazivnom klizanju. Slijedi izračun nove frekvencije:

$$f_1 = s_1 \cdot f$$

Broj okretaje stroja bit će sada:

$$\omega_{n_1} = (1 - s_n) \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot f_1}{p}$$

Novi napon iznosi:

$$U_{s_1} = s_1 \cdot U_s$$

Primjer br. 14

Zadan su parametri asinhronog stroja kao u primjeru br. 13. Potrebno je odrediti napon U_{s_1} i frekvenciju f_1 za koje vrijedi jednakost $M_n = M_z$.

Rješenje (programska rutina u MatLab-u) je sljedeće:

```
'Asinhroni stroj Mn=Mz'
'Zadano'
Us1=380
Rs=0.36
Rr=0.39
p=2
f=50
Xr=40.16
Xh=39
```

$X_s=39.95$

'Vrijednost induktiviteta'

$L_s=X_s/(2\pi f)$

$L_r=X_r/(2\pi f)$

$L_h=X_h/(2\pi f)$

'Vrijednost efektivnog faznog napona'

$U_s=U_{s1}/\sqrt{3}$

'Rješenje'

'Rutina crtanje statičke karakteristike'

av00

hold on

'1. - Izračun nove frekvencije i napona'

$k_n=M_p/M_n$;

$y_1=k_n+\sqrt{k_n^2-1}$;

$y_2=k_n-\sqrt{k_n^2-1}$;

$s_1=m_1\cdot s_p$;

$s_2=m_2\cdot s_p$;

$f=f\cdot s_1$ %Nova frekvencija [Hz]

$U_s=U_s\cdot s_1$ %Novi napon [V]

'Rutina crtanje statičke karakteristike'

av00

grid on

Podrutina

'Podrutina av00'

'Rješenje';

'1. Određujemo koeficijent rasipanja sigma';

$\sigma=1-L_h^2/(L_s\cdot L_r)$;

'2. Određujemo prekretno klizanje';

$s_p=R_r/(2\pi f\cdot L_r\cdot \sigma)$;

'3. Određujemo prekretni moment M_p '

$k_p=3\cdot p\cdot (1-\sigma)/(8\pi^2\cdot \sigma\cdot L_s)$;

$M_p=k_p\cdot (U_s/f)^2$

'4. Određujemo zatezni (potezni) moment M_z '

$M_z=M_p\cdot 2/(1/s_p+s_p)$

'5. Određujemo sinhroni broj okretaja n_s ';

```

omegas=2*pi*f;
ns=omegas*30/pi;
'6. Određujemo brzinu okretaja prekretnog momenta Mp ';
np=ns/p*(1-sp);

'7. Određujemo nazivno klizanje sn';
sn=sp*sigma^0.5;

'8. Određujemo nazivni moment Mn'
Mn=Mp*(2*sigma^0.5)/(1+sigma)

'9. Određujemo nazivni broj okretaja nn'
nn=ns/p*(1-sn)

'10. Određujemo struju potrošnje In'
In=(Us/(2*pi*Ls*f))/sigma^0.5

'11. Određujemo maksimalnu struju Imax';
Imax=Us/Rs;

'12. Određujemo struju I0';
I0=Us/(2*pi*Ls*f);

'13. Određujemo cos(fi)';
cosfi=(1-sigma)/(1+sigma);

'14. Ulazna snaga';
Pul=3*Us*In*cosfi;

'15. Izlazna snaga Pn'
omn=nn*pi/30;
Pn=Mn*omn

'16. Koeficijent iskoristivosti isk'
isk=Pn/Pul
isk=1-sn

'Crtanje statičke karakteristike';
syms x
h =matlabFunction(2*Mp/((1-x*p/ns)/sp+sp/(1-x*p/ns)));
fplot(h,[0 ns/p])
grid
title('Statička karakteristika M=M(n)')
xlabel('Brina okretajan n[okr/min]')
ylabel('Moment stroja M[Nm]')
hold on
plot(nn,Mn, '*')
plot(nn,0, '+')
plot(0,Mz, '*')
hold off

```

Parametri

ans = 'Asinhroni stroj Mn=Mz'

ans = 'Zadano'

Us1 = 380

Rs = 0.3600

Rr = 0.3900

p = 2

f = 50

Xr = 40.1600

Xh = 39

Xs = 39.9500

ans = 'Vrijednost induktiviteta'

Ls = 0.1272

Lr = 0.1278

Lh = 0.1241

ans = 'Vrijednost efektivnog faznog napona'

Us = 219.3931

ans = 'Rješenje'

ans = 'Rutina crtanje statičke karakteristike'

ans = 'Podrutina av00'

ans = '3. Određujemo prekretni moment Mp'

Mp = 209.8483

ans = '4. Određujemo zatezni (potezni) moment Mz'

Mz = 75.7689

ans = '8. Određujemo nazivni moment Mn'

Mn = 90.9570

ans = '9. Određujemo nazivni broj okretaja nn'

nn = 1.4361e+03

ans = '10. Određujemo struju potrošnje In'

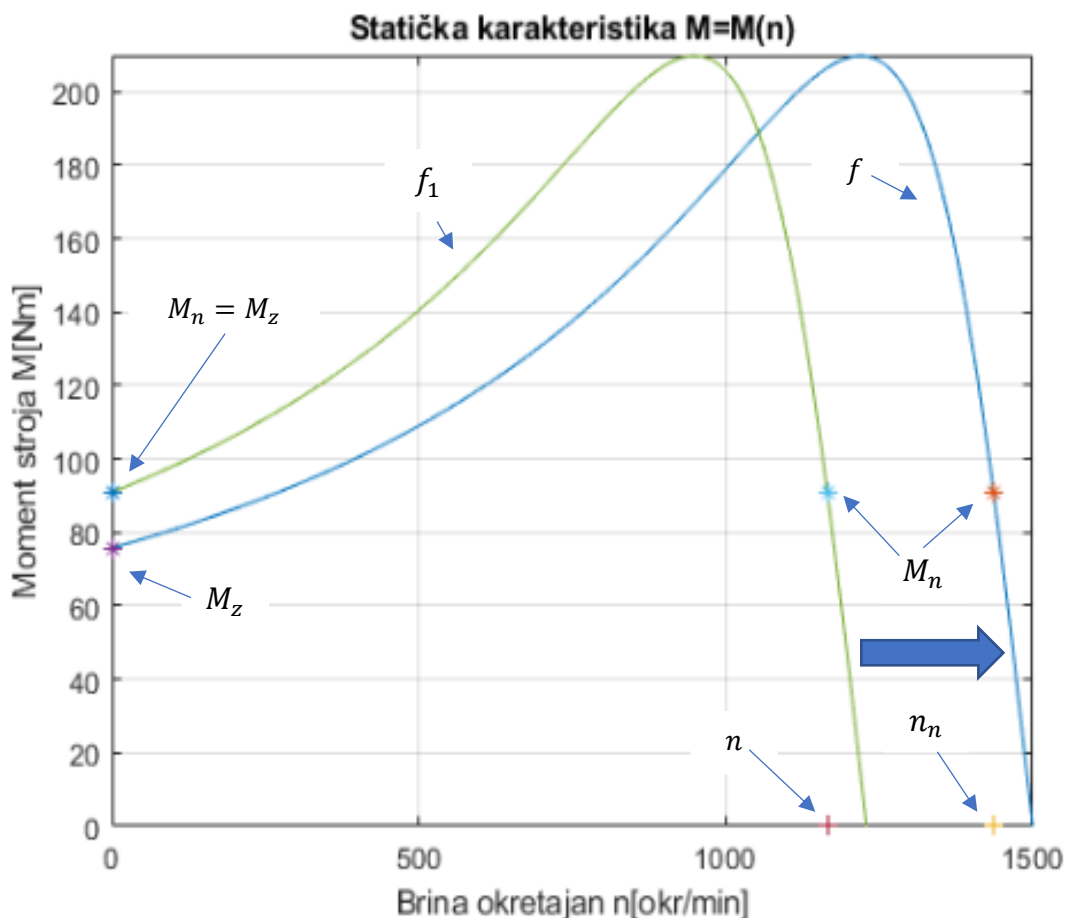
In = 24.0879

ans = '15. Izlazna snaga Pn'

Pn = 1.3679e+04

```
ans = '16. Koeficijent iskoristivosti isk'  
isk = 0.9574  
isk = 0.9574  
ans = '1. - Izračun nove frekvencije i napona'  
f = 40.9751  
Us = 179.7931  
ans = 'Rutina crtanje statičke karakteristike'  
ans = 'Podrutina av00'  
ans = '3. Određujemo prekretni moment Mp'  
Mp = 209.8483  
ans = '4. Određujemo zatezni (potezni) moment Mz'  
Mz = 90.9570  
ans = '8. Određujemo nazivni moment Mn'  
Mn = 90.9570  
ans = '9. Određujemo nazivni broj okretaja nn'  
nn = 1.1654e+03  
ans = '10. Određujemo struju potrošnje In'  
In = 24.0879  
ans = '15. Izlazna snaga Pn'  
Pn = 1.1100e+04  
ans = '16. Koeficijent iskoristivosti isk'  
isk = 0.9480  
isk = 0.9480
```

Na slici 2.47 prikazani su usporedni podaci i frekvencija pri kojoj su vrijednosti nazivnog i zateznog momenta jednaki.



Sl. 2.47 – Usporedni podaci statičkih karakteristika

Sukladno izračunatim podacima, asinkroni stroja pokrenut će se sa naponom $U_s = 179,8 V$ i frekvencijom $f_1 = 41 Hz$, pri čemu će broj okretaja stroja biti $n = 1.165,4 \text{ okr}/\text{min}$. Nakon što stroj ostvari okretaje, dolazi do podizanja napona na $U_s = 219,4 V$ i frekvencije na sinhronu frekvenciju mreže $f_1 = 50 Hz$ kada asinhroni stroj ostvaruje nazivnu brzinu od $n_n = 1436,1 \text{ okr}/\text{min}$ pri čemu je koeficijent iskoristivosti stroja $\eta = 95,74\%$. U slučaju opterećenja dizalicom čiji je teret jednak $M_t = M_n$, dizalica se nebi pokrenula na frekvenciji mreže i stroj bi povukao struku kratkog spoja I_{ks} koja je izuzetno velika. Konkretno ista bi iznosila:

$$I_{ks} = \frac{U_s}{R_s} = \frac{219,4}{0,36} = 609,44 A$$

Ovakav način upravljanja strojem naziva se *skalarna regulacija* i opisuje se relacijom:

$$\frac{U_s}{f} = \text{const.}$$

Skalarna regulacija U/f ima ograničeno područje primjene zbog toga što je promjena napona motora ograničena, od nule do nazivnog napona. Povećanje napona iznad nazivnog nije dozvoljeno zbog naponskih naprezanja. Povećanje frekvencije iznad nazivne ograničeno je mehaničkim razlozima i promjenama mehaničke karakteristike motora zbog smanjenja toka u području iznad nazivne frekvencije. Kako bi se ostavila skalarna regulacija potreban je varijabilni frekvenzijski pretvarač (engl. *Variable Frequency Driverv; VFD*) o čemu će kasnije u tekstu biti više riječi.

Pored jednostavnije i manje precizne skalarne regulacije koja se zasniva na zakonu upravljanja $U/f = \text{konst.}$ razvijena je i koristi vektorska regulacija izmjeničnih elektromotornih pogona. Temelj vektorske regulacije je matematički model motora koji obuhvaća statička i dinamička stanja električkih, magnetskih i mehaničkih pojava u motoru. I o tome više u nastavku!

Osim prije navedenoga, važno je ponovno uočiti kako se stroj neće pokrenuti ako je nazivni moment veći od zateznog (pokretnog) momenta, stoga je važno odrediti karakter opterećenja asinhronog stroja, njegovu radnu točku i kada je ta radna točka stabilna. U suprotnome će se stroj „pregrijati“ uslijed struje kratkog spoja koja se pretvara u toplinsku energiju ili će osigurači (bimetal) isključiti stroj s napajanja.

2.4.1 Radna točka asinhronog stroja

Stabilni su oni sustavi koji se poslije kratkotrajnog poremećaja vraćaju u prvobitnu radnu točku. Kada je ta osobina karakteristična samo za neke radne točke onda se za te točke može reći kako su *stabilne radne točke*. Prema tome, ako je došlo do poremećaja uslijed djelovanja neke vanjske sile koji se učituje u promjeni brzine tj. vrijedi:

$$\omega(t) = \omega_n \pm \Delta\omega(t)$$

Tada više nije prisutno stacionarno (ustaljeno) stanje:

$$M_{el}(t) = M_t(t)$$

Već se ponovno nalazimo u prijeloznom procesu jer je dinamički moment $M_{din}(t)$ različit od nule tj. vrijedi:

$$J_m \frac{d[\Delta\omega(t)]}{dt} = M_{el}[\Delta\omega(t)] - M_t[\Delta\omega(t)]$$

U tom je slučaju potrebno linearizirati prije napisanu nelinearanu diferencijalnu jednadžbu u okolini točke ω_n , pa stoga slijedi na temelju Tylorov reda za linearnu aproksimaciju kako je:

$$M_{el} [\omega(t)] = M_{el} [\omega_n] + \left. \frac{\partial M_{el} [\omega(t)]}{\partial t} \right|_{\omega=\omega_n} \cdot [\omega(t) - \omega_n]$$

Sada slijedi:

$$M_{el} [\Delta\omega(t)] = \{M_{el} [\omega(t)] - M_{el} [\omega_n]\} = \left. \frac{\partial M_{el} [\omega(t)]}{\partial t} \right|_{\omega=\omega_n} \cdot \Delta\omega(t)$$

Analogno vrijedi:

$$M_t [\Delta\omega(t)] = \{M_t [\omega(t)] - M_t [\omega_n]\} = \left. \frac{\partial M_t [\omega(t)]}{\partial t} \right|_{\omega=\omega_n} \cdot \Delta\omega(t)$$

Stoga se može pisati:

$$J_m \frac{d[\Delta\omega(t)]}{dt} = \left\{ \left. \frac{\partial M_{el} [\omega(t)]}{\partial t} \right|_{\omega=\omega_n} - \left. \frac{\partial M_t [\omega(t)]}{\partial t} \right|_{\omega=\omega_n} \right\} \cdot \Delta\omega(t)$$

Neka je koeficijent stabilnost k_{stab} jednak:

$$k_{stab} = \left\{ \left. \frac{\partial M_t [\omega(t)]}{\partial t} \right|_{\omega=\omega_n} - \left. \frac{\partial M_{el} [\omega(t)]}{\partial t} \right|_{\omega=\omega_n} \right\}$$

Tada slijedi diferencijalna jednadžba stabilnosti:

$$J_m \frac{d[\Delta\omega(t)]}{dt} = -k_{stab} \cdot \Delta\omega(t)$$

Odnosno:

$$J_m \frac{d[\Delta\omega(t)]}{dt} + k_{stab} \cdot \Delta\omega(t) = 0$$

Pojednostavljeno:

$$\frac{J_m}{k_{stab}} \cdot \Delta\dot{\omega} + \Delta\omega = 0$$

Odnosno:

$$a \cdot \Delta\dot{\omega} + \Delta\omega = 0$$

gdje je:

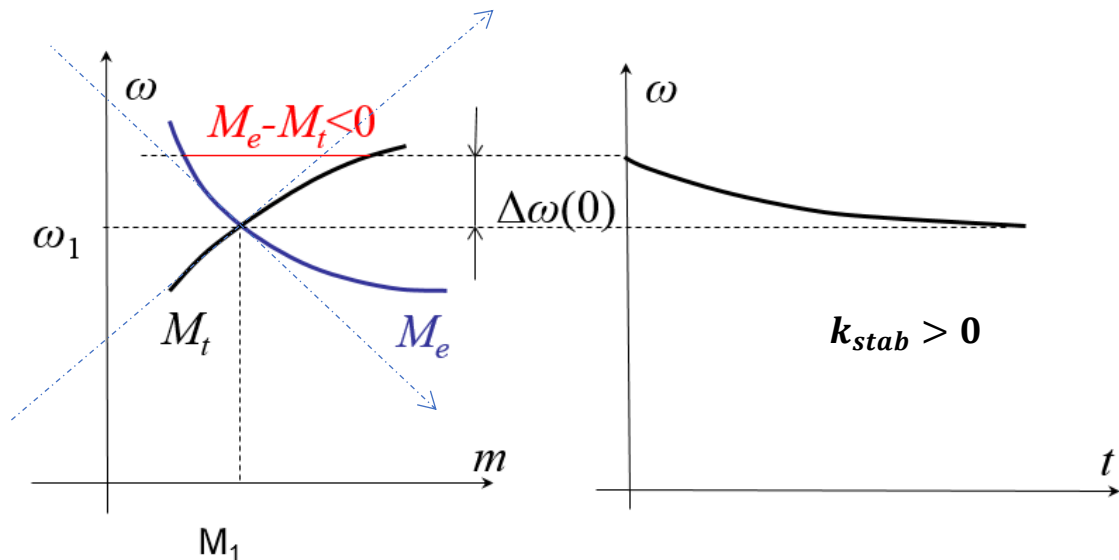
$$a = \frac{J_m}{k_{stab}} - \text{parametar stabilnosti radne točke}$$

Rješenje diferencijalne jednadžbe glasi:

$$\Delta\omega(t) = \Delta\omega(0) \cdot e^{-a \cdot t}$$

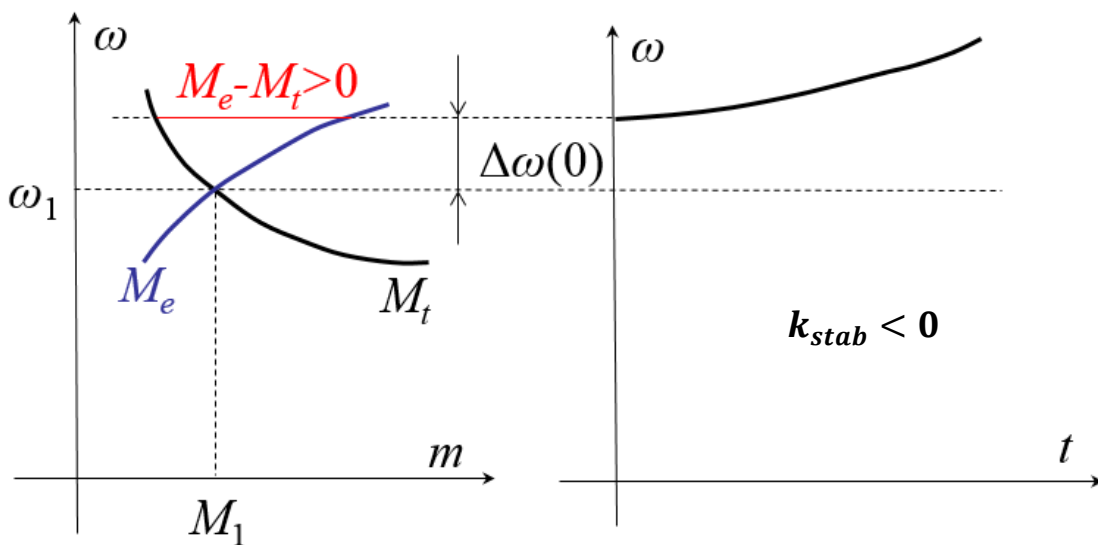
Grafički rješenje može se objasniti na sljedeći način, kako je prikazano na slikama 2.48 a) i b).

Slika 2.48 a) prikazuje stabilno stanje jer je $k_{stab} > 0$ odnosno $M_e < M_t$. Naime, ukoliko u radnoj točki $\omega_1 = f(M_1)$ dođe do porasta brzine za $\Delta\omega$ zbog djelovanja vanjskog poremećaja, stroj će se nakon prestanka djelovanja poremećaja vratiti u radnu točku u vremenu smirivnja signala $T_s \cong \frac{4}{a}$.



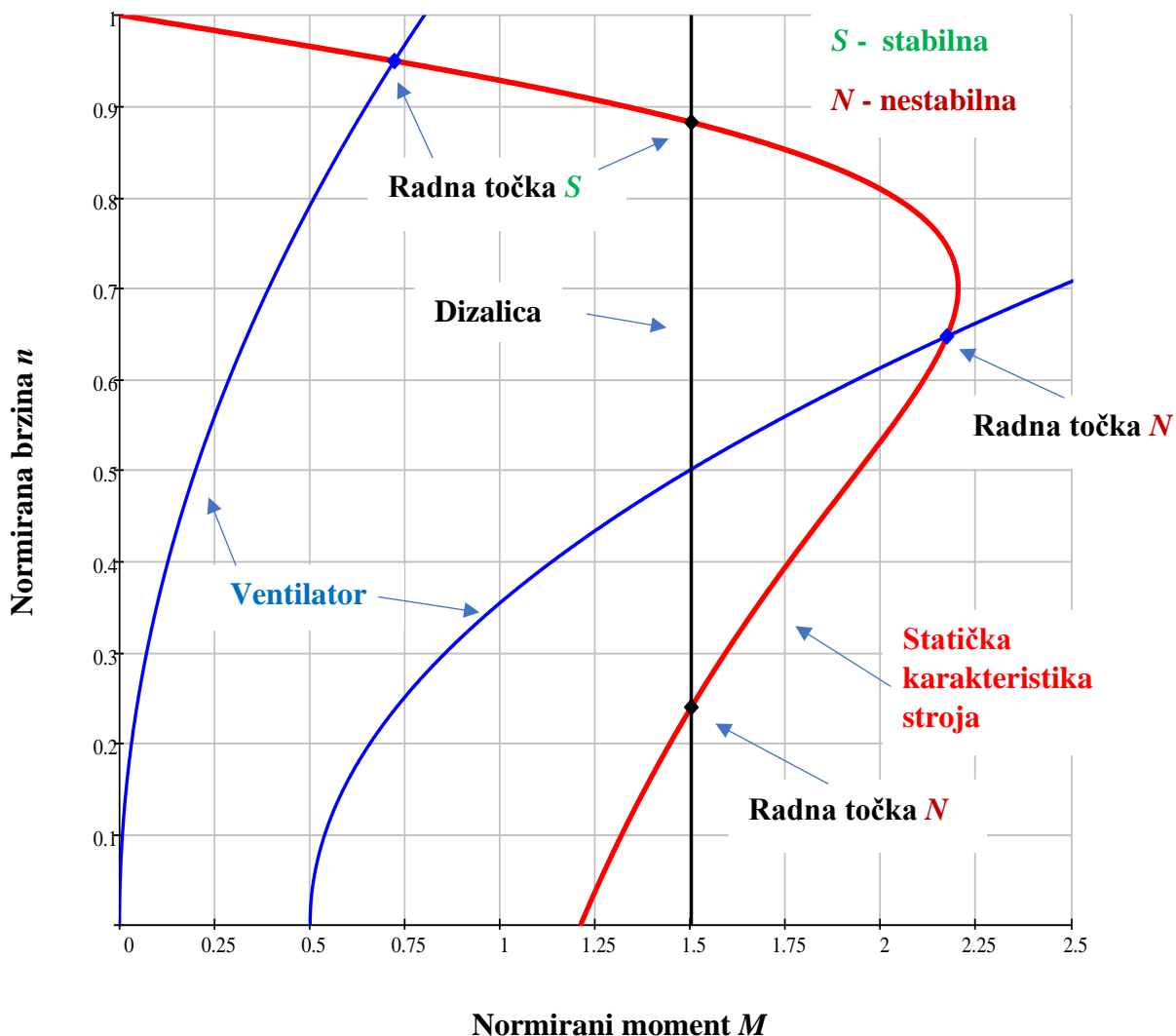
Sl. 2.48 a) – Stabilna radna točka stroja

Slika 2.48 b) prikazuje nestabilno stanje jer je $k_{stab} < 0$ odnosno $M_e > M_t$. Naime, ukoliko u radnoj točki $\omega_1 = f(M_1)$ dođe do porasta brzine za $\Delta\omega$ zbog djelovanja vanjskog poremećaja, stroj se neće nakon prestanka djelovanja poremećaja vratiti u radnu točku, već će doći do eksponencijalnog porasta brzine okretanja stroja.



Sl. 2.48 b) – Nestabilna radna točka stroja

Na slici 2.49 prikazane su karakteristike opterećenja stroja i to: dizalica (crna boja) i ventilator (plava boja), i statička karakteristika stroja u normiranom obliku (crvena boja).



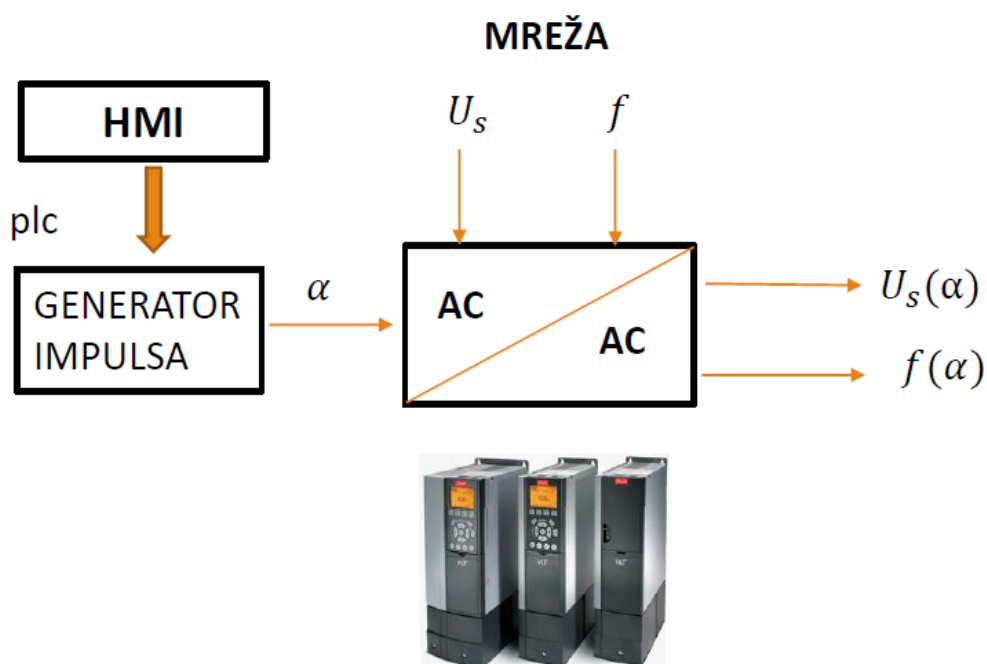
Sl. 2.49 – Stabilna i nestabilna radna točka stroja u odnosu na karakteristiku opterećenja

Općenito se može reći kako elektromotorni pogon generira upravljivu snagu namijenjenu za dovođenje i održavanje u gibanju radnih mehanizama, a stabilnost rada ovisi o vrsti opterećenja i načinu kako je odabrana radna točka. U primjeru prikazanom na slici. 2.49 prkazana je stabilna radna točka i nestabilna radna točka rada asinhronog stroju kada je opterećenje konstantno (dizalica) odnosno kada opterećenja raste s porastom broja okretaja stroja (ventilator),

U nastavku će se opisati princip rada varijabilnog frekvencijskog pretvarača (AC/AC energetske pretvarač) čiji se princip rada temelji na PWM modulaciji.

2.4.2 Varijabilni (promjenljivi) frekvencijski pretvarač (AC/AC)

Za upravljanje asinhronim strojem koristi varijabilni (promjenljivi) frekvencijski pretvarač na način da se omogućava promjenu frekvencije i napona električne energije koja se dovodi iz električne mreže. Kako je i prije navedeno, frekvencijski pretvarač služi za skalarnu regulaciju rada asinhronog stroja. Načelni prikaz dat je na slici 2.50 na kojoj se uočava sučelje (engl. *Human Machine Interface, HMI*), zatim generator impulsa PWM modulacije koji se nalazi u regulatoru (engl. *Programmable Logic Controller, PLC*), frekvencijski pretvarač i asinhroni stroj. Prikaza su i dva tipična dijagrama upravljanja odnosno promjenama statičkih karakteristika asinhronog stroja, koji će se kasnije detaljnije objasniti.

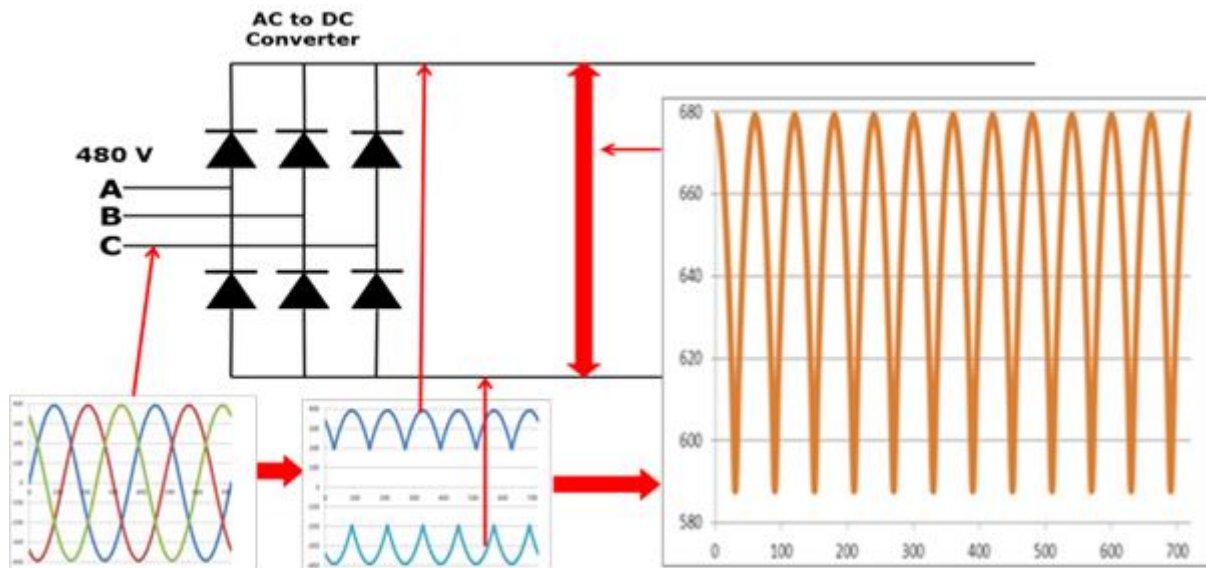


Sl.2.50 - Skalarna regulacija s frekvencijskim pretvaračem

Pretvorba napona i frekvencije mreže na potrebni napon i frekvenciju kako bi se zadovoljio uvjet skalarne regulacije tj. da vrijedi:

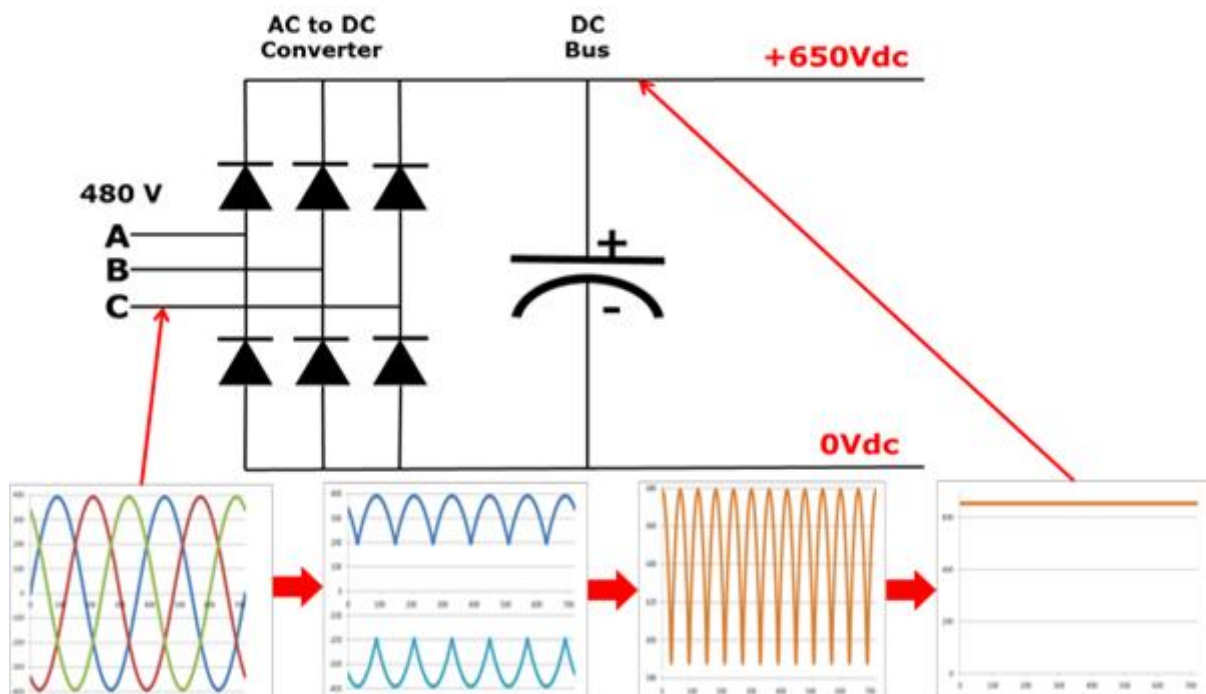
$$\frac{U_s}{f} = \frac{U_{s1}}{f_1} = const.$$

provodi se kroz više faza. Prva faza je pretvaračka koji se sastoji od šest nepovratnih dioda (mogu biti i neki drugi poluvodički elektronički ventili), kako je prikazano na slici 2.51 a). Radi se o AC/DC pretvorbi koja predstavlja standardnu konfiguraciju za izmjenične pogone.



Sl. 2.51 a) – AC/DC pretvarač⁶

Na ulazu u pretvarač nalazi se linijski trofazni napon čija je efektivna vrijednost $U_{l-rms} = 480V$. Na izlazu iz pretvarača pojavljuje se napon čija vrijednost oscilira između 580 i 680V. Kako bi se valovitost napona smanjila, dodaje se kondenzator kako je prikazano na slici 2.51 b), i na izlazu se uočava „glatki istosmjerni napon“ od približno 650V.



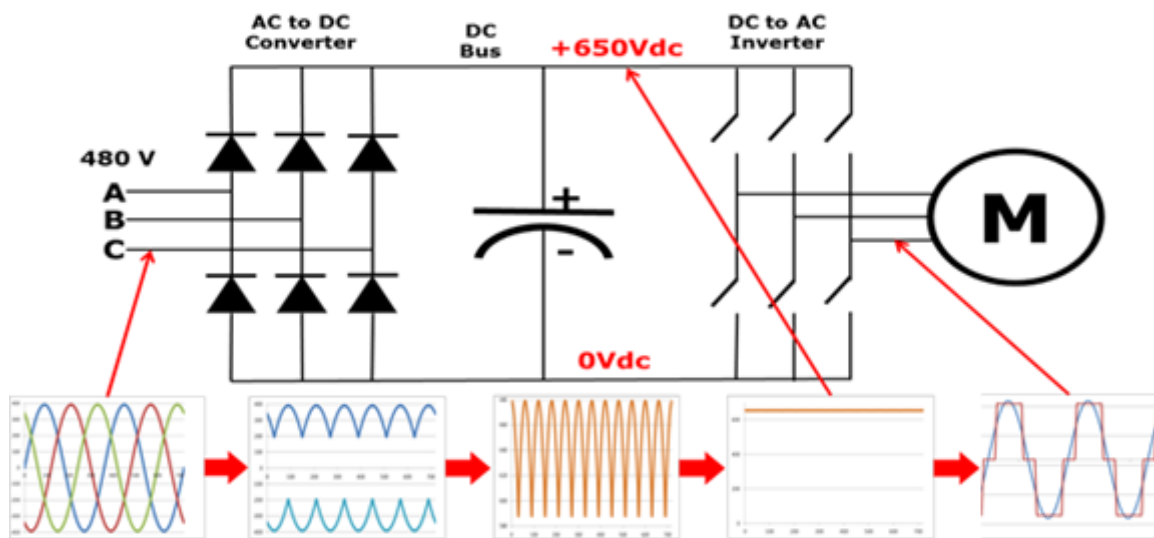
Sl. 2.51 b) – Smanjenje valovitosti napona [ibidem]

⁶ <http://alivecircuit.blogspot.com/2018/10/variable-frequency-drivervfd.html>, pristupljeno: 20.08.2021

Primjeni li se već prije poznata relacija, dobija se sljedeći rezultat koji potvrđuje prethodno navedni istosmjerni napon:

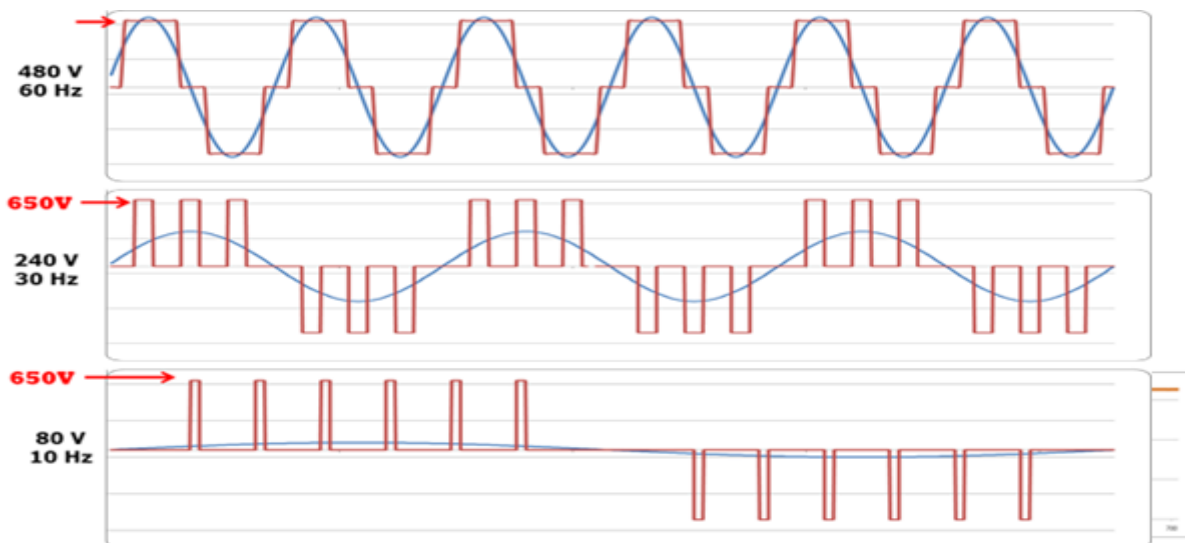
$$U_d = 2,34 \cdot U_{f-rms} = 2,34 \cdot \frac{U_{l-rms}}{\sqrt{3}} = 2,34 \cdot \frac{480}{\sqrt{3}} = 649,23V$$

Nakon što je napon ispravljen, isti se putem „invertera“ ponovno pretvara u izmjenični napon. Radi se o DC /AC pretvorbi putem tzv. prekidača koji su u stvarnoj izvedbi tranzistori. Oni svojim naizmjeničnim prekidanjem putem pozitivne i negativne sabirnice generiraju frekvenciju koju želimo postići. Na slici 2.51c) prikazana je DC/AC pretvorba putem invertora.



Sl. 2.51 c) – DC/AC inverter [ibidem]

Na slici 2.51 d) prikaza je AC/AC pretvorba napona i frekvencije za potrebe skalarne regulacije putem varijabilnog frekvencijskog pretvarača.

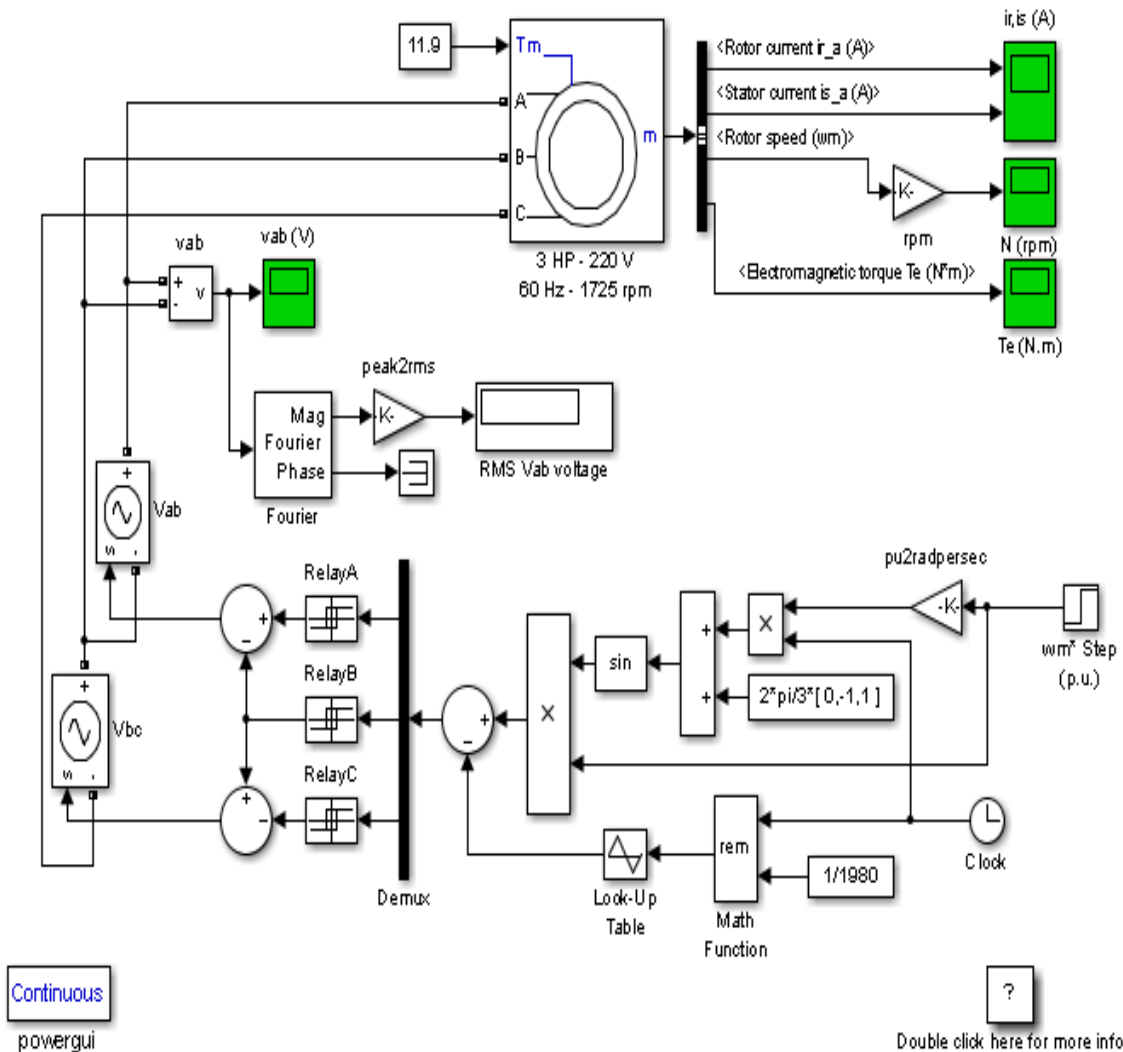


Sl. 2.51 d) – AC/AC – pretvarač [ibidem]

2.4.3 Dinamička karakteristika asinhronog stroja

Matematički opis dinamičke karakteristike asinhronog (indukcijskog) stroja neće se predstavljati zbog svoje složenosti, već će se dinamička karakteristika odrediti pomoću simulacijskog model. Na slici 2.52 prikazan je simulacijski model prijelazne karakteristike trofaznog asinhronog stroja.

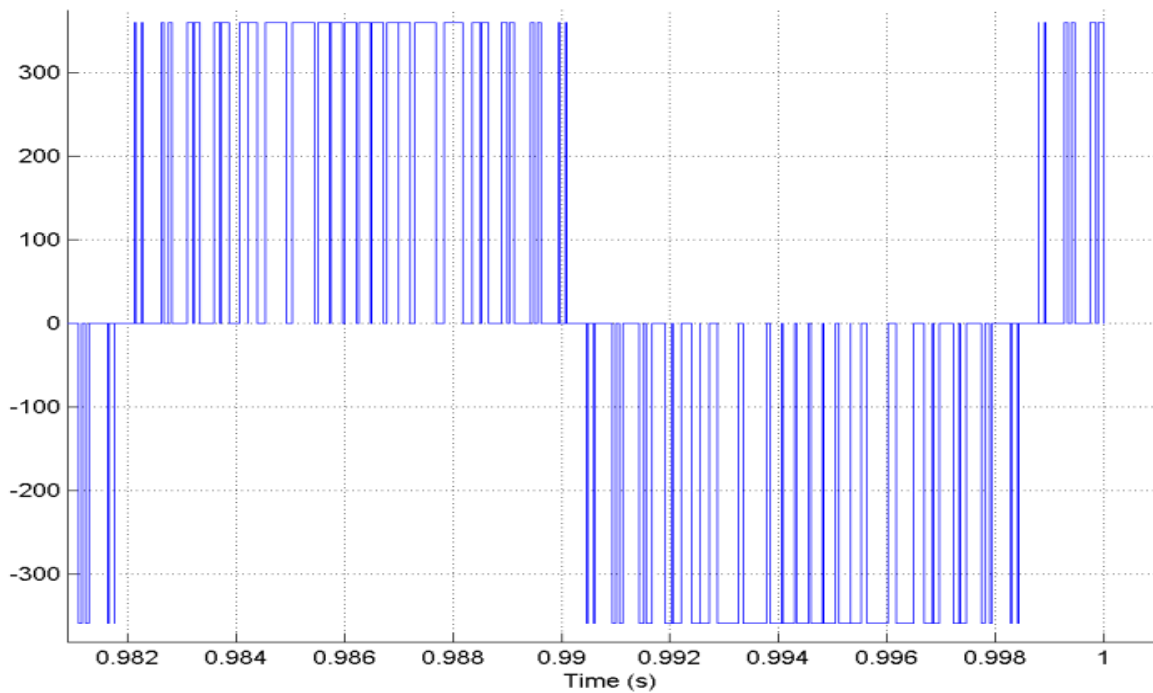
Three-Phase Asynchronous Machine



Sl. 2.52 – Simulacijski model trofaznog asinhronog stroja u MatLab-u

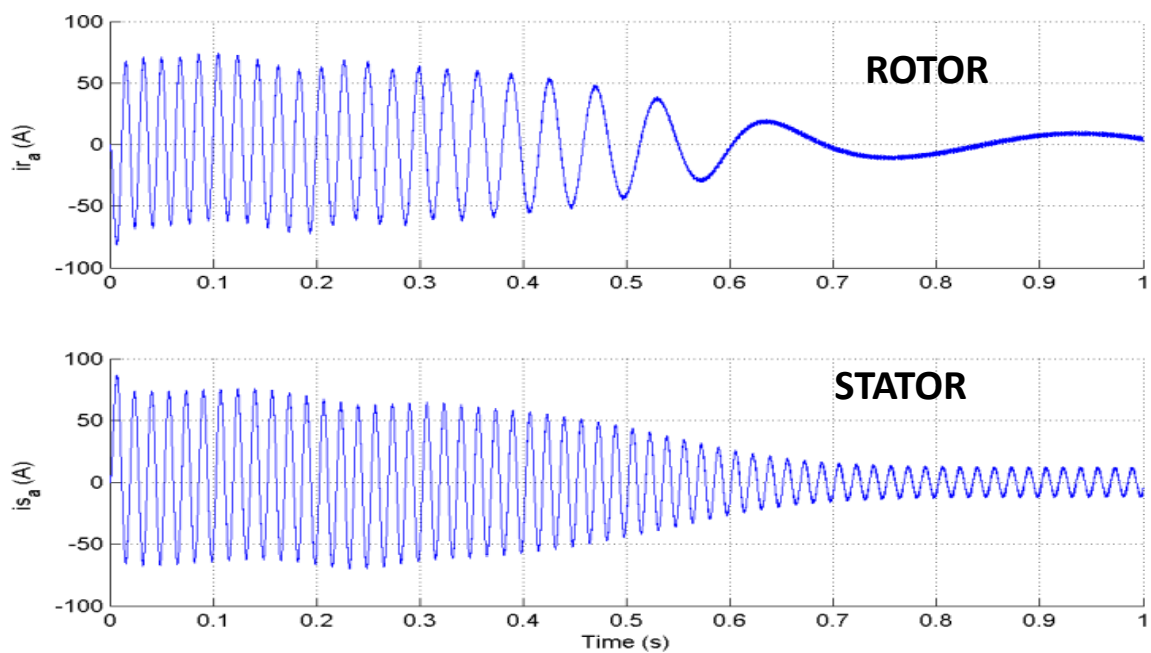
Na modelu se primjećuje kako je frekvencija električne mreže $f = 60 \text{ Hz}$ jer se radi o standardu Sjedinjenih Američkih Država (standard EU-a je $f = 50 \text{ Hz}$). Radi se o asinhronom motoru od 3 konjske snage ili $2.237,1 \text{ kW}$, s brojem okretaja od $n = 1.725 \text{ okr}/\text{min}$ i momentom tereta od $M_t = 11,9 \text{ Nm}$.

Na slici 2.53 prikazani su impulsi PWM modulacije AC/AC pretvarača na temelju koji se generira potrebna frekvencija i napon.

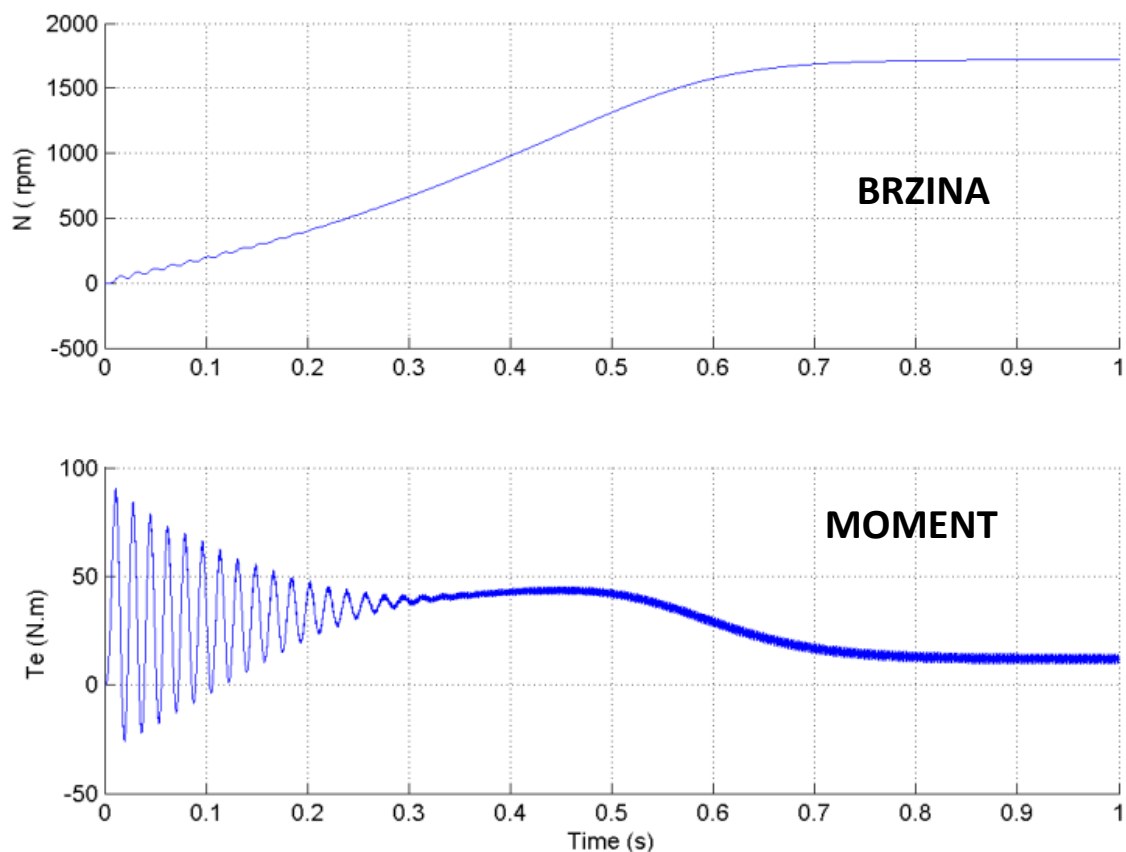


Sl. 2.53 - Impulsi PWM modulacije AC/AC pretvarača asinhronog stroja

Na slici 2.54 a) prikazana je struja rotora i statora, dok je na slici 2.54 b) prikazana brzina rotacije i moment asinhronog stroja.



Sl. 2.54 a) – Struja rotora i statora asinhronog stroja



Sl. 2.54 b) – Brzina rotacije i moment asinhronog stroja

Na slikama 2.54 a) i b) uočava se prijelazni proces koji traje cca 0,9 sekundi, nakon čega nastupa ustaljeno stanje tj. brzina rotacije od $n = 1.725 \text{ okr}/\text{min}$ i moment od $M_{el} = 11,9 \text{ Nm}$ (na slici T_e (engl. *Torque*, T) koji je ekvivalentan momentu tereta.

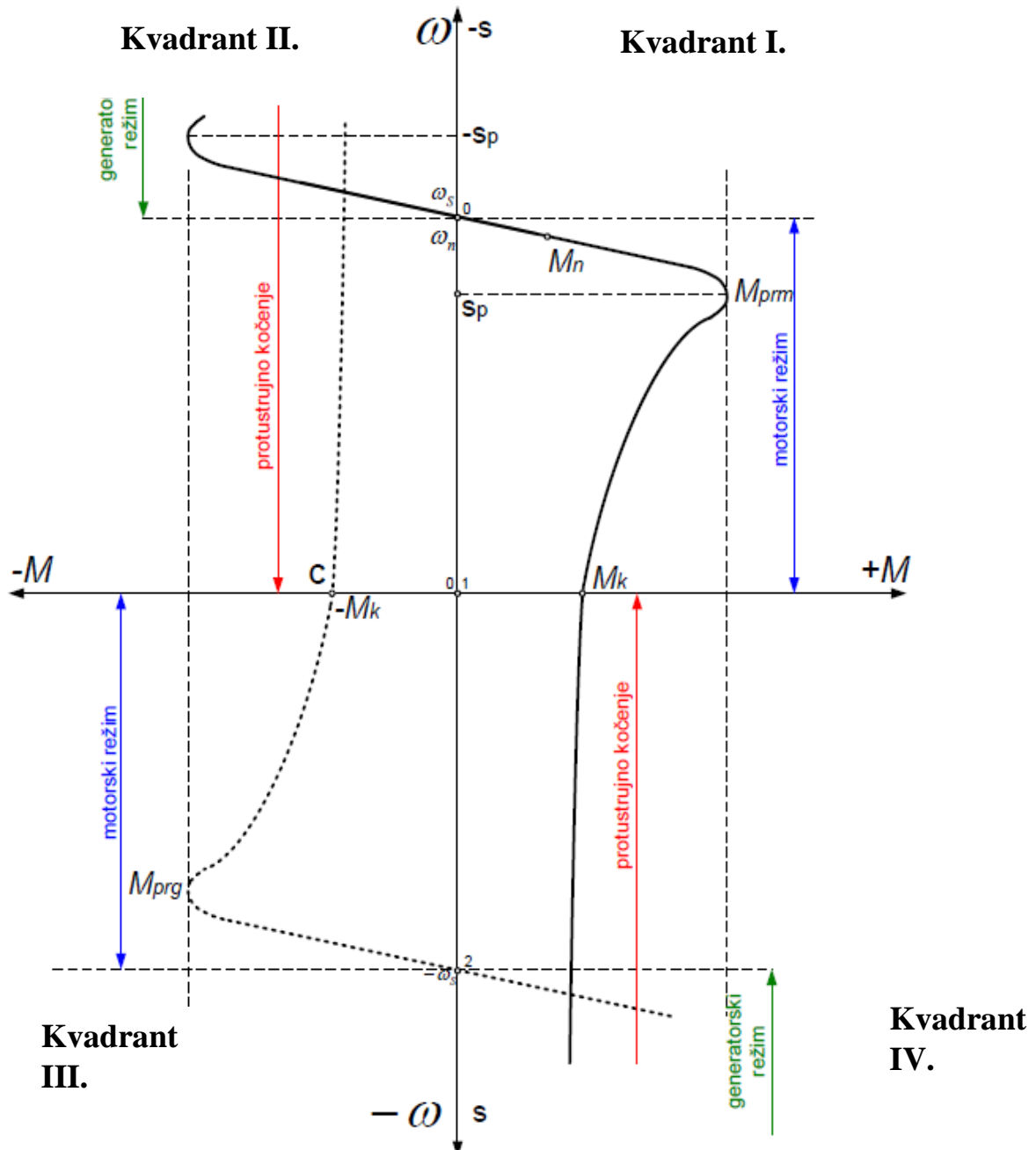
Na temelju prikazanih dijagrama može se uočiti kako se struja statoru inducira okretnim magnetskim poljem statora koji ima frekvenciju mreže, i zato se asinhroni stroja naziva još i indukcijски stroja. Rotor nije napajan strujom vanjskog izvora, i struja nakon prijelaznog procesa kada počinje djelovati magnetsko polje inducirane elektromotorne sile posteje jednaka nuli.

Brzina rotacija (vrtnje) asinhronog stroja izrazito ovisi o frekvenciji izvora napajanja (mreži), stoga je potrebno istodobno mijenjati i frekvenciju i napon napajanja što se postiže AC/AC energetskim pretvaračima na principu PWM modulacije.

U nastavku će pozornost biti usmjerena na kočenje asinhronog stroja.

2.4.4 Kočenje asinhronog stroja

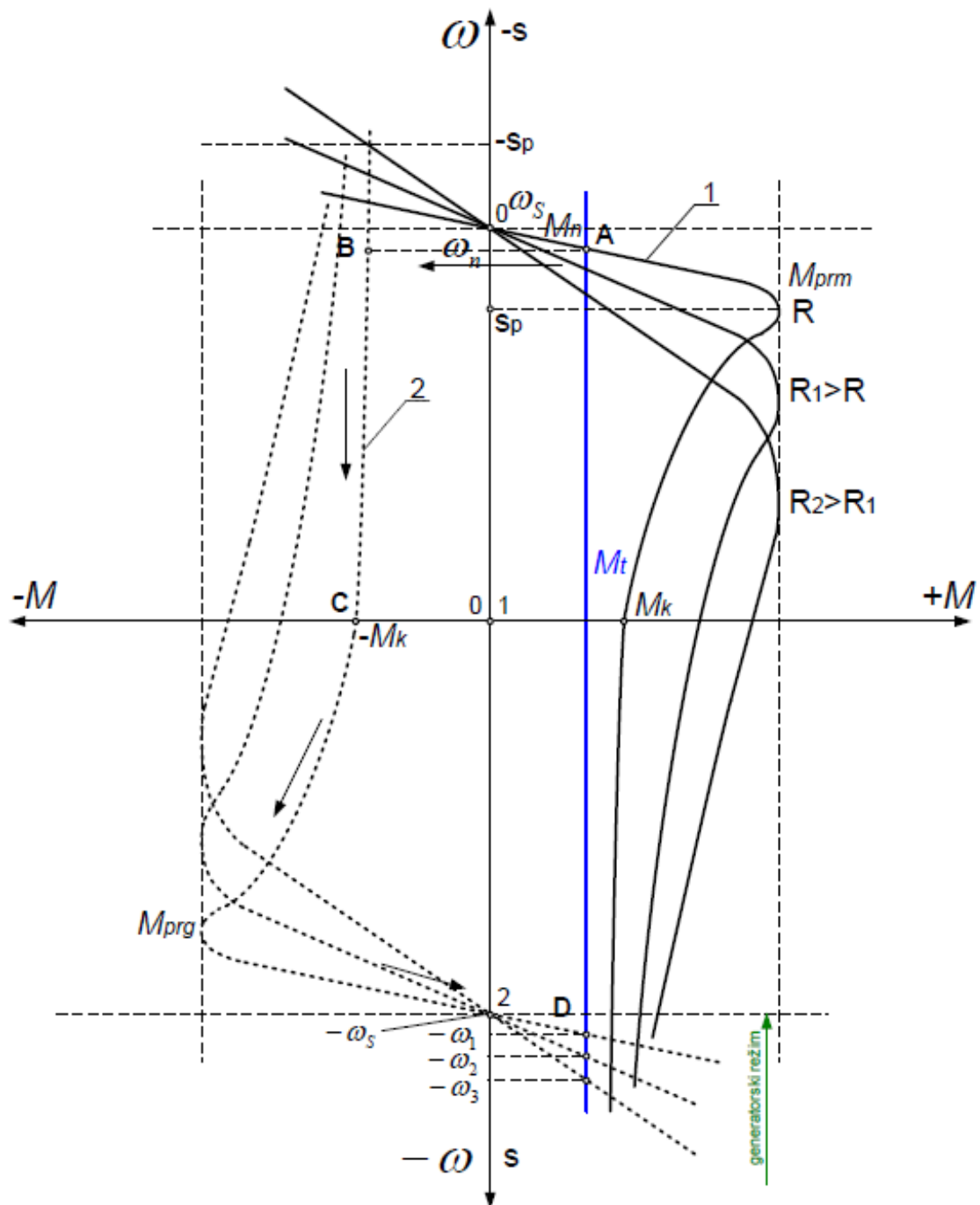
Asinhroni (indukcijski) stroj, kao i istosmjerni stroj, može raditi u sva četiri kvadranta kako je prikazano na slici 2.55.



Sl. 2.55 – Kvadranti rada asinhronog stroja [Izvor: FER - ZESA]

Prvi i treći kvadranti su kvadranti motorskog režima, dok su drugi četvrti i kvadrant kvadranti generatorskog režima i protustrujnog kočenja stroja. Osim spomenutih načina kočenja (generatorsko i protustrujno) pisutni su i ostali oblici kočenja koji se neće obrađivati.

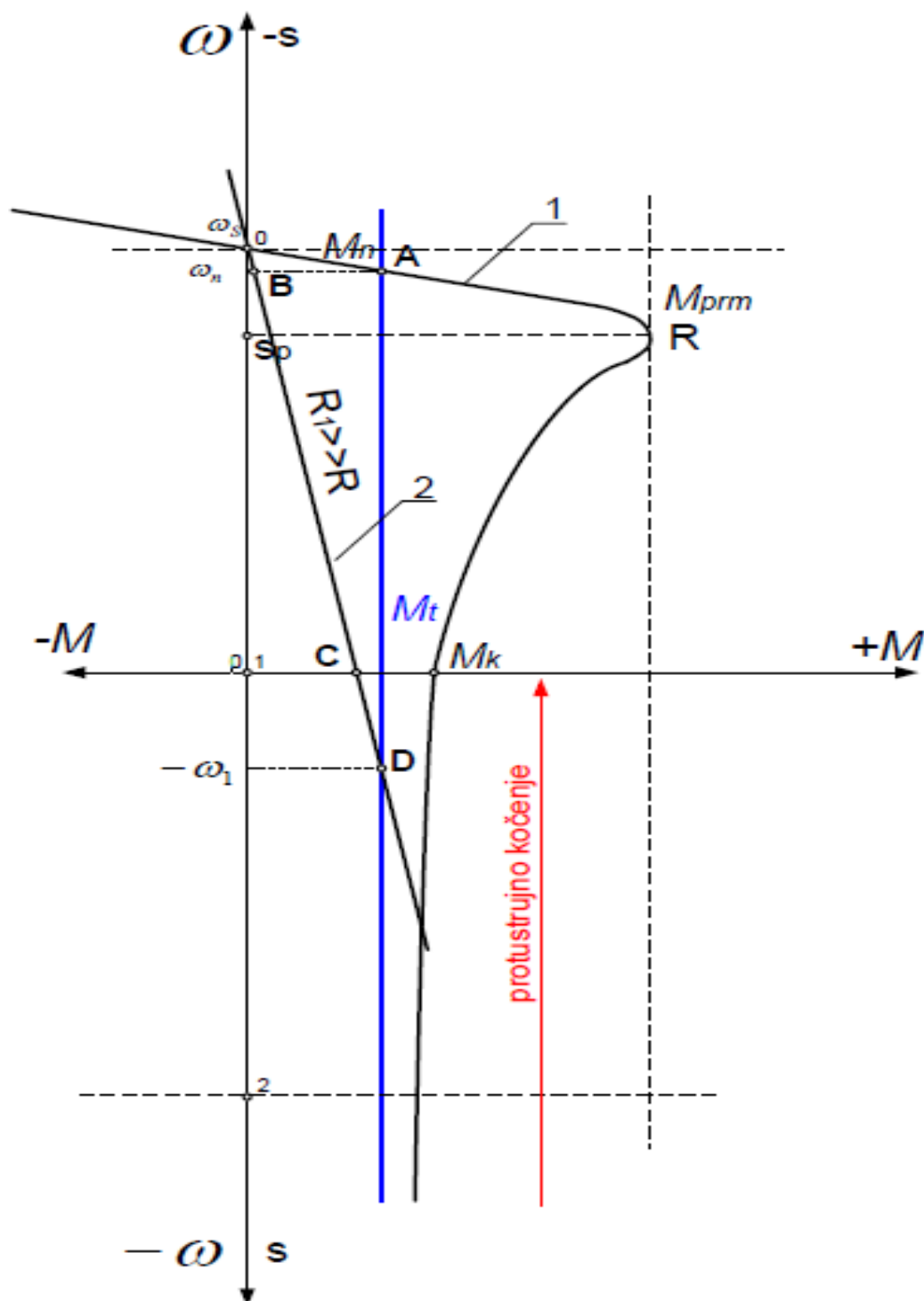
Na slici 2.56 prikazan je dijagram generatorskog kočenja uz dodatni otpor u rotorskom krugu.



Sl. 2.56 – Generatorsko kočenje asinhronog stroja [Izvor: FER - ZESA]

Na slici 2.57 prikazan je potencijalni teret M_t i promjena statičke karakteristike snage u odnosu na promjenu otpora rotora. Generatorsko kočenje moguće samo onda kada je brzina vrtnje stroja veća od sinhronne brzine, zato se govori o kočenju u nadsinhronom području. U slučaju generatorskog kočenja električna energija se vraća u mrežu, stoga je takvo kočenje učinkovitije od protustrujnog kočenja.

Na slici 2.58 prikazan je dijagram protustrujnog kočenja s dodatkom velikog otpora u rotacijskom krugu.



Sl. 2.58 - Protustrujno kočenje asinchronog stroja [Izvor: FER - ZESA]

Kao i u prethodnom slučaju, na slici 2.58 prikazan je potencijalni teret M_t i radna točka kočenja uslijed velikog otpora u krugu rotora. Ovakvo kočenje je energetske neučinkovito.

2.4.5 Proširena statička karakteristika snage

U prethodnim dijelu određena je relacija za električni moment M_{el} asinhronog stroja tako što je zanemarena vrijednost otpora statora $R_s = 0$. U tom slučaju određene su bile sljedeće relacije:

$$M_{el} = M_p \cdot \frac{2}{\frac{s}{s_p} + \frac{s_p}{s}}$$

gdje je:

$$M_p = \frac{3}{8 \cdot \pi^2} \cdot \frac{p \cdot (1 - \sigma)}{\sigma \cdot L_s} \cdot \left(\frac{U_s}{f}\right)^2$$

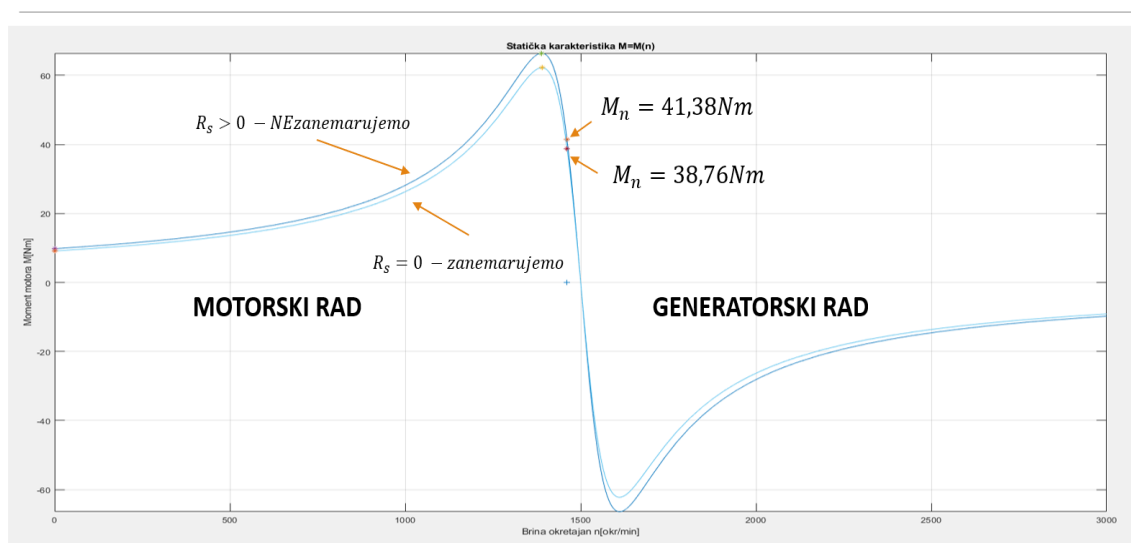
$$s_p = \frac{R_r}{X_r \cdot \sigma}$$

U slučaju kada se otpor statora ne zanemaruje $R_s \neq 0$ tada vrijede sljedeće relacije:

$$M_p = \frac{3}{2} \cdot p \cdot \left(\frac{U_s}{\omega_s}\right)^2 \cdot \frac{1}{\frac{R_s}{\omega_s} + \frac{\sqrt{(R_s^2 + X_s^2) \cdot (R_s^2 + \sigma^2 \cdot X_s^2)}}{(1 - \sigma) \cdot \omega_s \cdot X_s}}$$

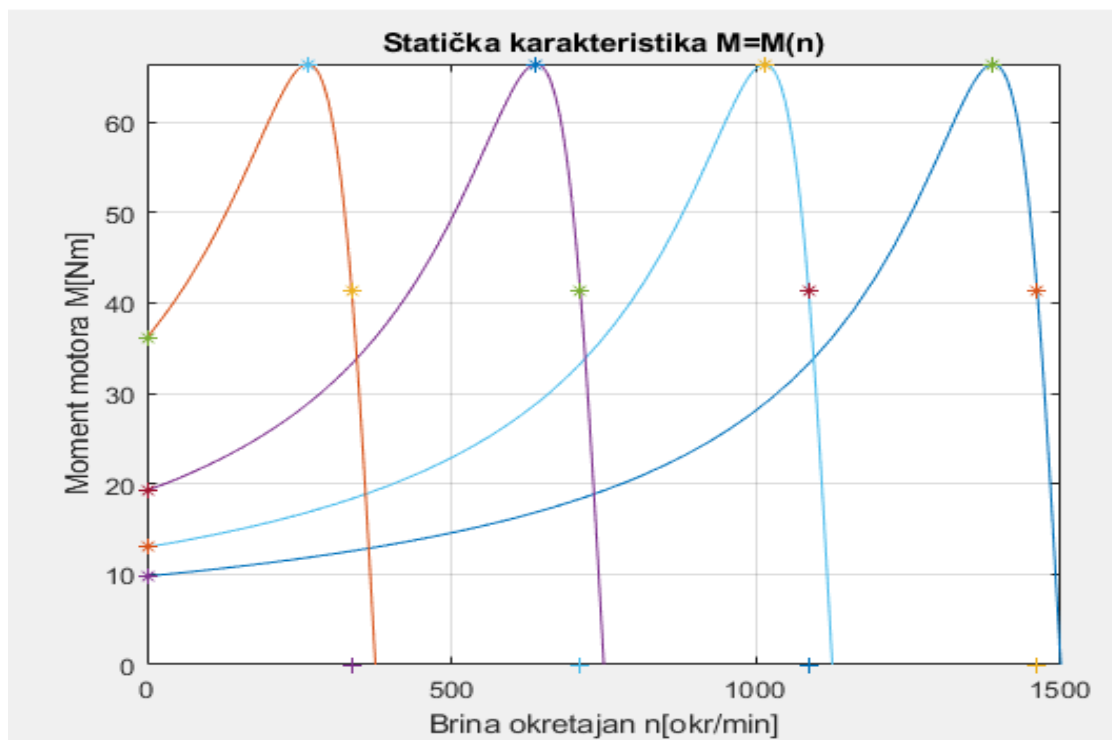
$$s_p = \frac{R_r}{X_r} \sqrt{\frac{R_s^2 + X_s^2}{R_s^2 + \sigma^2 \cdot X_s^2}}$$

Na slici 2.59 prikazni su statičke karakteristike u oba slučaja, a ulazni parametri bili su sljedeći: napon statora $U_s = 220V$, frekvencija mreže $f = 50Hz$, relani otpori statora i rotora $R_s = 0,45\Omega$ i $R_r = 0,4\Omega$, imaginarni otpori $X_s = 45,95\Omega$, $X_r = 45,95\Omega$ i $X_{MI} = 44\Omega$. Radi se o četverpolnom motoru (dva para polova)

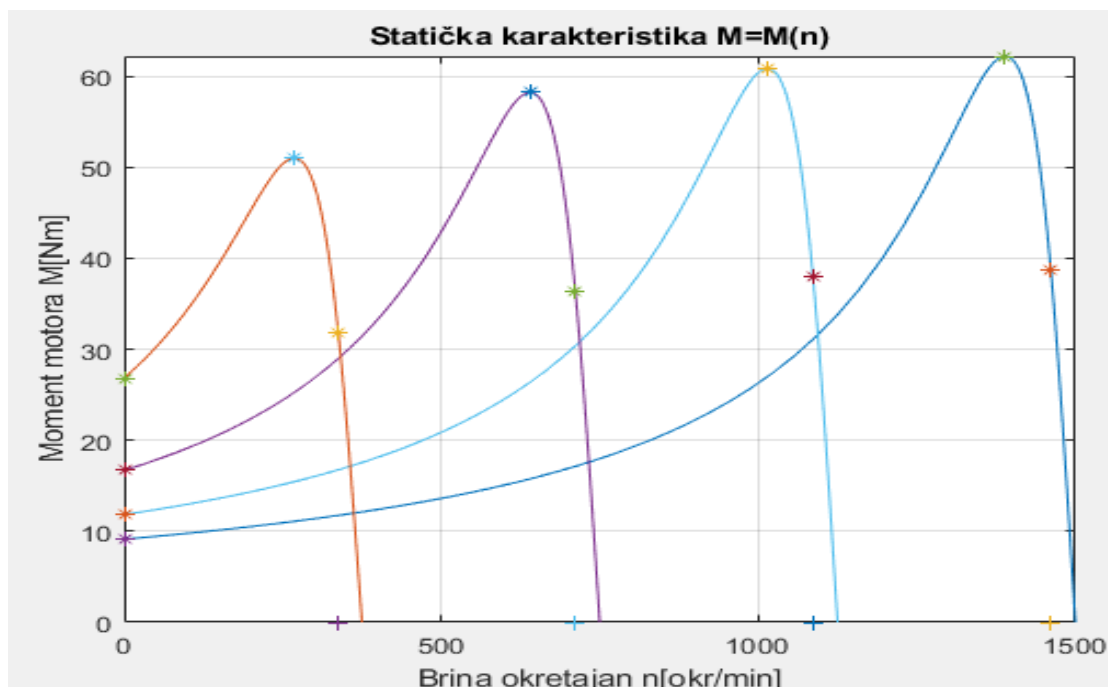


Sl. 2.59 – Usporedni prikaz statičkih karakteristika asinhronog stroja

Na slikama 2.60 a) i b) prikazani su dijagrami skalarne regulacije za oba slučaja tj. $R_s = 0$ i $R_s \neq 0$. Uočavaju se razlike u pogledu nazivnog momenta M_n i prekretnog momenta M_p .



Sl. 2.60 a) – Statička karakteristika asinshronog stroja za $R_s = 0$



Sl. 2.60 b) – Statička karakteristika asinshronog stroja za $R_s \neq 0$

Statičku karakteristiku asinshronog stroja nije moguće uvijek egzaktno odrediti, stoga se koristi proširena Klossova formula koja glasi:

$$M = M_p \frac{2 + \beta}{\frac{s}{s_p} + \frac{s_p}{s} + \beta}$$

gdje je:

β – dodatni faktor statičke karakteristike

U primjeru br. 15 pokazat će se izračun statičke karakteristike snage asinhronog stroja na temelju podataka iz kataloga strojeva.

Primjer br. 15

Iz kataloga proizvođača „Končar“ Zagreb uzeti su parametri stroja kako je prikazano u Tablici 2.1. Radi se o trofaznom asinhronom stroju.

Tablica 2.1 – Parametri asinhronog stroja iz kataloga „Končar“

2p=4			1500 min ⁻¹				400V / 50Hz						
P (kW)	Motor type	n (min ⁻¹)	η 100% (%)	η 75% (%)	η 50% (%)	cos φ	I _n (A)	$\frac{I_k}{I_n}$	M _n (Nm)	$\frac{M_k}{M_n}$	$\frac{M_{max}}{M_n}$	J (kgm ²)	m (kg)
132	7AZ315M-4	1485	95.2	94.8	93.9	0.84	239	5.6	850	1.5	2.2	3,09883	945
160	7AZ315LA-4	1490	95.5	95.0	94.2	0.82	295	5.6	1025	1.5	2.2	3,68510	1080
200	7AZ315LB-4	1490	94,6	93,7	0,82	0,82	370	6,5	1280	1,7	2,2	4,43867	1180

Potrebno je odrediti statički karakteristiku snage asinhronog stroja tipa 7AZ315LB-4.

Rješenje:

Uzeti su sljedeći parametri asinhronog stroja: napon statora $U_s = 400 V$, frekvencija mreže $f = 50 Hz$, broj okretaja $n = 1490 \text{ okr}/\text{min}$, koeficijent iskoristivosti $\eta = 94,6\%$, faktor snage $\cos \varphi = 0,82$, struja potrošnje $I_n = 370 A$ i nazivni moment $M_n = 1.280 Nm$. U Tablici 2.1 dati su i pojedini odnosi momenta stroja gdje je $M_z = M_k$ zakretni moment motora i vrijedi:

$$\frac{M_z}{M_n} = 1,7$$

Odnosno za prekretni moment $M_p = M_{max}$ vrijedi:

$$\frac{M_p}{M_n} = 2,2$$

Za struju krakog spoja I_{ks} vrijedi:

$$\frac{I_{ks}}{I_n} = 6,5$$

Slijedom prije navedenih odnosa vrijedi da je:

$$M_z = M_k = 1,7 \cdot M_n = 1,7 \cdot 1280 = 2.176Nm$$

$$M_p = M_{max} = 2,2 \cdot M_n = 2,2 \cdot 1.280 = 2.816Nm$$

$$I_k = 6,5 \cdot I_n = 6,5 \cdot 370 = 2.405A$$

Prema Tablici 2.1 snaga stroja je $P_n = 200kW$. Isto se može provjeriti na sljedeći način:

$$P_{ul} = 3 \cdot U_{ef}^f \cdot I_{ef} \cdot \cos \varphi = 3 \frac{400}{\sqrt{3}} \cdot 370 \cdot 0,82 = 210,45kW$$

$$P_n = M_n \cdot n \cdot \frac{\pi}{30} = 1.280 \cdot 1.490 \cdot \frac{\pi}{30} = 199,72kW$$

$$\eta = \frac{P_n}{P_{ul}} = \frac{199,72}{210,45} = 0,949$$

$$s_n = 1 - \eta = 1 - 0,949 = 0,051$$

Izračun dodatnog faktora β moguć je ako se postave sljedeće jednakosti:

$$\frac{M_n}{M_p} = \frac{2 + \beta}{\frac{s_n}{s_p} + \frac{s_p}{s_n} + \beta} = k_1$$

$$\frac{M_k}{M_p} = \frac{2 + \beta}{\frac{1}{s_p} + s_p + \beta} = k_2$$

Uvode se sljedeće supstitucije:

$$a_1 = \frac{k_1}{1 - k_1}; \quad a_2 = \frac{k_2}{1 - k_2}; \quad b_1 = \frac{2}{1 - k_1}; \quad b_2 = \frac{2}{1 - k_2}; \quad c = b_1 - b_2$$

Na osnovu istih slijedi:

$$s_p^2 - p \cdot s_p + q = 0$$

gdje je:

$$p = s_n \frac{c}{a_1 - a_2 \cdot s_n}; \quad q = s_n \frac{a_1 \cdot s_n - a_2}{a_1 - a_2 \cdot s_n}$$

Uvršavanjem odgovarajućih vrijednosti slijedi da je $p = -0,3856$ i $q = -0,2552$ odnosno dobiva se kvadratna jednadžba:

$$s_p^2 + 0,3856 \cdot s_p - 0,2522 = 0$$

Čije je rješenje jednako:

$$s_{p_{1,2}} = -\frac{0,3856}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0,3856}{2}\right)^2 + 0,2552}$$

Odnosno

$$s_{p_1} = 0,3452 \quad \text{i} \quad s_{p_2} = -0,7307$$

Slijedi da je faktor β jednak:

$$\beta = a_2 \cdot \frac{s_p^2 + 1}{s_p} - b_2 = 2,2233$$

Statička karakteristika glasi:

$$M = M_p \frac{2 + \beta}{\frac{s}{s_p} + \frac{s_p}{s} + \beta} = 2.816 \cdot \frac{2 + 2,2233}{\frac{s}{0,3452} + \frac{0,3452}{s} + 2,2233}$$

Odnosno:

$$M(s) = \frac{11,893}{2,896 \cdot s + \frac{0,3452}{s} + 2,2233}$$

Normirana statička karakteristika glasi:

$$\frac{M}{M_p} = \frac{2 + \beta}{\frac{s}{s_p} + \frac{s_p}{s} + \beta} = \frac{4,2233}{2,896 \cdot s + \frac{0,3452}{s} + 2,2233}$$

Rješenje (programska rutina u MatLab-u) je sljedeć:

```
'Asinhroni motor'
'Zadano'
Mn=1280
Mk=1.7*Mn
Mp=2.2*Mn
k1=Mn/Mp
k2=Mk/Mp
P=200e3
U1=400;
Us=U1/sqrt(3)
pol=2
f=50
nn=1490
In=370
cosfi=0.82
```

```

'Provjera podataka'
Pu1=3*Us*In*cosfi
omn=nn*pi/30
Pn=Mn*omn
isk=Pn/Pu1
sn=1-isk

'Rješenje'
'1-Koeficijenti'
a1=k1/(1-k1)
b1=2/(1-k1)
a2=k2/(1-k2)
b2=2/(1-k2)
c=b1-b2
p=c*sn/(a1-a2*sn)
q=sn*(a1*sn-a2)/(a1-a2*sn)
sp1=p/2+sqrt((p/2)^2-q)
sp2=p/2-sqrt((p/2)^2-q)

'2 - Prekretno klizanje'
sp=sp1

'3 - Faktor beta'
beta=a2*(sp^2+1)/sp-b2

'4 - Sinhrona brzina'
ns=60*f

'5 - Nazivna i prekretna brzina [okr/min]'
nn=ns/pol*(1-sn)
np=ns/pol*(1-sp)

'6 - Iskoristivost'
isk=pol*nn/ns

'Crtanje statičke karakteristike'
syms x
h =(2+beta)*Mp/((1-x*pol/ns)/sp+sp/(1-x*pol/ns)+beta);
fplot(h,[0 ns/pol])
title('Statička karakteristika M=M(n)')
xlabel('Brzina okretanja n[okr/min]')
ylabel('Moment motora M[Nm]')
grid
hold on
plot(nn,Mn, '*')
plot(nn,0, '+')
plot(0,Mk, '*')

```

```
plot(np,Mp, '*')
hold off

'Crtanje normirane statičke karakteristike'
syms x
s=1-x;
M=(2+beta)/((s/sp+sp/s)+beta);
fplot(M,[0 1])
title('Normirana statička karakteristika')
xlabel('Iskoristivost')
ylabel('M/Mp')
hold on
plot(1-sn,k1, '*')
plot(0,k2, '*')
plot(1-sp,1, '*')
grid on
```

Parametri

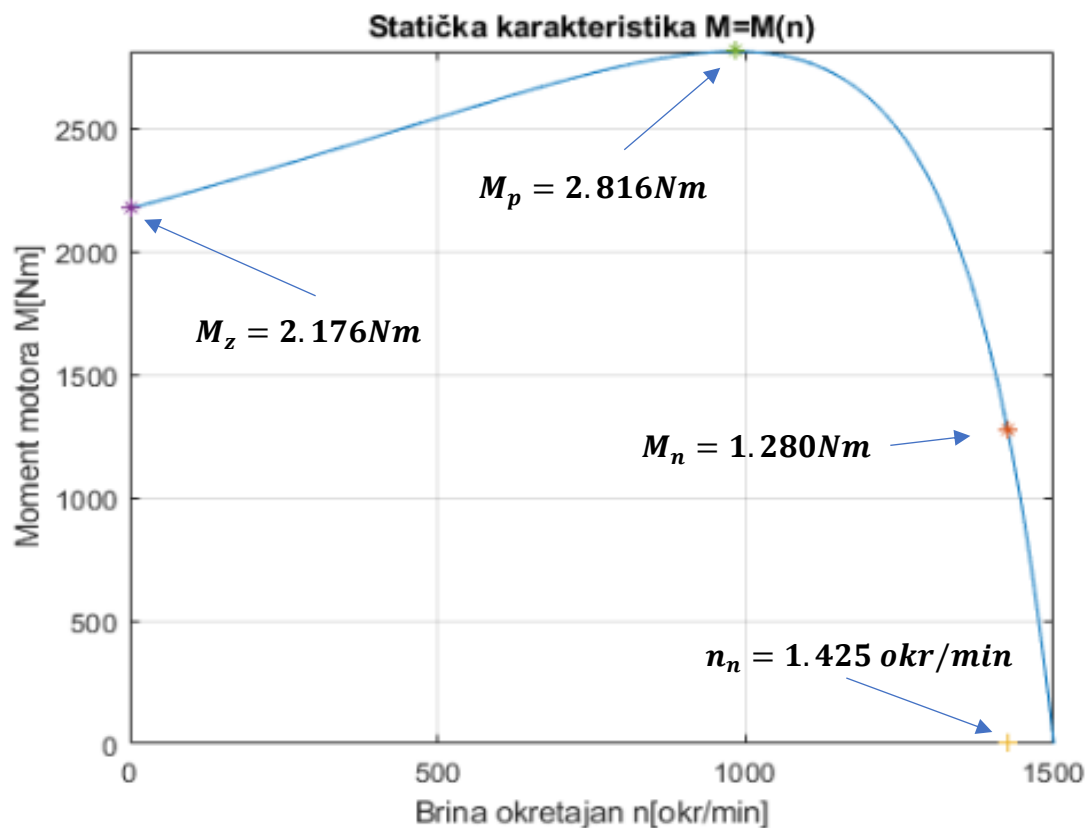
```
ans = 'Asinhroni motor'
ans = 'Zadano'
Mn = 1280
Mk = 2176
Mp = 2816
k1 = 0.4545
k2 = 0.7727
P = 200000
Us = 230.9401
pol = 2
f = 50
nn = 1490
In = 370
cosfi = 0.8200
ans = 'Provjera podataka'
Pu1 = 2.1020e+05
omn = 156.0324
Pn = 1.9972e+05
isk = 0.9501
sn = 0.0499
```

U nastavku su prikazani rezultati proračuna odnosno grafovi statičke karakteristike snage i normirane statičke karakteristike sange.

```

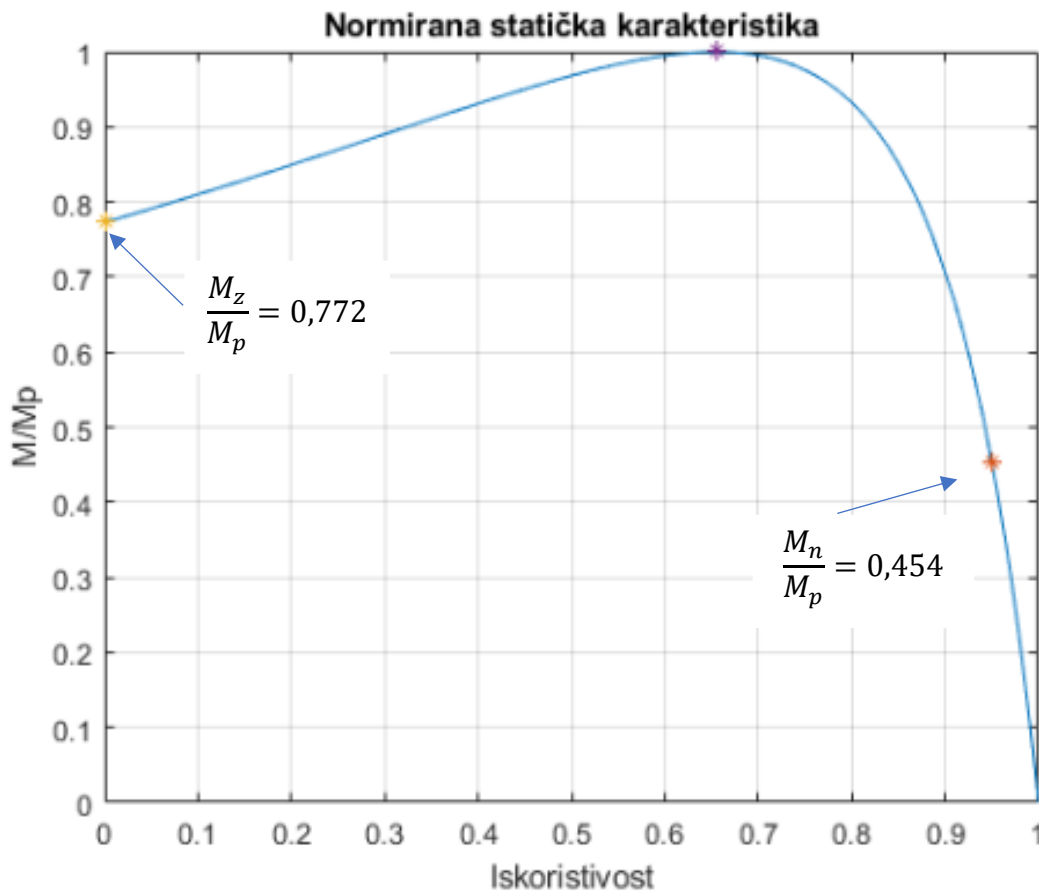
ans = '1-Koeficijenti'
a1 = 0.8333
b1 = 3.6667
a2 = 3.4000
b2 = 8.8000
c = -5.1333
p = -0.3856
q = -0.2522
sp1 = 0.3452
sp2 = -0.7307
ans = '2 - Prekretno klizanje'
sp = 0.3452
ans = '3 - Faktor beta'
beta = 2.2233
ans = '4 - Sinhrona brzina'
ns = 3000
ans = '5 - Nazivna i prekretna brzina [okr/min]'
nn = 1.4252e+03
np = 982.2147
ans = '6 - Iskoristivost'
isk = 0.9501
    
```

Na slici 2.61 prikazana je statička karakteristika snage.



Sl. 2. 61 – Statička karakteristika snage

Na slici 2.62 prikazana je normirana statička karakteristika sange.



Sl. 2. 62 – Normirana statička karakteristika snage

2.4.6 Vrijeme zaleta asinhronog stroja i gubici

Jedan od važnih parametara asinhronog stroja je njegov zalet. Relacija za proračun srednjeg momenta zaleta asinhronog stroja M_{sr} je sljedeća

$$M_{sr} = \frac{M_p + M_z}{2}$$

U konkretno promatranom primjeru vrijedit će:

$$M_{sr} = \frac{M_p + M_z}{2} = \frac{2,2 \cdot M_n + 1,7 \cdot M_n}{2} = 1,95 \cdot M_n = 1,95 \cdot 1.290 = 2.496 \cong 2,5kW$$

Vrijeme zaleta t_z računa se prema sljedećoj relaciji:

$$t_z = J_m \cdot \frac{\omega_s}{M_{sr}}$$

Kako prema Tablici 2.1 moment inercije stroja iznosi $J_m = 4,43867 \text{ kgm}^2$, to će vrijeme zaleta stroja t_z iznositi:

$$t_z = J_m \cdot \frac{\omega_s}{M_{sr}} = J_m \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot f}{p} = 4,43867 \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot 50}{2} = 0,29 \text{ sek}$$

Energetski gubici E_g koji se pojavljuju su sljedeći:

$$P_g = P_n \cdot \frac{1 - \eta}{\eta} = 200 \cdot \frac{1 - 0,946}{0,946} = 11,416 \text{ kW}$$

$$E_g = P_g \cdot t_z = 11,416 \cdot 0,28 = 3,12 \text{ kWs}$$

Rotorski gubici energije E_r u zaletu iznose:

$$E_r = J_m \cdot \frac{\omega_s^2}{2} = J_m \cdot \frac{\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot f}{p}\right)^2}{2} = 4,43867 \cdot \frac{\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot 50}{2}\right)^2}{2} = 54,75 \text{ kWs}$$

Kako su statorski gubici snage E_s približno jednaki rotorskim gubicima snage E_r tj. vrijedi $E_r \cong E_s$, tada su električni gubici snage E_{elg} jednaki:

$$E_{elg} = 2 \cdot E_r = 2 \cdot 54,75 = 109,52 \text{ kWs}$$

Omjer gubitaka zaleta i stacionarnog stanja tada iznosi:

$$\frac{E_{el}}{E_g} = \frac{109,52}{3,12} = 35,1$$

Radi se o približnim rezultatima gubitaka u prijelaznom procesu tj. zaletu stroja.

2.4.7 Izbor snage asinhronog stroja

Za izbor snage asinhronog stroja može se koristiti metoda ekvivalentnog momenta M_{ekv} . Ista se koristi kada je razvijeni moment proporcionalan struji potrošnje.

Primjer br. 16

U Tablici 2.2 dati su podaci koji dimenzioniraju pogon postrojenja za izvlačenje matreijala iz rudnika.

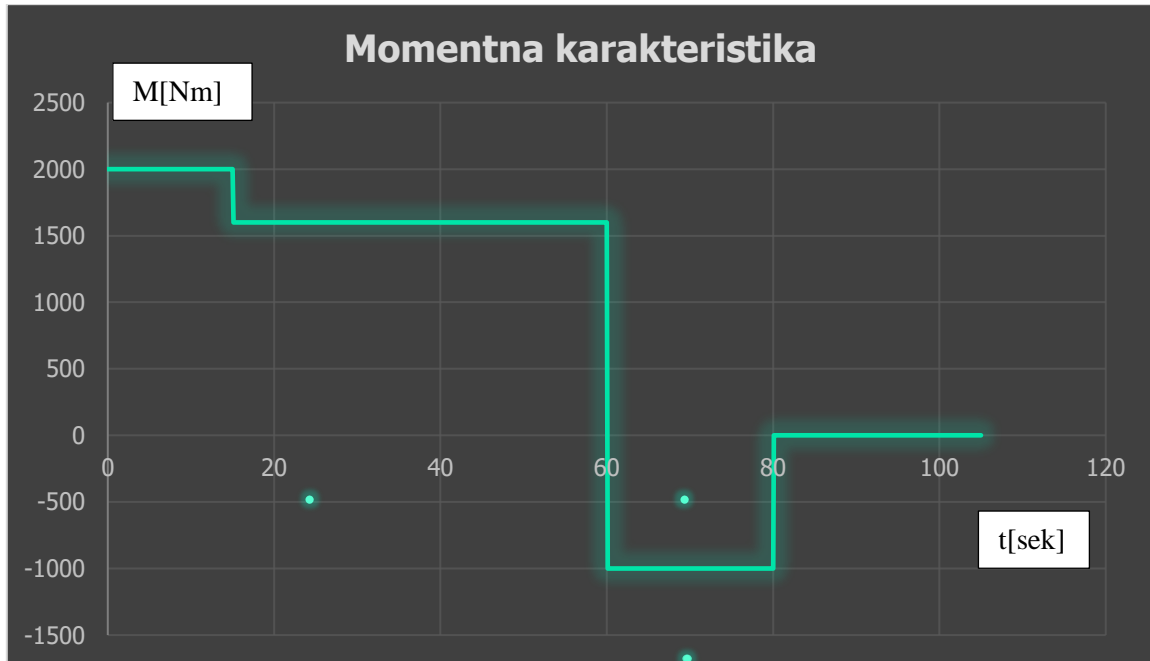
Tablica 2.2 – Dimenzioniranje pogona za izvlačenje materijala

Vrijeme t [sek]	0	15	60	80	105
Moment M [Nm]	2.000	1.600	-1.000	0	0
Broj okretaja n [okr/min]	0	1.000	1.000	0	0

Potrebno je odrediti ekvivalentnu snagu pogona P_{ekv} za izvlačenje materijala iz rudnika.

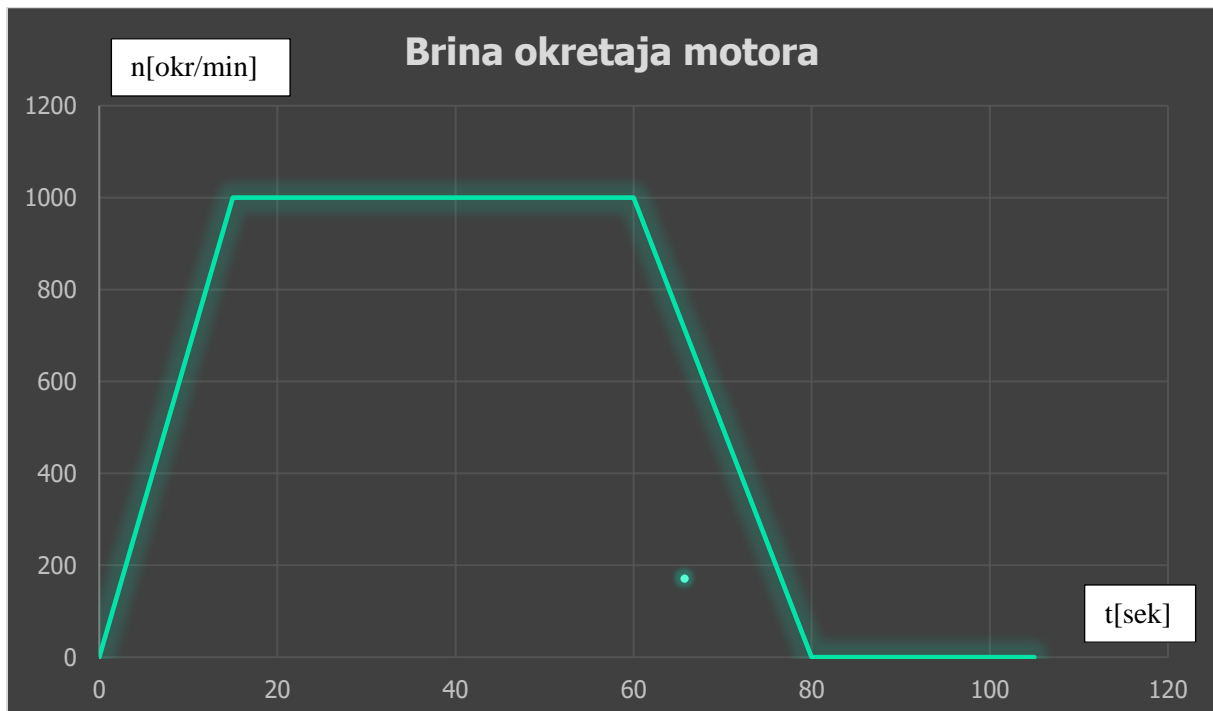
Rješenje:

Na temelju Tablice 2.2 potrebno je odrediti momentnu karakteristiku ciklusa i broj okretaja stroja u ciklusu. Momentna karakteristika prikazana je na slici 2.63 a).



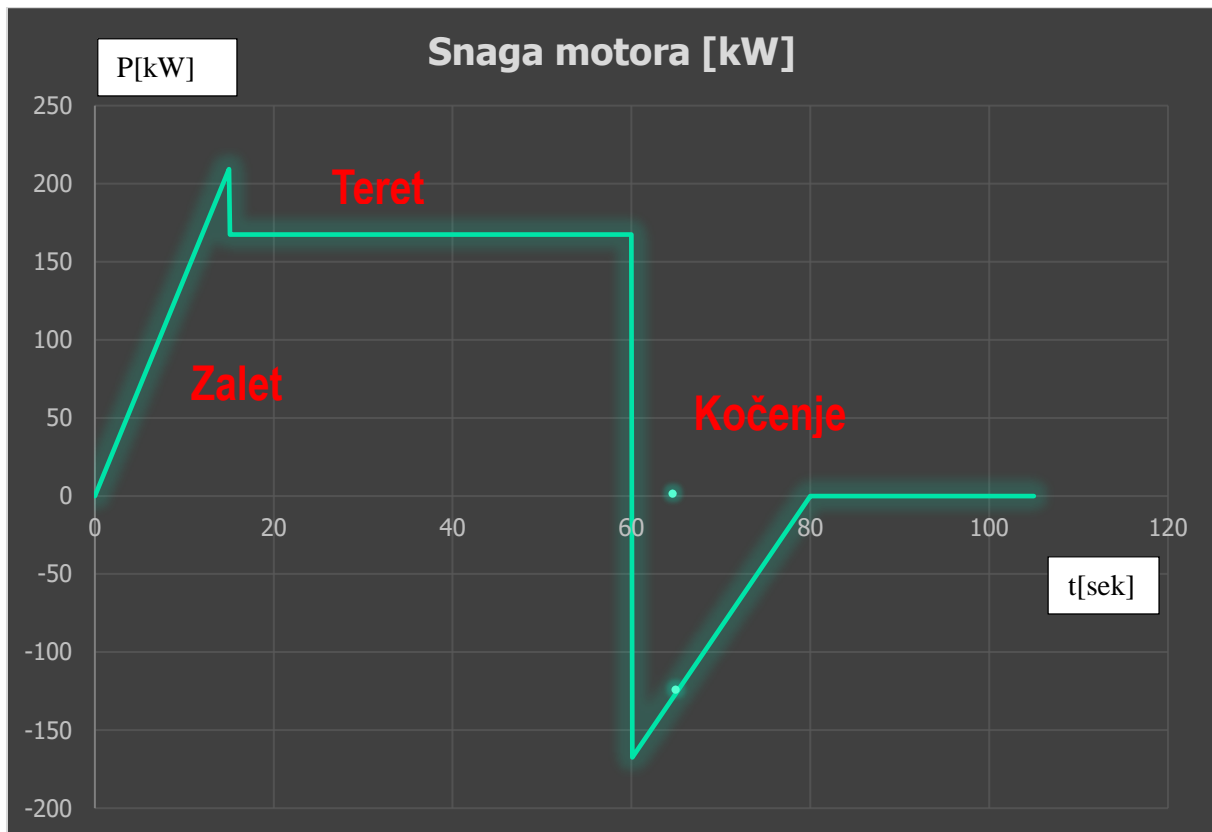
Sl. 2.63 a) – Momentna karakteristika pogona

Na slici 2.63 b) prikazan je broj okretaja u ciklusu.



Sl. 2.63 b) – Broj okretaja u ciklusu

Slijedom prethodnih dijagrama, snaga pogona u ciklusu prikazana je na slici 2.63 c)



Sl. 2.63 c) – Snaga pogona u ciklusima

Ekvivalentni moment M_{ekv} račina se na sljedeći način:

$$M_{ekv} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{M_i^2 \cdot t_i}{t_c}}$$

gdje je:

t_c – trajanje ciklusa [sek]

Sukladno Tablici 2.2 vrijedi:

$$M_{ek} = \sqrt{\frac{2.000^2 \cdot 15 + 1.600^2 \cdot 45 + 1.000^2 \cdot 20}{105}} = 1.363,47 \text{ Nm}$$

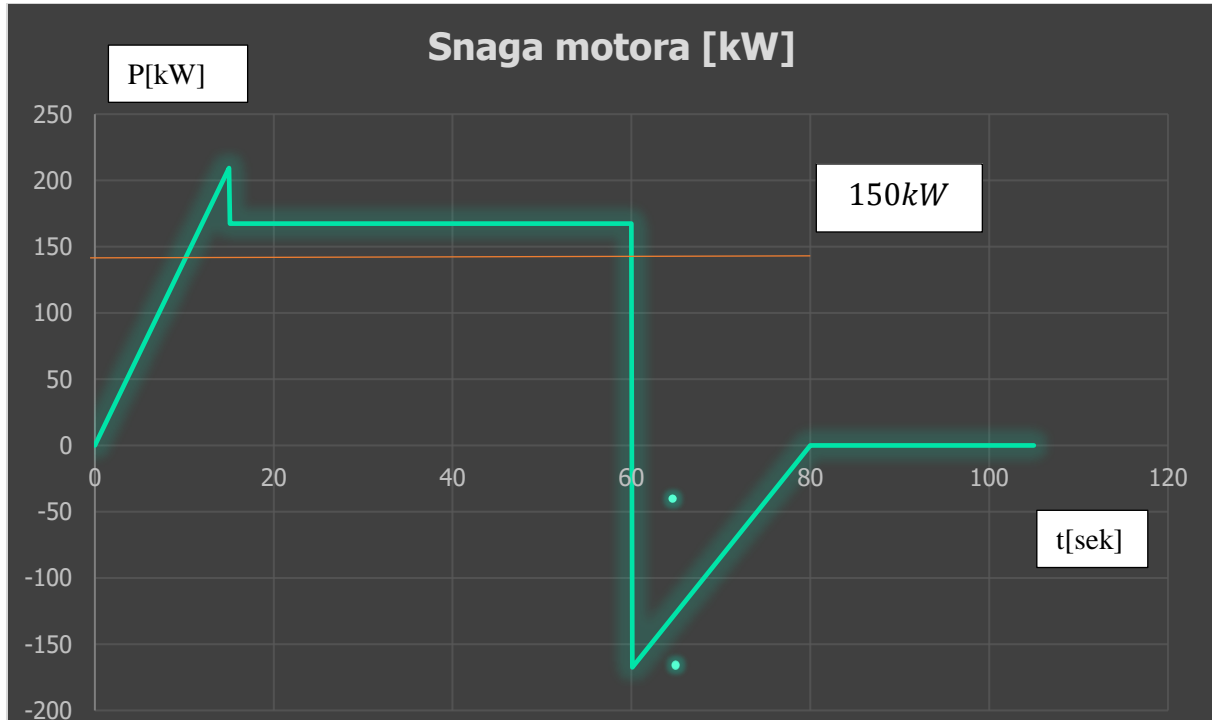
Ekvivalentna snaga P_{ekv} iznosila bi:

$$P_{ekv} = M_{ekv} \cdot \omega = M_{ekv} \cdot n \cdot \frac{\pi}{30} = 1.364,47 \cdot 1.000 \cdot \frac{\pi}{30} = 142709,86 \text{ W} \cong 142,71 \text{ kW}$$

Zaokružujemo na prvu višu snagu, stoga vrijedi:

$$P_{ekv} = 150kW$$

Grafički rezultata prikazan je na slici 2.63 d).



Sl. 2.63 d) – Ekvivalentna snaga pogona za izvlačenje materijala iz rudnika

Prema tome, potrebna snaga pogona za izvlačenje materijala iz rudnika iznosi 150kW.

2.5 Zagrijavanje i termička zaštita stroja

Strojevi imaju dijelove koji se zagrijavaju. To su najčešće metalni dijelovi, oklop motora i sl., provodnici struje, izolacija namotaja i zrak koji struji kroz stroj. Kritični dijelovi stroja uslijed zagrijavanja su svakako izolacija namotaja i izolacija kolektora kod istosmjernih motora. Izolacija namotaja se termički napreže usled zagrijavanja namotaja i uslijed djelovanja elektromagnetnih sila.

Zagrijavanje stroja ima direktan utjecaj na snagu stroja, koeficijent iskoristivosti bit će niži (manja učinkovitost pogona), smanjuje se vijek trajanja izolacije, radna temperatura pogona postaje niža (manja izdržljivost), izolacijski materijal stari i razlaže se pod utjecajem zagrijavanja i pogon postaje nestabilan. Tako npr. za svakih 8°C povišenja radne temperature vijek trajanja stroja smanjuje se na polovinu.

Klasa temperaturne izolacije namotaja stroja definirana je na temelju međunarodnog IEC standarda. Apsolutna temperatura ϑ_{aps} računa se prema sljedećoj relaciji:

$$\vartheta_{aps} = \vartheta_a + \vartheta_{doz}$$

gdje je:

$$\vartheta_a - \text{temperatura ambijenta [}^\circ\text{C]}$$

Proračunska (nazivna) temperatura ambijenta iznosi $\vartheta_a = 40^\circ$ prema IEC-u (međunarodna norma). U Tablici 2.3 prikazane su temperaturne klase, dozvoljeni porast temperature i vrsta izolacijskog materijala.

Tablica 2.3 – Klasa izolacije namota stroja [IEC standard]

Klasa izolacije	Y	A	E	B	F	H	C
Dozvoljeni porast temperature ϑ_{doz} [°C]	90	105	120	130	150	180	>180
Izolacijski materijal	pamuk, papir, PVC	folije, papir impregnirani	lak	tinjac + impregnant B klase	anorganski + lakovi F klase	anorganski + silikoni	čisti anorganski

Model zagrijavanja stroja može se definirati sljedećom relacijom:

$$Q_{str} = Q_{ok} + Q_{ak}$$

gdje je:

$$Q_{str} - \text{toplina razvijena u stroju [Ws]}$$

$$Q_{ok} - \text{toplina okoline [Ws]}$$

$$Q_{ak} - \text{toplina akumulirana u stroju [Ws]}$$

Diferencijalna jednadžba gubitaka snage uslijed zagrijavanja stroja bila bi sljedeća:

$$P_g = m \cdot c \cdot \dot{\vartheta} + s \cdot h \cdot \vartheta$$

gdje su:

$$P_g - \text{gubici snage stroja koji se zagrijava [W]}$$

$$\vartheta - \text{temperatura [}^\circ\text{C]}$$

$$m - \text{masa dijelova stroja koji se griju [kg]}$$

$$c - \text{specifična toplota materijala stroja [} \text{Ws/kg}^\circ\text{C]}$$

$$s - \text{rashladna površina stroja [m}^2\text{]}$$

$$h - \text{koeficijent prijelaza topline na okolinu [} \text{W/m}^2\text{}^\circ\text{C]}$$

Diferencijalna jednačina može se transformirati u sljedeći oblik:

$$\dot{\vartheta} + \frac{s \cdot h}{m \cdot c} \cdot \vartheta = \frac{P_g}{m \cdot c}$$

Odnosno:

$$\dot{\vartheta} + \frac{1}{T_z} \cdot \vartheta = \vartheta_s$$

gdje je:

$$T_z = \frac{s \cdot h}{m \cdot c} - \text{vremenska konstanta zagrijavanja [sek]}$$

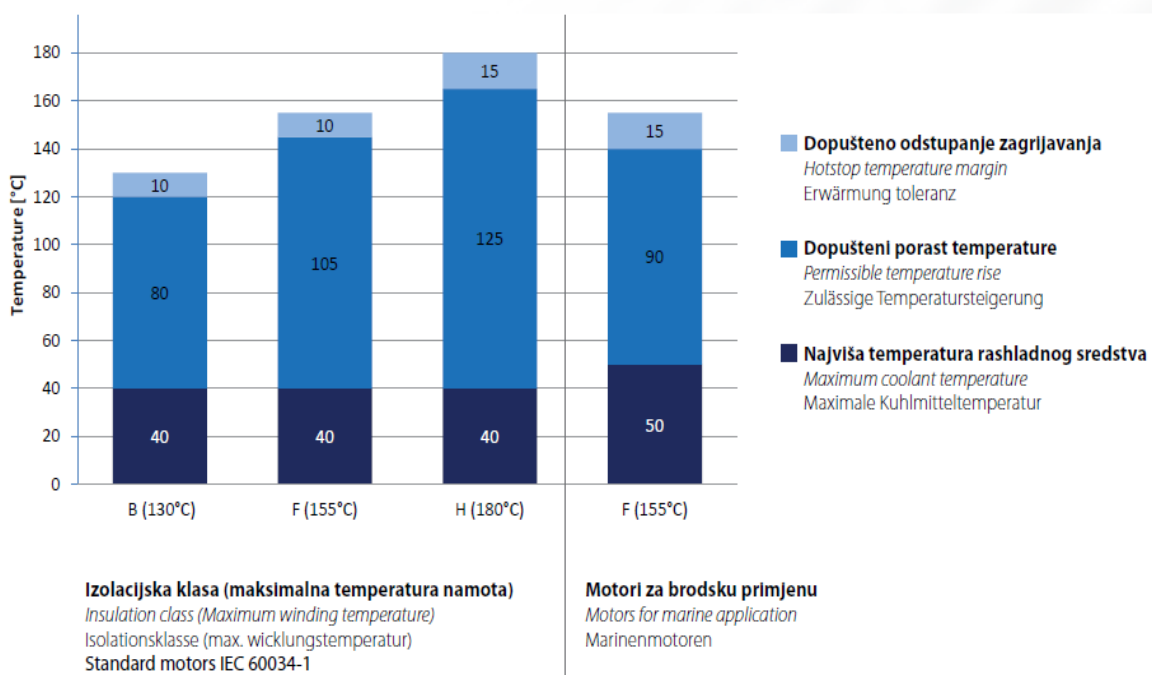
$$\vartheta_s = \frac{P_g}{m \cdot c} - \text{temperatura stacionarnog stanja [°C]}$$

Ako je temperatura početnog stanja zagrijavanja jednaka $\vartheta = \vartheta_0^z$ onda je rješenje diferencijalne jednačine sljedeće:

$$\vartheta(t) = \vartheta_s - (\vartheta_s - \vartheta_0) \cdot e^{-\frac{t}{T_z}}$$

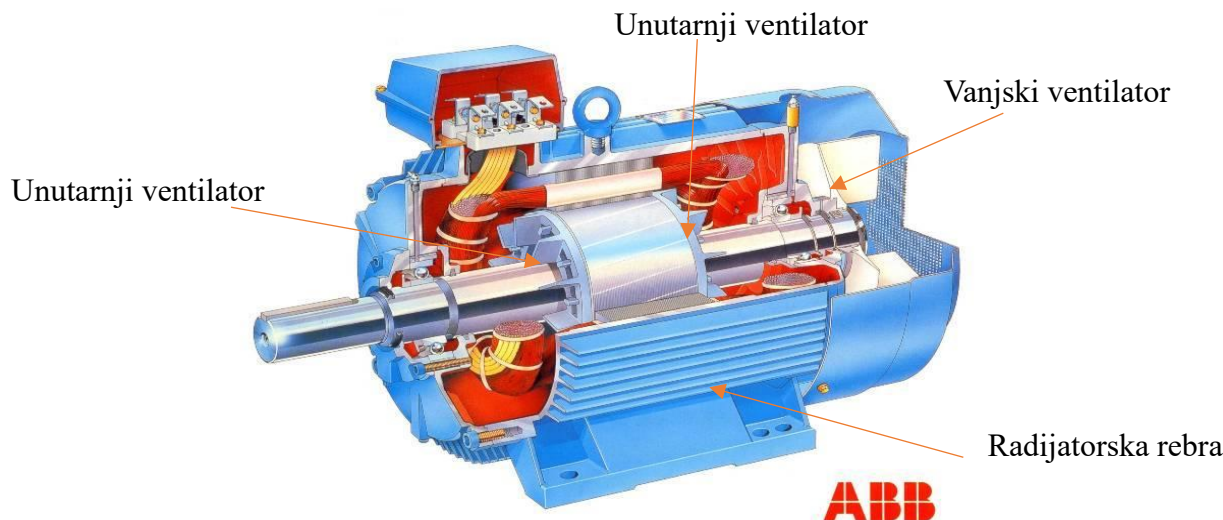
Nazivna (nominalna) snaga stroja P_n je ona snaga stroja pri kojoj je ostavljen dozvoljeni porast temperature ϑ_{doz} . Jednosatna snaga stroja je nazivna snaga stroja pri kojoj je se maksimalni porast temperature dostiže za jedan sat rada stroja, dok je preopterećenost stroja tj. sposobnost preopterećenja po snazi, mometu ili struji moguća samo u kratkom vremenskom razdoblju, ali tako da se ne prekorači dozvoljeni porast temperature.

Na slici 2.64 prikazan je primjer iz kataloga „Končar“ vezan za dopušteno odstupanje zagrijavanja i dopušten porast temperature, kao i najviše temperatura rashladnog sredstva.



Sl. 2.64 – Dopuštene temperature stroja (zagrijavanje i hlađenje) [katalog „Končar“]

Na slici 2.65 prikazan je asinhroni kavezni stroja proizvođača „ABB“ na kojem uočavamo djelove vlastitog hlađenja.



Sl. 2.65 – Vlastito hlađenje asinhronog kaveznog stroja⁷

Osim hlađenja zračnom strujom, kako je prikazano na slici 2.65, postoji još prisilno hlađenje stroja i to prisilnim zračnim hlađenjem i prisilnim hlađenjem uz pomoć vode, ili hlađenje ubrizgavanjem ulja. Jednadžba hlađenja stroja bila bi sljedeća:

$$\vartheta(t) = \vartheta_0^H \cdot e^{-\frac{t}{T_H}}$$

gdje je:

ϑ_0^H – početna temperatura hlađenja [°C]

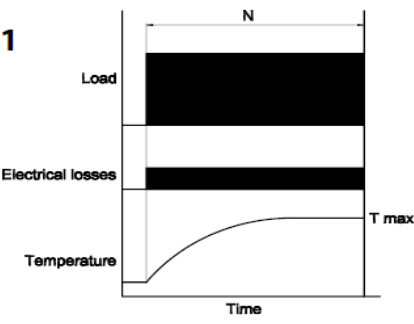
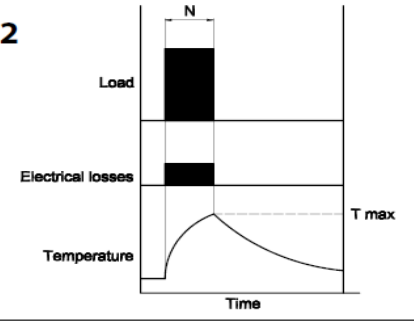
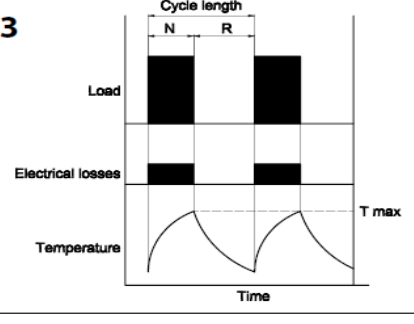
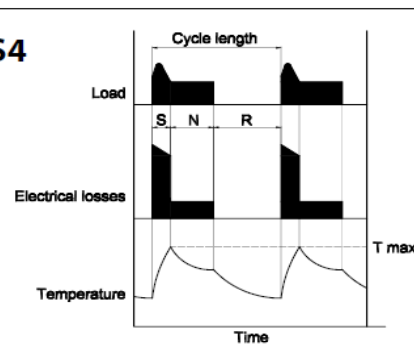
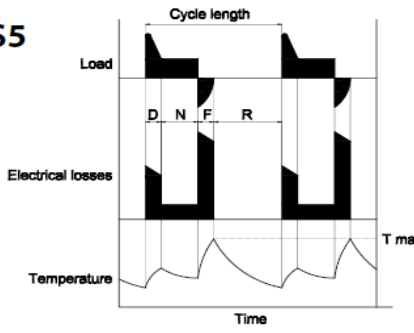
T_H – vremenska konstanta hlađenja [sek]

Sukladno IEC standaradu, a vezano za zagrijvanje i hlađenje stroja, razlikujemo sljedeće tipove pogona.

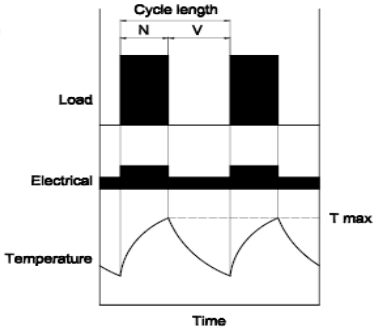
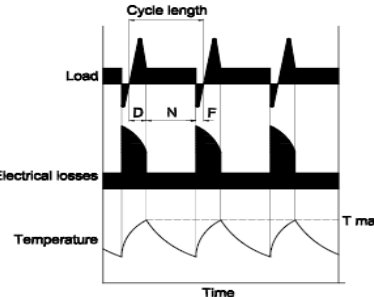
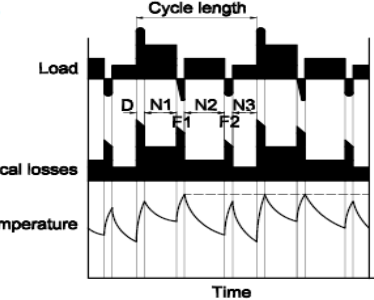
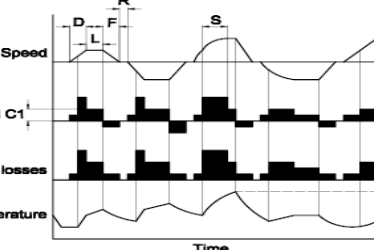
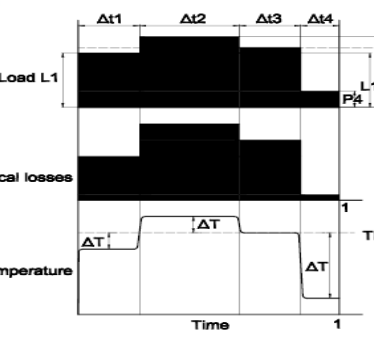
- S1 – Trajni pogon
- S2 – Kratkotrajni pogon
- S3 – Intermitentni periodični pogon
- S4 – Intermitentni periodični pogon sa uticajem zaletanja
- S5 - Intermitentni periodični pogon sa uticajem zaletanja i električnog kočenja
- S6 – Trajni periodični pogon (nema perioda mirovanja i beznaponskog stanja)
- S7 – Trajni periodični pogon sa uticajem zaletanja i električnog kočenja
- S8 – Trajni periodični pogon sa međusobno zavisnim promenama opterećenja i brzine
- S9 – Pogon sa neperiodičnim promenama opterećenja i brzine
- S10 – Pogon sa unapred određenim stalnim opterećenjima i brzinama

⁷ <https://docplayer.gr/docs-images/67/57193766/images/10-0.jpg>, pristupljeno: 22.08.2021

Isti su grafički prikazani i opisani na na sljedećim slikama 2.66 a) i b).

<p>S1</p> 	<p>Trajni pogon</p> <p>Rad pod konstantnim opterećenjem. Stroj se zagrije do maksimalne temperature, koja tada postaje trajnom konačnom temperaturom.</p>	<p>Continuous duty</p> <p><i>Operating under constant load. Machine is warmed up to maximum temperature, which then becomes permanent end temperature.</i></p>
<p>S2</p> 	<p>Kratkotrajni pogon</p> <p>Kratkotrajni pogon gdje se konačna temperatura ne postiže. Pauza koja slijedi dovoljna je za ohlađivanje.</p>	<p>Short-time duty cycle</p> <p><i>Short-time duty cycle where end temperature is not reached. The following interval is enough for cooling.</i></p>
<p>S3</p> 	<p>Isprekidan pogon bez utjecaja zaleta</p> <p>Pogon je sastavljen od niza istovrsnih ciklusa koji se sastoje od pogona s konstantnim opterećenjem i mirovanja.</p>	<p>Intermittent duty cycle not under influence of starting</p> <p><i>Duty cycle is composed of uniform series of cycles that consist of constant load duty and a standstill.</i></p>
<p>S4</p> 	<p>Isprekidan pogon s utjecajem zaleta</p> <p>Pogon je sastavljen od niza istovrsnih ciklusa koji se sastoje od vremena zaleta, pogona s konstantnim opterećenjem i mirovanja.</p>	<p>Intermittent duty cycle under influence of starting</p> <p><i>Duty cycle is composed of uniform series of cycles which consist of starting time, constant load duty and a standstill.</i></p>
<p>S5</p> 	<p>Isprekidan pogon s utjecajem zaleta i električnog kočenja</p> <p>Istovrsni ciklusi sastoje se od vremena zaleta, vremena s konstantnim teretom i vremena kočenja.</p>	<p>Intermittent duty cycle under influence of starting and electrical braking</p> <p><i>Uniform cycles consisting of starting time, constant load time and braking time.</i></p>

Sl. 2.66 a) – Tipovi pogona S1 do S5 sukladno IEC standardu [katalog „Končar“]

<p>S6</p> 	<p>Trajni pogon s isprekidanim opterećenjem</p> <p>Istovrsni ciklusi sastoje se od vremena s konstantnim opterećenjem i vremena praznog hoda.</p>	<p><i>Continuous duty cycle with intermittent load</i></p> <p><i>Uniform duty cycles consisting of constant load time and idling (no load time).</i></p>
<p>S7</p> 	<p>Neprekidni pogon sa zaletom i električnim kočenjem</p> <p>Istovrsni ciklusi sastoje se od vremena zaleta pogona s konstantnim opterećenjem i vremena kočenja.</p>	<p><i>Continuous duty cycle with starting and electrical braking</i></p> <p><i>Uniform duty cycles consisting of starting time, constant load time, and braking time.</i></p>
<p>S8</p> 	<p>Neprekidni pogon s periodičkom promjenom brzine vrtnje</p> <p>Svaki ciklus sadrži vrijeme s konstantnim opterećenjem i određenom brzinom vrtnje, zatim jedno ili više vremena s drugim opterećenjem kojima odgovaraju različite brzine vrtnje.</p>	<p><i>Continuous duty cycle with periodical change of revolving speed</i></p> <p><i>Each duty cycle includes time with constant load and determined revolving speed, than one or more times with different loads which match different revolving speeds.</i></p>
<p>S9</p> 	<p>Isprekidan pogon s neperiodičkim promjenama opterećenja i brzine</p> <p>Pogon je sastavljen od niza neperiodičkih ciklusa, gdje je promjenjivo opterećenje i brzina. Karakterističan pogon preko frekvencijskog pretvarača.</p>	<p><i>Intermittent duty cycle with non-periodical changes of load and revolving speed</i></p> <p><i>Duty cycle is consisting of series of non-periodical cycles, with changable load and revolving speed. Characteristic duty cycle for drive through frequency inverter.</i></p>
<p>S10</p> 	<p>Trajni pogon s karakterističnim promjenjivim opterećenjem</p> <p>Kontinuiran rad s promjenjivim opterećenjem. Pogon je sastavljen od niza ciklusa promjenjivog vremena opterećenja. Stroj se zagrijava na različite temperature ovisne o opterećenju. Pogon sadrži maksimalno 4 karakteristične vrijednosti opterećenja u dovoljnom trajanju da se dosegne termička ravnoteža stroja. Minimalno opterećenje tijekom radnog ciklusa može biti 0, tj. bez opterećenja.</p>	<p><i>Continuous duty cycle with characteristic changeable load</i></p> <p><i>Continuous operation with changeable load. Duty cycle consists of series of changeable load timecycles. Machine is warmed up to different temperatures, depending on load. Duty cycles have max. 4 characteristic load values long enough to reach thermal machine balance. Minimal load during working cycle can be 0, i.e. with no load at all.</i></p>

Sl. 2.66 b) – Tipovi pogona S6 do S10 sukladno IEC standardu [katalog „Končar“]

3. UPRAVLJAČKE KARAKTERISTIKE I AUTOMATSKA REGULACIJA

Upravljanje i regulacija brojem okretaja stroja jedna je od važnih zadaća ispravnog rada stroja. Koristeći znanja iz automatskog upravljanja i regulacije, na primjeru istosmjernog i izmjeničnog stroja odredit će se upravljačke karakteristike i objasniti principi automatske regulacije.

3.1 Upravljačka karakteristika istosmjernog stroja

Način na koji se može mijenjati kutna brzina ω istosmjernog stroja pokazuje sljedeća relacija:

$$\omega = \frac{U_m - I_a \cdot R_a}{k_e \cdot \Phi}$$

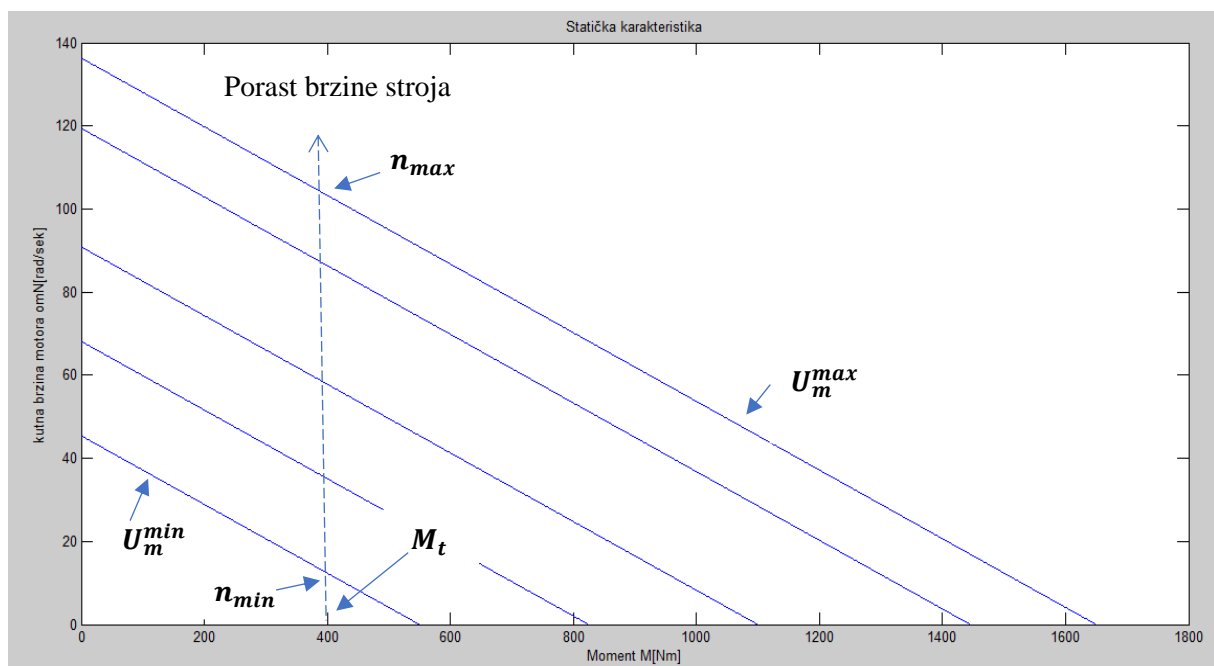
Prema tome, brzina vrtnje istosmjernog stroja može se mijenjati promjenom napona napajanja U_m , promjenom otpora armature rotora R_a i promjenom magnetskog toka rotora Φ , pri čemu struja armature I_a ovisi o momentu teretu M_t . Magnetski tok ω može se samo smanjiti i to samo slučaju kada se stator magnetizira strujom I_s i vrijedi relacija:

$$\Phi = k_\Phi \cdot I_s$$

gdje je: k_e – konstanta motora [Vs]

k_Φ – konstanta magnetizacije statora [Wb/A]

Sličan princip vrijedi i za asinhroni stroj (kasnije više o tome). Na slici 3.1 a) prikazana je promjena napona napajanja U_m , a koja za posljedicu ima promjenu kutne brzine stroja ω pri konstantnom momentu opterećenja M_t odnosno brzine vrtnje stroja $n = \frac{30}{\pi} \cdot \omega$.



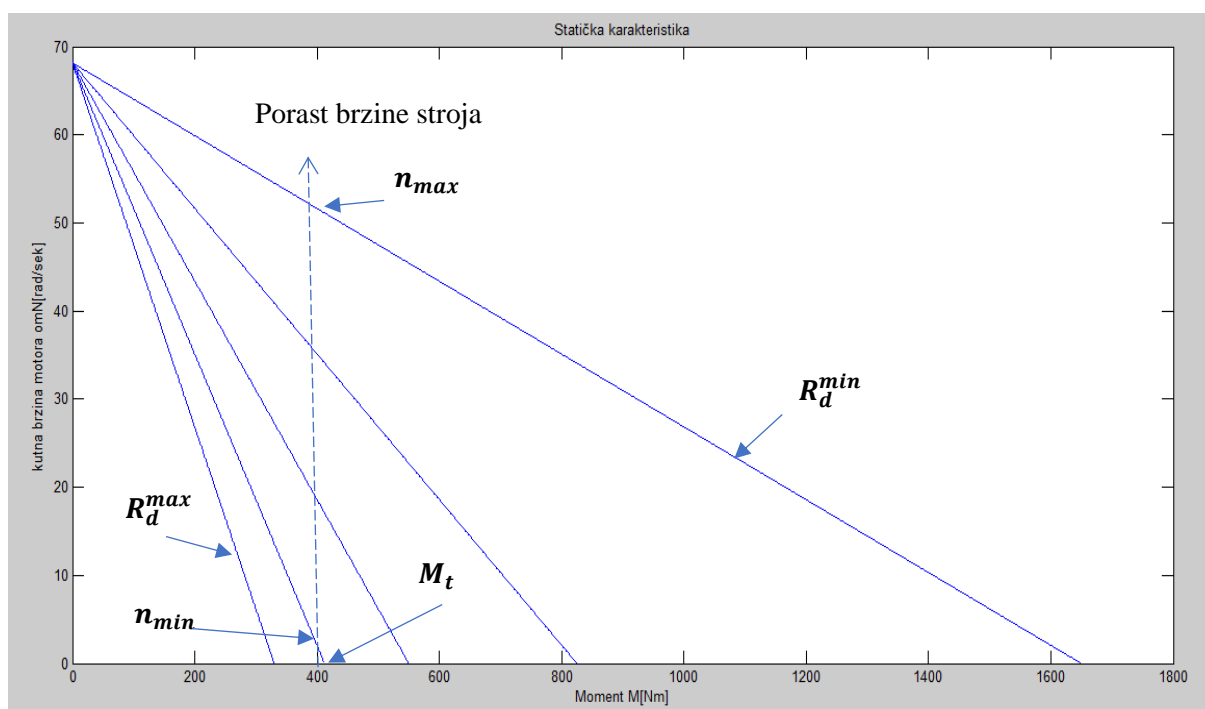
Sl. 3.1 a) – Upravljanje brzinom istosmjernog stroja putem napona

Bitno je naglasiti kako se povećanjem napona motora U_m mijenja samo brzina n dok struja potrošnje I_n ostaje ista jer se ne mijenja moment terta stroja M_t .

U slučaju otpora armature R_a , kako je već bilo naglašeno kod kočenja, u krug aramature dodaje se promjenljivi otpor R_d tako da vrijedi relacija:

$$\omega = \frac{U_m - I_a \cdot (R_a + R_d)}{k_e \cdot \Phi}$$

Na slici 3.1 b) prikazana je promjena otpora R_d koja za posljedicu ima promjenu brzine vrtnje stroja n pri istom momentu opterećenja M_t .



Sl. 3.1 b) - Upravljanje brzinom vrtnje istosmjernog stroja putem otpora armature

I ovdje je bitno naglasiti kako se struja potrošnje I_n ne mijenja i proporcionalna je momentu teretu M_t .

U slučaju promjene magnetskog toka statora Φ vrijedi sljedeća relacija:

$$\omega = \frac{U_m - I_a \cdot R_a}{k_e \cdot \Phi} = \frac{U_m - I_a \cdot R_a}{k_e \cdot k_\Phi \cdot I_s}$$

No u ovom slučaju struja potrošnje I_n nije uvijek ista tj. moment motora nije konstantan već je konstantna snaga stroja P_n .

Tada vrijedi da je:

$$P_n = M_n \cdot \omega_n = \text{const.}$$

Odnosno brzina n je obrnuto proporcionalna momentu M :

$$n \sim \frac{1}{M}$$

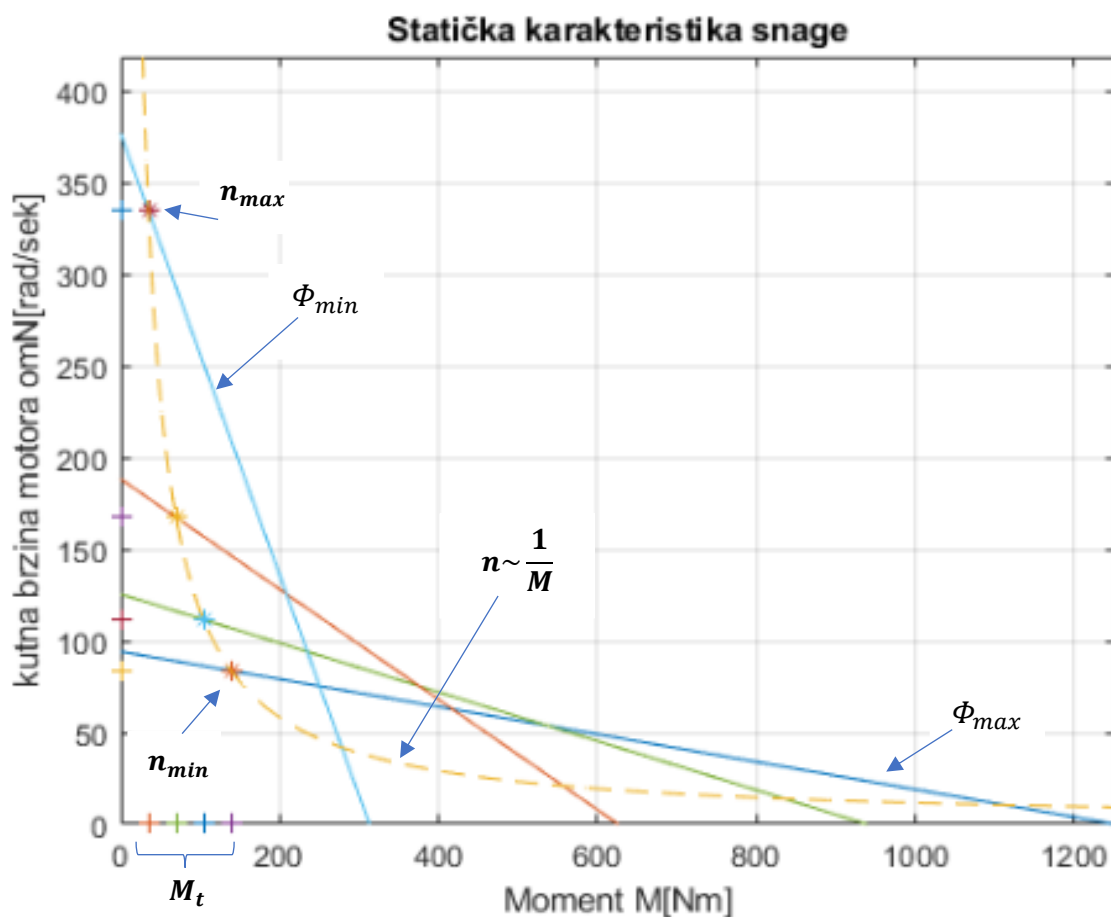
U tom slučaju koristimo se relacijom:

$$\omega = -\frac{R_a}{k^2} \cdot M_t + \frac{U_m}{k} = -\frac{R_a}{k_m \cdot k_e \cdot \Phi^2} \cdot M_t + \frac{U_m}{k_e \cdot \Phi}$$

gdje vrijedi da je:

$$\Phi = k_\Phi \cdot I_s$$

Na slici 3.1 c) prikazana je promjena magnetskog toka od Φ_{max} prema Φ_{min} koja za posljedice ima promjenu brzine vrtnje stroja n pri istoj snazi stroja P_n .

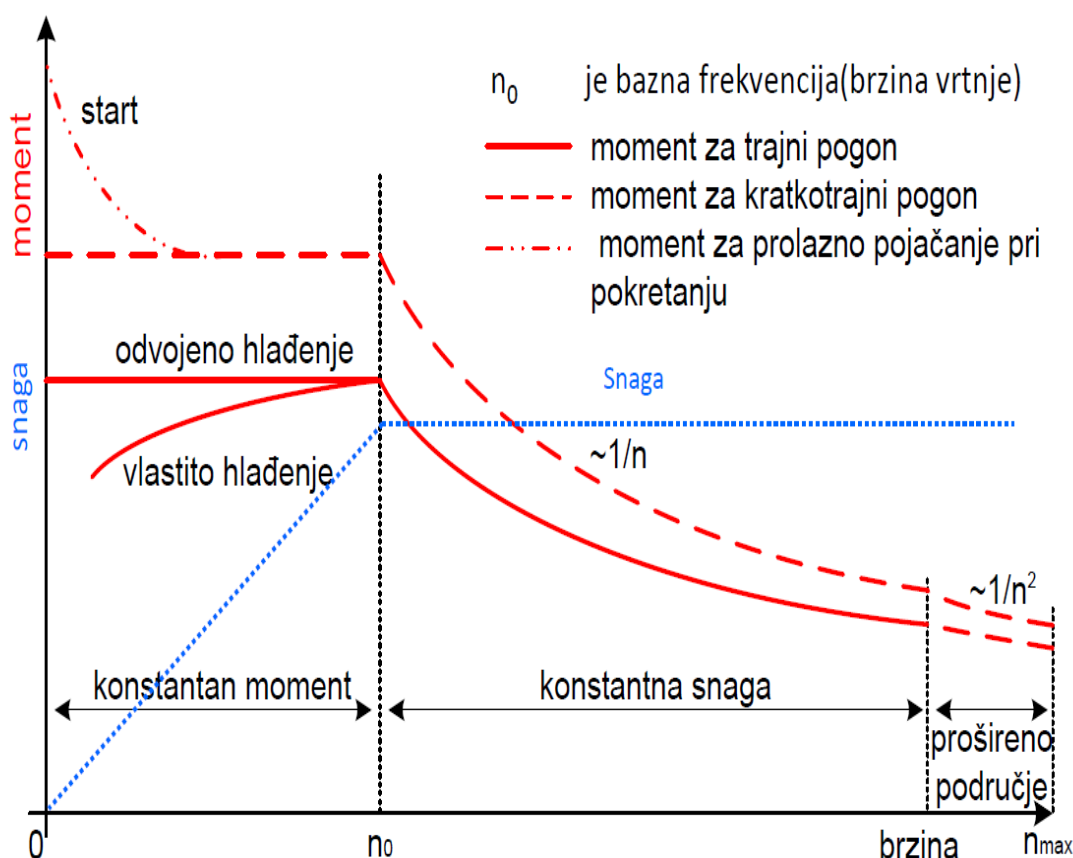


Sl. 3.1 c) - Upravljanje brzinom vrtnje istosmjernog stroja putem magnetskog toka statora

Prema tome, prisutna su dva temeljna načina upravljanja i to: upravljanje promjenom napona stroja U_m i upravljanje promjenom magnetskog toka stroja Φ , odnosno kombinacija spomenuta dva principa. U prvom slučaju govori se o području konstantnog momenta $M_n = const.$, dok se u drugom govori o području konstantne snage $P_n = const.$

3.2 Upravljačka karakteristika izmjeničnog (asinhronog) stroja

Na slici 3.2 prikazan je princip upravlja brzinom vrtnje n asinhronog kaveznog stroja sukladno IEC standardu.

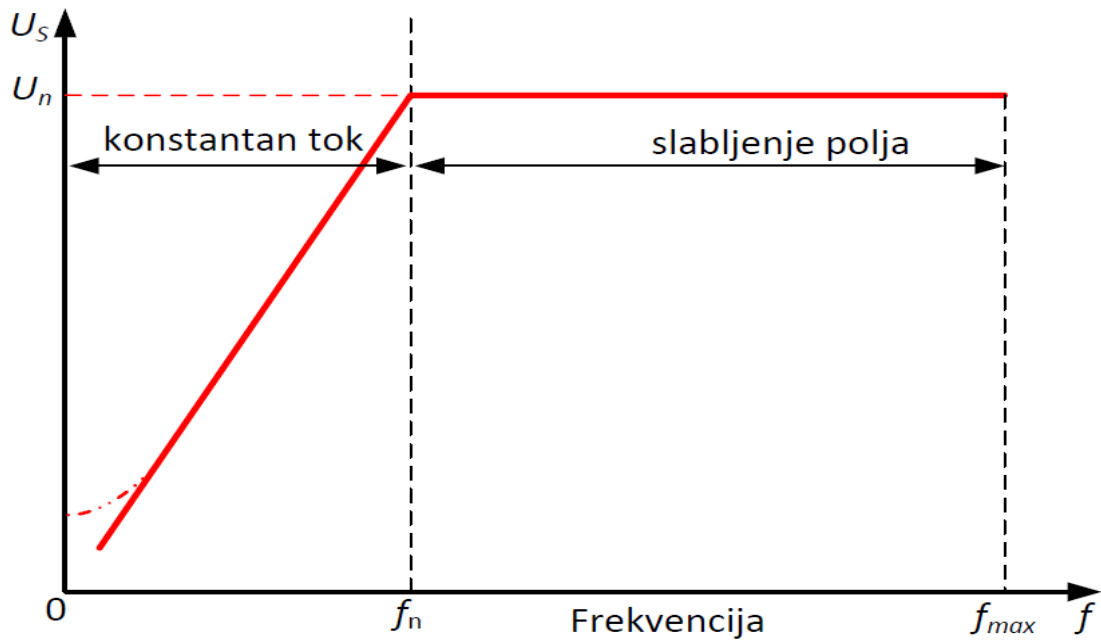


Sl. 3.2 – Upravljanje brzinom vrtnje asinhronog kaveznog stroja sukladno IEC standardu

[Izvor: FER - ZESA]

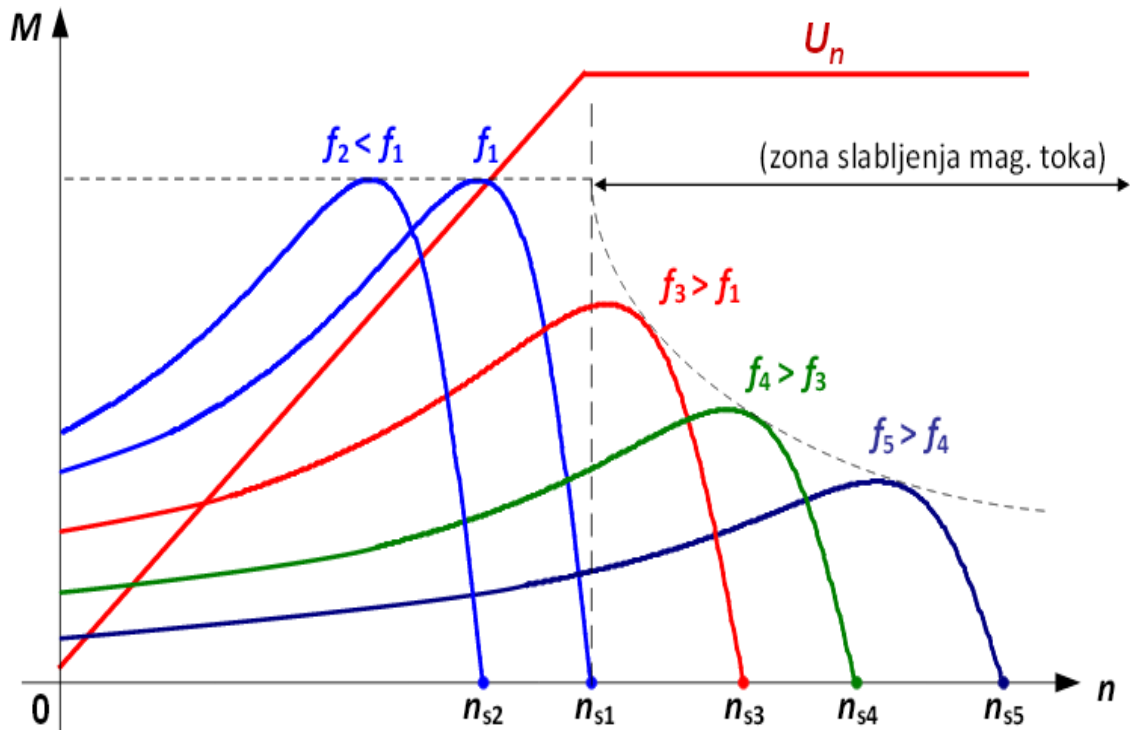
Kako je vidljivo sa slike 3.2 promjena napona U_m koristi se za upravljanje brzinom vrtnje do nazivnog iznosa brzine n_0 , a uzbuda Φ je pri tome konstantna $\Phi = \Phi_{max}$. Promjena magnetskog (uzbudnog) toka Φ koristi se za upravljanje brzinom vrtnje iznad nazivnog iznosa tj. $n > n_0$ pri čemu je napon U_m konstantan i ima nazivni iznos $U_m = U_n$.

Princip upravljanja i upravljačka karakteristika prikazano na slici 3.3 na kojoj uočavamo konstantan tok do nazivne frekvencije mreže f_n i slabljenje polja do maksimalne frekvencije f_{max} , pri čemu napon statora U_s raste do nazivne vrijednosti U_n , nakon čega je konstantan.

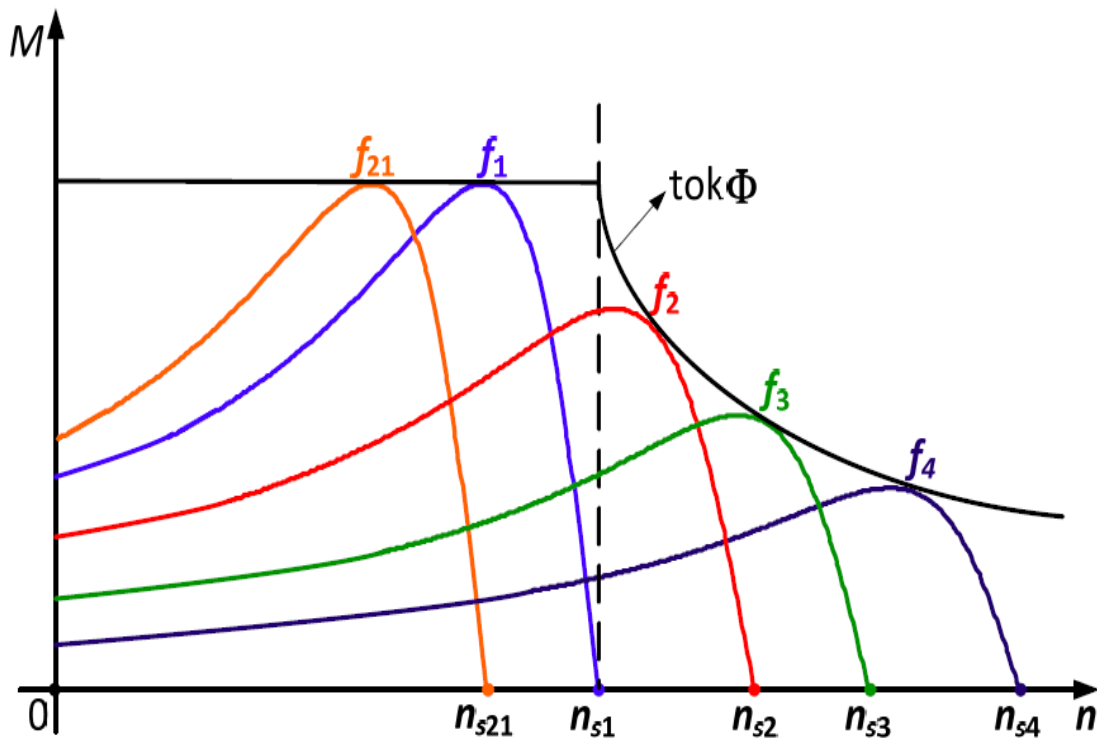


Sl. 3.3 – Karakteristika upravljanja asinhronog stroja [Izvor: FER - ZESA]

Na slikama 3.4 a i b) prikazane su statičke karakteristike asinhronog kaveznog stroja u slučaju kombiniranog upravljanja strojem pomoću napona i magnetskog toka.



Sl. 3.4 a) – Kombinirano upravljanje asinhronim strojem (napon i magnetski tok) [Izvor: FER - ZESA]



Sl. 3.4 b) – Kombinirano upravljanje asinhronim strojem (magnetski tok) [Izvor: FER - ZESA]

Primjer br. 17

Zadani su sljedeći parametri asinhronog kaveznog stroja: frekvencija mreže $f = 50\text{Hz}$, otpor statora $R_s = 0,36\Omega$, otpor rotora $R_r = 0,39\Omega$, imaginarni otpor statora $X_s = 39,95\Omega$, imaginarni otpor rotora $X_r = 40,16\Omega$ i imaginarni otpor međunidukcije $X_{MI} = 39\Omega$. Stroj je četverpolni (dva para polova).

Potrebno je odrediti karakteristiku kombiniranog upravljanja strojem do maksimalnog faznog napona od $U_{f-rms} = 380\text{V}$ i maksimalne frekvencije $f_{max} = 2 \cdot f_n = 100\text{Hz}$

Kako se s promjenom napona mijenja i frekvencija potrebno je odrediti vrijednosti induktivitet, koje iznose:

$$L_s = \frac{X_s}{2 \cdot \pi \cdot f} = \frac{39,95}{2 \cdot \pi \cdot 50} = 0,1272\text{H}$$

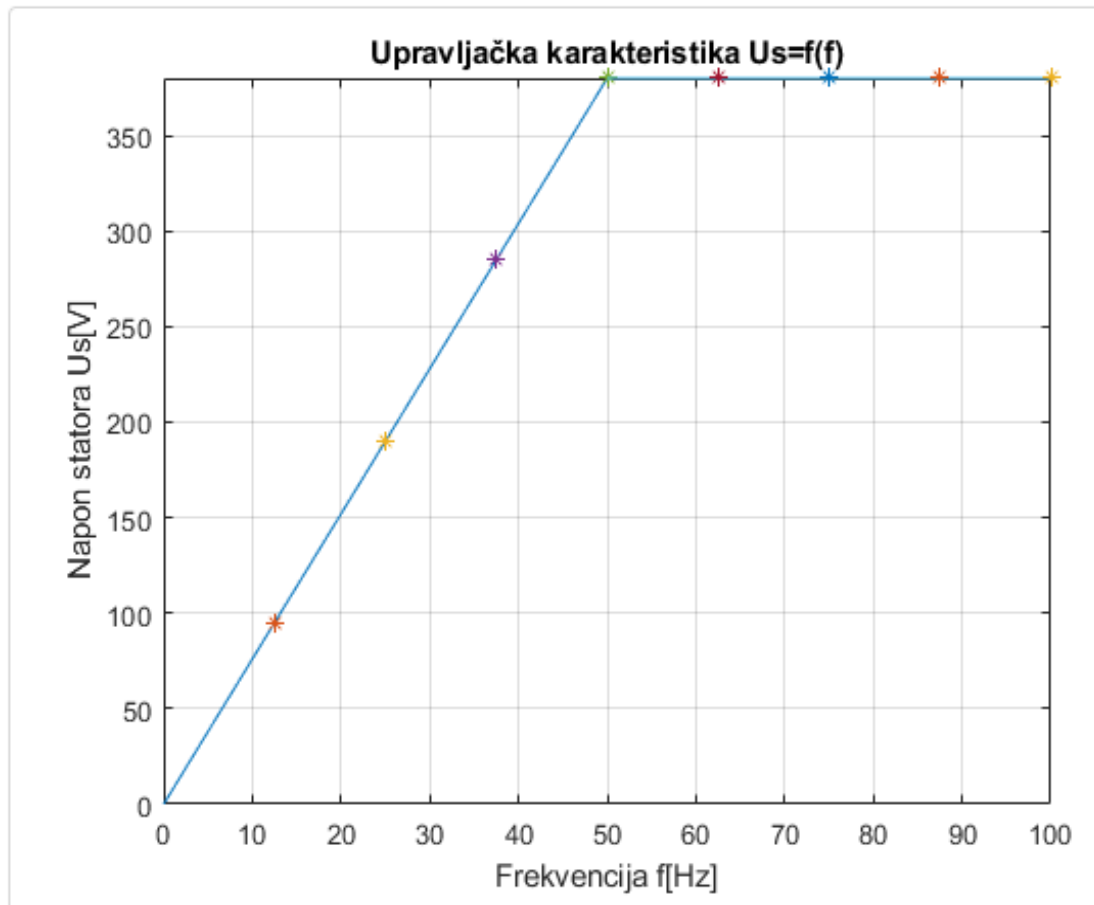
Slijedom navedenoga vrijedi $L_r = 0,1278\text{H}$ i $L_{MI} = 0,1241\text{H}$. U prvom koraku odredit će se naponska upravljačka karakteristika od 0 do 380V, a u drugom koraku statička karakteristika snage u području od 0 do 100Hz.

Rješenje (programska rutina u MatLab-u) je sljedeće:

a) Naponska upravljačka karakteristika

```
'Upravljačka karakteristika'  
'Zadano'  
Us=380 %Max. fazni napon mreže [V]  
fm=50 %Frekvencija mreže [Hz]  
  
'Rješenje';  
'1-Područje do fm';  
syms f  
U=Us/fm*f;  
fplot(U,[0 fm])  
hold on  
f1=fm*0.25;  
U1=Us*0.25;  
plot(f1,U1,'*')  
hold on  
f2=fm*0.5;  
U2=Us*0.5;  
plot(f2,U2,'*')  
hold on  
f3=fm*0.75;  
U3=Us*0.75;  
plot(f3,U3,'*')  
hold on  
f4=fm;  
U4=Us;  
plot(f4,U4,'*')  
hold on  
  
'2-Područje iznad fm';  
U=Us;  
fplot(U,[fm 2*fm])  
hold on  
plot(fm*1.25,Us,'*')  
hold on  
plot(fm*1.5,Us,'*')  
hold on  
plot(fm*1.75,Us,'*')  
hold on  
plot(fm*2,Us,'*')  
title('Upravljačka karakteristika Us=f(f)')  
xlabel('Frekvencija f[Hz]')  
ylabel('Napon statora Us[V]')  
grid on
```

Na temelju zadanih podataka, na slici 3.5 prikazana je upravljačka karakteristika asinhronog stroja.



Sl. 3.5 – Upravljačka karakteristika asinhronog stroja (napon)

b) Statička karakteristike snage

```
'Statička karakteristika asinhronog kaveznog stroja'
'Kombinirano upravljanje'
```

```
'Zadano'
```

```
Usf=380 %Max. fazni napon mreže [V]
fm=50 %Frekvencija mreže [Hz]
Rs=0.36 %Otpor rotora [Ω]
Rr=0.39 %Otpor statora [Ω]
p=2 %broj pari polova
Lr=0.1278 %Induktivitet rotor [H]
Lh=0.1241 %Međuinuktivitet [H]
Ls=0.1272 %Induktivitet statora [H]
```

```
'1-Područje do fm';
```

```
Us=Usf*0.25;
```

```
f=fm*0.25;
```

```
av0
```

```
hold on
```

```

Us=Usf*0.5;
f=fm*0.5;
av0
hold on
Us=Usf*0.75;
f=fm*0.75;
av0
hold on
Us=Usf;
f=fm;
av0
hold on

'2-Područje iznad fm';
Us=Usf;
f=fm*1.25;
av0
hold on
Us=Usf;
f=fm*1.5;
av0
hold on
Us=Usf;
f=50*1.75;
av0
hold on
Us=Usf;
f=fm*2;
av0
grid on

```

Podrutina av0

```

'Rješenje';
'1. Određujemo koeficijent rasipanja sigma';
sigma=1-Lh^2/(Ls*Lr);
'2. Određujemo prekretno klizanje';
sp=Rr/(2*pi*f*Lr*sigma);
'3. Određujemo prekretni moment Mp';
kp=3*p*(1-sigma)/(8*pi^2*sigma*Ls);
Mp=kp*(Us/f)^2;
'4. Određujemo zatezni (potezni) moment Mz';
Mz=Mp*2/(1/sp+sp);
'5. Određujemo sinhroni broj okretaja ns';
omegas=2*pi*f;
ns=omegas*30/pi;
'6. Određujemo brzinu okretaja prekretnog momenta Mp ';
np=ns/p*(1-sp);;
'7. Određujemo nazivno klizanje sn';
sn=sp*sigma^0.5;
'8. Određujemo nazivni moment Mn';
Mn=Mp*(2*sigma^0.5)/(1+sigma);

```

```

'9. Određujemo nazivni broj okretaja nn';
nn=ns/p*(1-sn);
'10. Određujemo zatezni moment Mz';
Mz=Mp*2/(1/sp+sp);
'11. Određujemo struju potrošnje In';
In=(Us/(2*pi*Lv*f))/sigma^0.5;
'12. Određujemo maksimalnu struju Imax';
Imax=Us/Rs;
'13. Određujemo struju I0';
I0=Us/(2*pi*Lv*f);
'14. Određujemo cos(fi)';
cosfi=(1-sigma)/(1+sigma);
'15. Ulazna snaga';
Pul=3*Us*In*cosfi;
'16. Izlazna snaga';
omn=nn*pi/30;
Pn=Mn*omn;
'17. Koeficijent iskoristivosti isk';
isk=Pn/Pul;
isk=1-sn;
'Crtanje statičke karakteristike';
syms x
h =matlabFunction(2*Mp/((1-x*p/ns)/sp+sp/(1-x*p/ns)));
fplot(h,[0 ns/p])
grid
title('Statička karakteristika M=M(n)')
xlabel('Brina okretajan n[okr/min]')
ylabel('Moment motora M[Nm]')
hold on
plot(nn,Mn, '*')
plot(nn,theta, '+')
hold off

```

Parametri

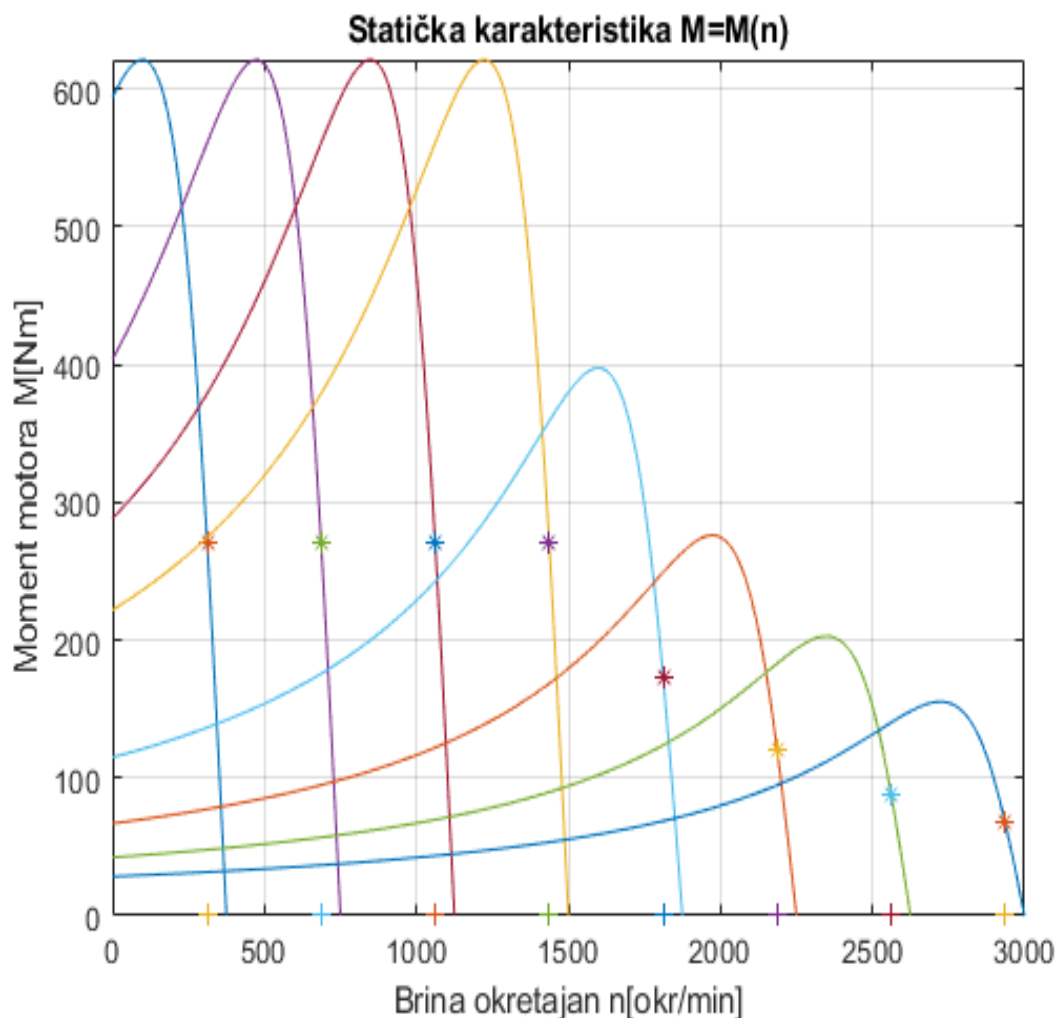
```

ans = 'Statička karakteristika asinhronog kaveznog stroja'
ans = 'Kombinirano upravljanje'

ans = 'Zadano'
Usf = 380
fm = 50
Rs = 0.3600
Rr = 0.3900
p = 2
Lv = 0.1278
Lh = 0.1241
Ls = 0.1272

```

Na slici 3.6 prikazane su statičke karakteristike snage u kombiniranom upravljanju asinhronim strojem (napon i magnetski tok), zvjezdicom je označen nazivni moment M_n i plusom je označen nazivni broj okretaja n_n .

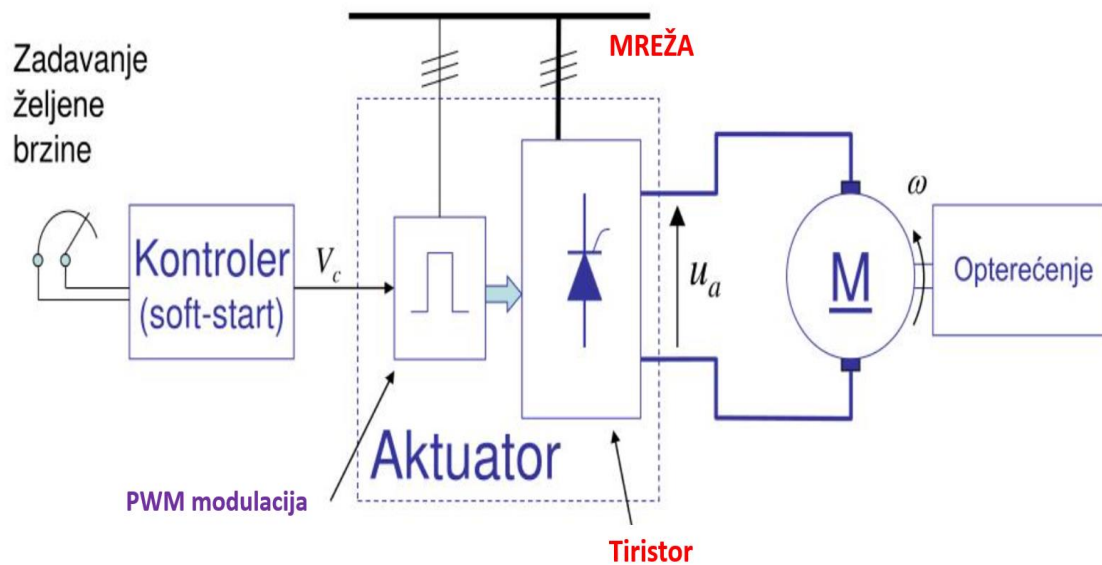


Sl. 3.6 – Statičke karakteristike snage u kombinirano upravljanje asinhronim strojem (napon i magnetski tok)

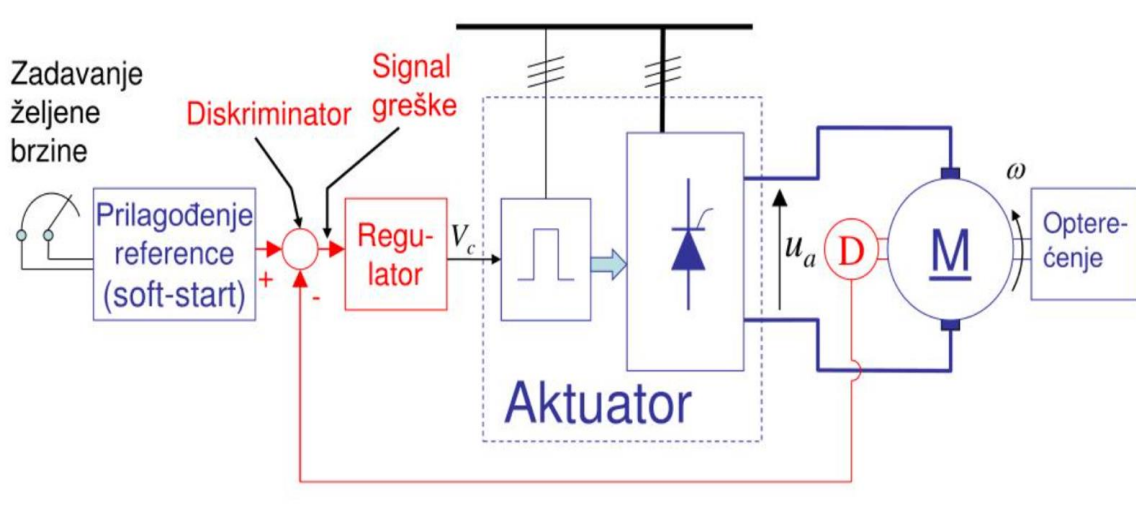
Na temelju prethodno određenih upravljačkih karakteristika istosmjernog i izmjeničnog (asinhronog) stroja, u nastavku će pozornost biti usmjerena na automatsku regulaciju pogona.

3.3 Automatska regulacija istosmjernog stroja

„Automatska regulacija“ podrazumijeva naprednije automatsko upravljanje koje se temelji na preciznom mjerenju fizikalnih veličina i preciznom djelovanju na analogne izvršne elemente (Actuatore). Upravljanje se obično ostvaruje u otvorenom sustavu, dok se regulacija ostvaruje u zatvorenom sustavu. Na slici 3.7 a) prikazan je otvoreni sustav upravljanja brzinom vrtnje stroja, dok je na slici 3.7 b) prikazan zatvoreni sustav regulacije brzine vrtnje stroja.



Sl. 3.7 a) – Otvoreni sustav upravljanja⁸



Sl. 3.7 b) – Zatvoreni sustav automatske regulacije stroja [ibidem]

⁸ <https://www.slideserve.com/erica/regulacija-elektromotornih-pogona>, pristupljeno: 23.08.2021.

Kada se govori o automatskoj regulaciji, tri su uvjeta da bi se neki sustav doista mogao smatrati sustavom automatske regulacije. Prvi je njegova svrha tj. da izvršava naredbe automatski odnosno da održava reguliranu veličinu jednaku željenoj veličini unatoč poremećajima, drugi je da radi kao sustav s negativnom povratnom vezom i treći je uvjet da uključuje osjetnik (senzor, mjerni član), komparator i izvršni član (aktuator).

Jedan od glavnih razloga zašto se između ostalog primjenjuje automatska regulacija je kompezacija utjecaja smetnje (poremećaja) koji se mogu javiti tijekom rada pogona. Ono što se automatskom regulacijsom pogona želi postići je smanjenje statičke pogreške (engl. *Reduce Steady State Error*), smanjenje rezonantnog vrha (engl. *Reduce Resonant Peak*) i poboljšati odziv sustava smanjivanjem vremena porasta signala (engl. *Improve System Response by Reducing Rise Time*). Navedeno se postiže primjenom PID regulatora.

Razlikujemo čvrstu i slijednu regulaciju. Čvrsta regulacija (engl. *disturbance rejection*, ili *disturbance attenuation*) znači otklanjanje poremećaja. Kada je referentna veličina vremenski invarijantna i rijetko se mijnja onda se ista zove i nazivna vrijednost (engl. *Set Point, SP*). Ako se referentna veličina kontinuirano mijenja (još se naziva i vodeća veličina), tada je primarni zadatak sustava regulacije da regulirana veličina prati vodeću veličinu, a takva regulacija naziva se slijednom regulacijom (engl. *Tracking Control*). Servomehanizmi ili kraće *servo* na neki način su i sinonimi za slijednu regulaciju. U tom slučaju zadatak servomehanizama je praćenje neke mehaničke veličine, poput položaja, brzine ili ubrzanja, sa što većom točnošću.

Regulacija se provodi izborom regulatora i izborom kriterija regulacije. U slučaju regulacije brzine vrtnje (istosmjerni i zmjenični stroj) koristite će se *PI regulator*, a kao kriterije regulacije koristit će se kriteriji *robusne regulacije*.

Kriterij robusne regulacije koji će se primjeniti je sljedeći:

a) Kriteriji otvorenog kruga

$$T_s \cong 1 \text{ do } 2 \cdot \frac{2\pi}{\omega_c} - \text{vrijeme smirivanja signala (Settling Time, ST)}$$

$$T_p \cong \frac{\pi}{\omega_c} - \text{vrijeme prvog maksimuma (Peak Time, PT)}$$

$$N \cong 1 \text{ do } 2 - \text{broj oscilacija prijelazne funkcije}$$

$$L_{AO} = 6 \text{ do } 20 \text{ dB} - \text{amplitudno osiguranje (Open – Loop Gain)}$$

$$\varphi_{FO} = 30^\circ \text{ do } 60^\circ - \text{fazno osiguranje osiguranje (Open – Loop Phase)}$$

gdje je:

$$\omega_c - \text{kružna frekvencija presjeka (Crossover Frequency, CF)}$$

b) Kriteriji zatvorenog kruga

$$L(\omega_r) = 0,82 \text{ do } 3,52 \text{ dB}$$

gdje je:

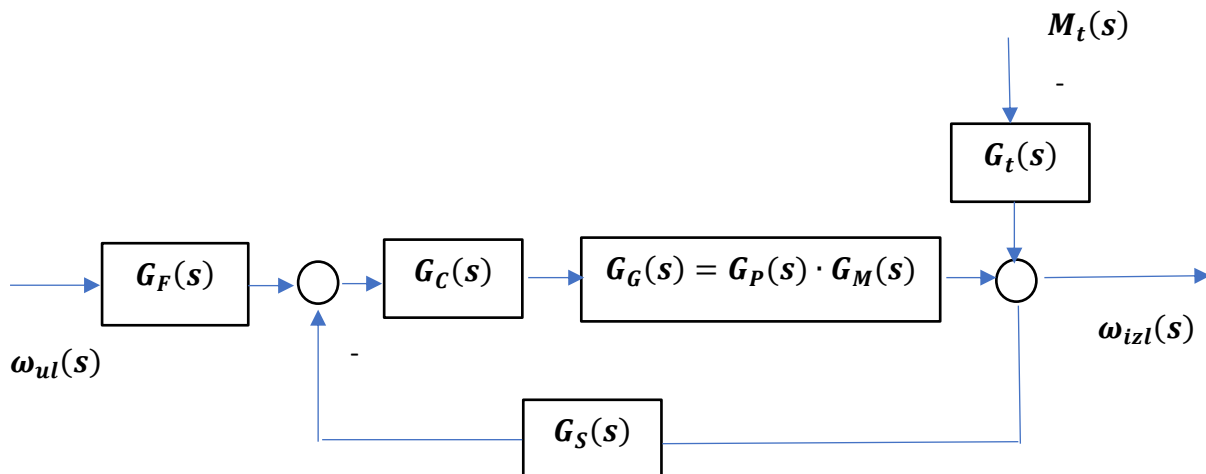
ω_r – rezonantna kružna frekvencija

Provjera ispunjenje kriterija robusne regulacije provest će se na temelju Bodeovog dijagrama i prijelazne funkcije zatvorenog kruga.

Primjer br. 18

Potrebno je automatski regulirati rad dizalice i odrediti parametre PI regulatora tako da brzina podizanja tereta v ostane konstanta bez obzira na masu tereta m koji dizalica podiže. Shematski prikaz dizalice jednak je kao i u primjeru br. 2 i zadani su sljedeći parametri za istosmjerni stroj s konstantim magnetskim tokom statora: konstanta stroja iznosi $k = 1,2Vs$, otpor aramature rotora iznosi $R_a = 0,8 \Omega$, induktivitet rotora iznosi $L_a = 10mH$, moment inercije stroja $J_m = 0,8 \text{ kgm}^2$, moment inercije bubnja $J_b = 1,2 \text{ kgm}^2$, promjer bubnja $D = 20cm$, masa tereta $m = 100kg$ i linearna brzina podizanja tereta $v = 10m/s$. Radi lakšeg proračuna zanemaruje se utjecaj viskoznog trenja.

Blok shema automatske regulacije pogona prikazana je na slici 3.8.



Sl. 3.8 – Blok shema automatske regulacije pogona

gdje je:

$$\omega_{ul}(s) = \frac{\omega_n}{s} \text{ – ulazna kutna brzina u } s \text{ području}$$

$$\omega_{izl}(s) \text{ – izlazna kutna brzina u } s \text{ području}$$

$$M_t(s) = \frac{M_t}{s} \text{ – moment tereta u } s \text{ području}$$

Zadane su sljedeće prijenosne funkcije:

$$G_F(s) = \frac{k_F}{T_F \cdot s + 1} - \text{prijelazna funkcija ulaznog pretvarača}$$

$$G_S(s) = \frac{k_{se}}{T_{se} \cdot s + 1} - \text{prijelazna funkcija senzora}$$

$$G_C(s) = k_p + k_i \cdot \frac{1}{s} - \text{prijelazna funkcija PI regulatora}$$

$$G_P(s) = \frac{k_{poj}}{T_{poj} \cdot s + 1} - \text{prijelazna funkcija pojačala}$$

$$G_M(s) = \frac{k_m}{T_m \cdot T_a \cdot s^2 + T_a \cdot s + 1} - \text{prijelazna funkcija istosmjernog stroja}$$

$$G_t(s) = \frac{k_s(T_a \cdot s + 1)}{T_m \cdot T_a \cdot s^2 + T_m \cdot s + 1} - \text{prijelazna funkcija tereta}$$

gdje je:

k_F – pojačanje pretvarača

T_F – vremenska konstanta pretvarača [sek]

k_{se} – pojačanje senzora

T_{se} – vremenska konstanta senzora [sek]

$k_m = \frac{1}{k}$ – pojačanje stroja

$T_m = \frac{J_{uk} \cdot R_a}{k^2}$ – mehanička vremenska konstanta stroja [sek]

$T_a = \frac{L_a}{R_a}$ – električna vremenska konstanta stroja [sek]

$k_s = k_m^2 \cdot R_a$ – konstanta tereta

Ukupni momet inercije J_{uk} računa se prema relaciji:

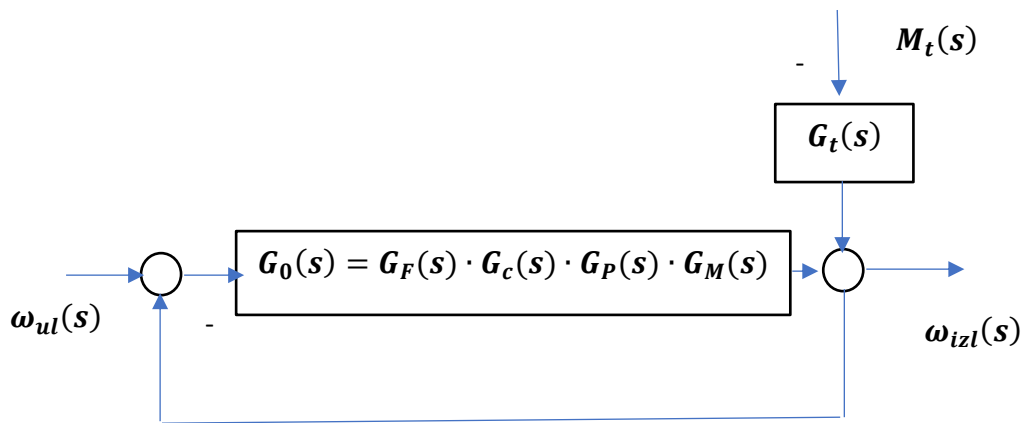
$$J_{uk} = J_m + J_b + \frac{m \cdot D^2}{4}$$

Neka su zadane sljedeće konstante: $k_F = k_{se} = 0,15$ i $T_F = T_{se} = 0,02 \text{ sek}$ odnosno $k_{poj} = 50$ i $T_{poj} = 0,018 \text{ sek}$.

Kako je $G_F(s) = G_S(s)$ tada se prijenosna funkcija pretvarača može prenijeti u glavnu granu zatvorenog sustava i tada vrijedi:

$$G_0(s) = G_F(s) \cdot G_C(s) \cdot G_P(s) \cdot G_M(s)$$

Modificirana blok shema sustava prikazana je na slici 3.9.



Sl. 3.9 – Modificirana blok shema automatske regulacije pogona

Prijenosna funkcija zatvorenog sustava $G_{zp}(s)$ na signal pobude, uz uvjet da je funkcija tereta $M_t(s) = 0$, jednaka je:

$$G_{zp}(s) = \frac{\omega_{izl}(s)}{\omega_{ul}(s)} = \frac{G_F(s) \cdot G_c(s) \cdot G_P(s) \cdot G_M(s)}{1 + G_F(s) \cdot G_c(s) \cdot G_P(s) \cdot G_M(s)}$$

Prijenosna funkcija zatvorenog sustava $G_{zt}(s)$ na signal poremećaja (teret), uz uvjet da je pobudna funkcija $\omega_{ul}(s) = 0$, jednaka je:

$$G_{zt}(s) = \frac{\omega_{izl}(s)}{M_t(s)} = \frac{G_t(s)}{1 + G_F(s) \cdot G_c(s) \cdot G_P(s) \cdot G_M(s)}$$

Za potrebe izračuna parametara PI regulatora koristit će se MatLab, a posebno rutina *pidtune* kojom se određuju koeficijenti regulatora k_p i k_i . U nastavku će se prezentirati odgovarajuća rutina kojom je riješen zadatak, te će se pod djelovima komentirati rezultati.

Rješenje (programska rutina u MatLab-u) je sljedeće:

a) Statička karakteristika

```
'AUTOMATSKA REGULACIJA BRZINE ISTOSMJERNOG STROJA PI REGULATOROM'
```

```
'Zadano'
```

```
Jm=0.8 %Moment inercije stroja [kgm^2]
Jb=1.2 %Moment inercije bubnja [kgm^2]
kv=0.1 %Konstanta viskoznog trenja [Nms/rad]
D=0.2 %Promjer bubnja [m]
m=100 %Masa tereta [kg]
v=10 %Brzina podizanja tereta [m/s]
g=9.81 %Gravitacija [m/sek^2]
Ra=0.8 %Otpor armature [Om]
k=1.2 %Konstanta motora [Vs]
```

```
La=10e-3 %Induktivitet armature [H]
kf=0.15 %Pojačanje pretvarača
Tf=20e-3 %Vremenska konstanta pretvarača
'Vrijedi'
kse=kf %Pojačanje senzora
Tse=Tf %Vremenska konstanta senzora
kpoj=50 %Pojačanje pojačala
Tpoj=18e-3 %Vremenska konstanta pojačala

'Rješenje'
'1-Moment inercije tereta i ukupni moment inercije [kgm^2]'
Jt=m*D^2/4 %Moment inercije tereta
Juk=Jm+Jb+Jt %Ukupni moment inercije

'2-Moment tereta [Nm]'
Mt=m*g*D/2 %Moment tereta stroja [Nm]

'3-Kutna brzina podizanja tereta [rad/sek] i broj okretaja [okr/min]'
omr=2*v/D %Kutna brzina (radna) [rad/sek]
n=20/pi*omr %Broj okretaja stroja [okr/min]

'4-Potrebni napon stroja [V]'
Um=Ra/k*Mt+k*omr %Napone stroja [V]

'5-Statička karakteristika stroja'
syms M
ommax=Um/k
Mmax=k*Um/Ra
a=Ra/k^2;
om=-a*M+ommax;
fplot(om,[0 Mmax])

title('Statička karakteristika')
xlabel('Moment M[Nm]')
ylabel('Kutna brzina w[rad/sek]')
grid

hold on

plot(Mt,omr, '*')
hold off
```

```
ans = 'AUTOMATSKA REGULACIJA BRZINE ISTOSMJERNOG STROJA PI REGULATOROM'
```

```
ans = 'Zadano'
```

```
Jm = 0.8000
```

```
Jb = 1.2000
```

```
kv = 0.1000
```

```
D = 0.2000
```

```
m = 100
```

```
v = 10
```

```
g = 9.8100
```

```
Ra = 0.8000
```

```
k = 1.2000
```

```
La = 0.0100
```

```
kf = 0.1500
```

```
Tf = 0.0200
```

```
ans = 'Vrijedi'
```

```
kse = 0.1500
```

```
Tse = 0.0200
```

```
kpoj = 50
```

```
Tpoj = 0.0180
```

```
ans = 'Rješenje'
```

```
ans = '1-Moment inercije tereta i ukupni moment inercije [kgm^2]'
```

```
Jt = 1.0000
```

```
Juk = 3
```

```
ans = '2-Moment tereta [Nm]'
```

```
Mt = 98.1000
```

```
ans = '3-Kutna brzina podizanja tereta [rad/sek] i broj okretaja [okr/min]'
```

```
omr = 100
```

```
n = 636.6198
```

```
ans = '4-Potrebni napon stroja [V]'
```

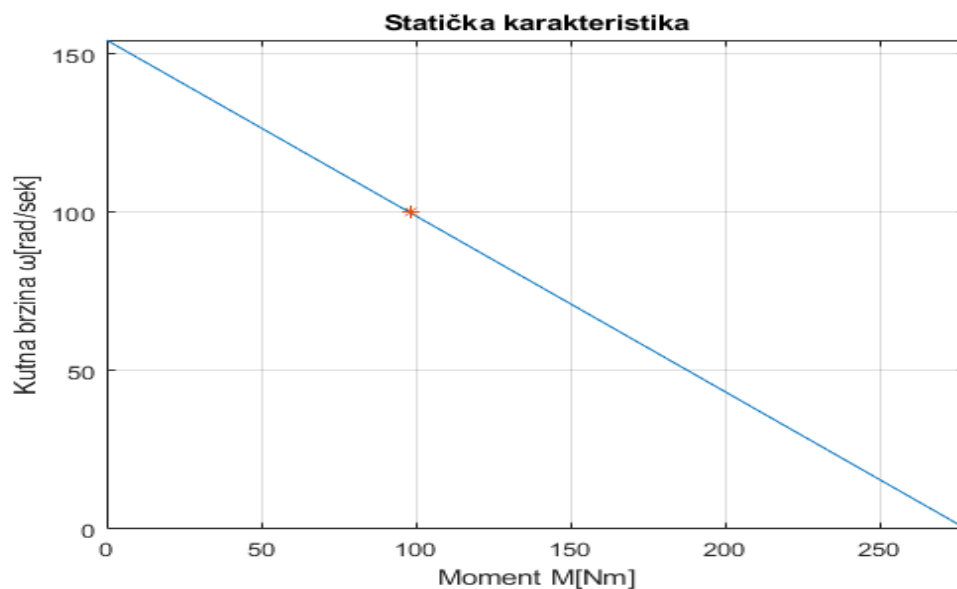
```
Um = 185.4000
```

Na slici 3.10 prikazana je statička karakteristika snage i radna točka.

```
ans = '5-Statička karakteristika stroja'
```

```
ommax = 154.5000
```

```
Mmax = 278.1000
```



Sl. 3.10 - Statička karakteristika snage i radna točka

Na temelju izračunatih parametara statičke karakteristike snage i radne točke, pristuilo se određivanju dinamičke karakteristike (prijelazne funkcije) na step pobudnu funkciju.

b) Dinamička karakteristika

```
'6-Dinamička karakteristika - prijenosna funkcija'  
'Pretvarač'  
Gf=tf(kf,[Tf 1])  
'Senzor'  
Gs=Gf  
'Pojačalo'  
Gp=tf(kpoj,[Tpoj 1])  
  
'Vremenske konstante stroja [sek] '  
Ta=La/Ra  
Tm=Juk*Ra/k^2  
  
'Koeficijenti stroja'  
km=1/k  
ks=km^2*Ra  
  
'Prijenosna funkcija stroja'  
a=Tm*Ta;  
b=Tm;  
c=1;  
Gm=tf([km],[a b c])  
  
'8-Prijenosna funkcija tereta'  
Gt=ks*tf([Ta 1],[a b c])  
  
'7 - Prijelazna funkcija pogona s teretom u otvorenom krugu'  
omt=Gm*Um-Gt*Mt  
step(omt)  
title('Dinamička karakteristika stroja')  
xlabel('Vrijeme t[sek]')  
ylabel('Kutna brzina motora om[rad/sek]')  
grid  
  
'7-Prijenosna funkcija otvorenog kruga sa pretvaračem i pojačalom'  
G0=Gf*Gp*Gm
```

U nastavku su prikazani izračunate vrijednosti parametara i prijelazna funkcija na step pobudu.

```
ans = '6-Dinamička karakteristika - prijenosna funkcija'
```

```
ans = 'Pretvarač'
```

```
Gf =
```

$$\frac{0.15}{0.02 s + 1}$$

Continuous-time transfer function.

```
ans = 'Senzor'
```

```
Gs =
```

$$\frac{0.15}{0.02 s + 1}$$

Continuous-time transfer function.

```
ans = 'Pojačalo'
```

```
Gp =
```

$$\frac{50}{0.018 s + 1}$$

Continuous-time transfer function.

```
Ta = 0.0125
```

```
Tm = 1.6667
```

```
ans = 'Koeficijenti stroja'
```

```
km = 0.8333
```

```
ks = 0.5556
```

```
ans = 'Prijenosna funkcija stroja'
```

```
Gm =
```

$$\frac{0.8333}{0.02083 s^2 + 1.667 s + 1}$$

Continuous-time transfer function.

```
ans = '8-Prijenosna funkcija tereta'
```

```
Gt =
```

$$\frac{0.006944 s + 0.5556}{0.02083 s^2 + 1.667 s + 1}$$

Continuous-time transfer function.

```
ans = '7 - Prijelazna funkcija pogona s teretom u otvorenom krugu'
```

```
omt =
```

$$\frac{-0.01419 s^3 + 0.9479 s^2 + 166 s + 100}{0.000434 s^4 + 0.06944 s^3 + 2.819 s^2 + 3.333 s + 1}$$

Continuous-time transfer function.

```
ans = '7-Prijenosna funkcija otvorenog kruga sa pretvaračem i pojačalom'
```

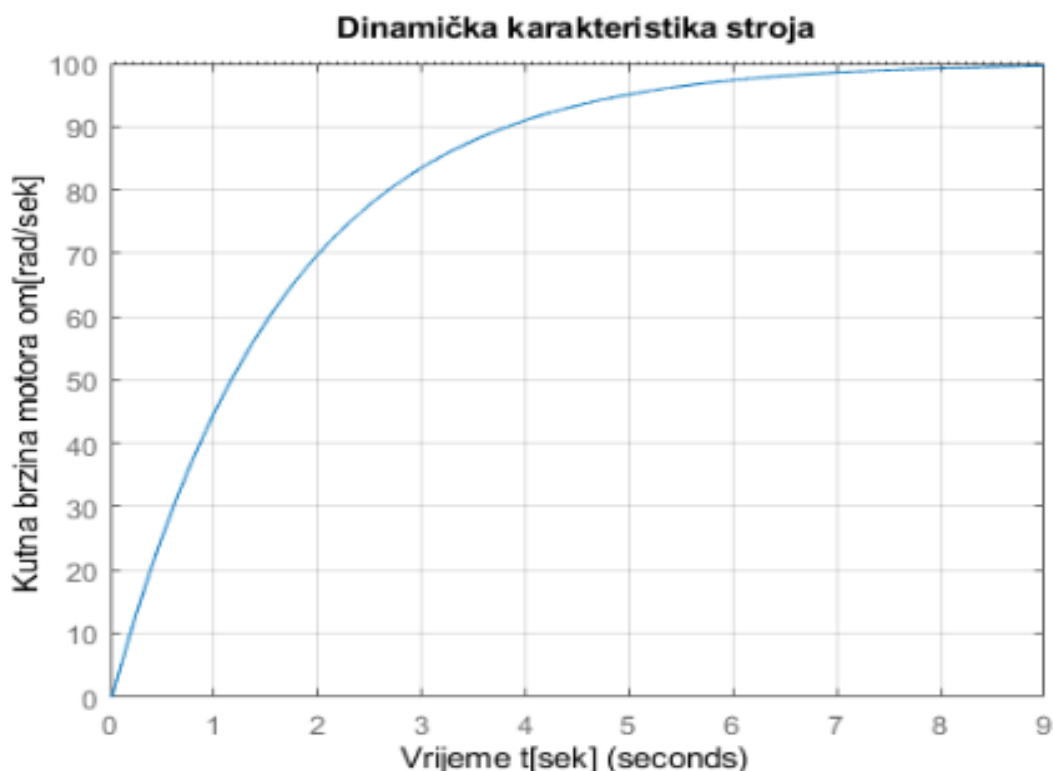
```
G0 =
```

```
6.25
```

```
-----  
7.5e-06 s^4 + 0.001392 s^3 + 0.08453 s^2 + 1.705 s + 1
```

```
Continuous-time transfer function.
```

Na slici 3.11 prikazana je dinamička karakteristika (prijenosna funkcija) na step pobudu



Sl. 3.11 - Dinamička karakteristika (prijenosna funkcija) na step pobudu

Sa slike 3.11 uočava se kutna brzina koja iznosi $\omega = 100 \text{ rad/sek}$ i vrijeme prijelaznog procesa koje iznosi cca 9 sekundi. Podatak o kutnoj brzini prikazan na statičkoj karakteristici odgovara podatku na dinamičkoj karakteristici, čime se potvrđuje ispravnost simulacijskog modela u MatLab-u

Prethodno prikazani podaci odnose se na otvoreni krug, dok se automatska regulacija provodi u zatvorenom krugu s negativnom povratnom vezom. Za izbor PI regulatora primjenit će se kriterij u frekvencijskom području, a za određivanje parametra regulatora koristit će se Bodeov dijagram

c) Automatska regulacije (Bodeov dijagram)

```
'8 - Izbor PI regulatora'
C=pidtune(G0, 'PI')
margin(C*G0)
grid
'9-Prijenosna funkcija '
Gzp=omr*feedback(C*G0,1)
step(omt,Gzp)
stepinfo(Gzp)
grid
'10 - Prijenosna funkcija tereta'
Gzt=Mt*feedback(Gt,C*G0/Gt)
step(Gzt)
grid
'11 - Kriterij zatvorenog kruga'
margin(feedback(C*G0,1))
grid
```

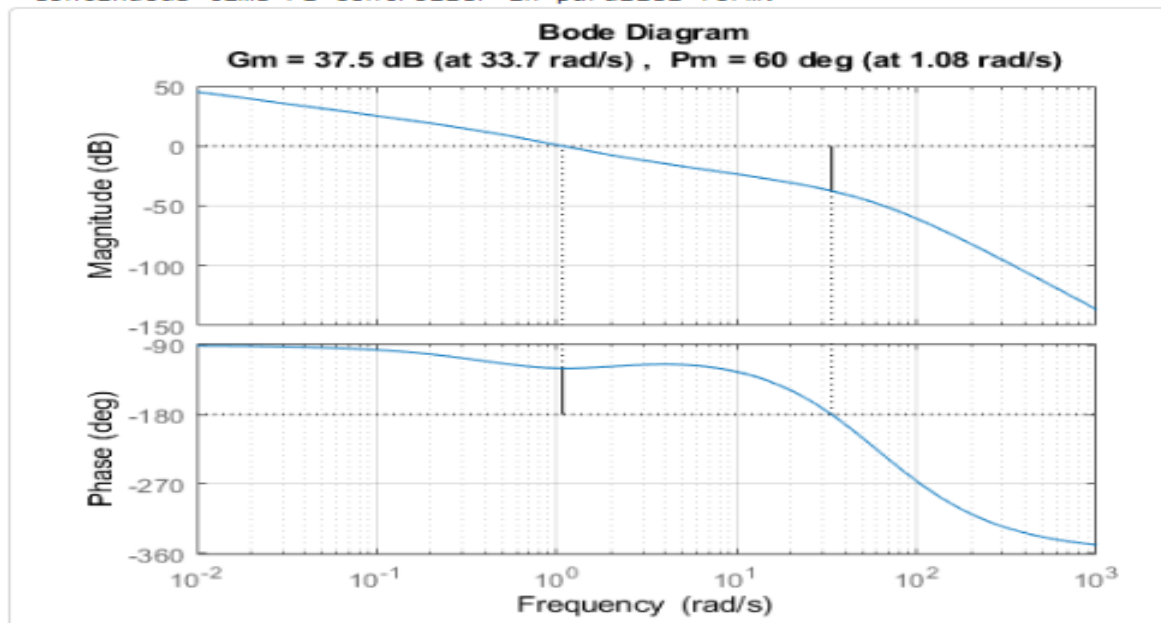
Na slici 3.12 prikazani su parametri PI regulatora (K_p i K_i) i Bodeov dijagram iz kojeg se može očitati amplitudno i fazno osiguranje.

```
Continuous-time transfer function.
ans = '8 - Izbor PI regulatora'
C =
```

$$K_p + K_i * \frac{1}{s}$$

```
with Kp = 0.183, Ki = 0.294
```

```
Continuous-time PI controller in parallel form.
```



Sl. 3.12 - Parametri PI regulatora (K_p i K_i) i Bodeov dijagram

Prema dobivenim rezultatima prijenosna funkcija regulatora glasi:

$$G_C(s) = k_p + k_i \cdot \frac{1}{s} = 0,183 + 0,294 \cdot \frac{1}{s}$$

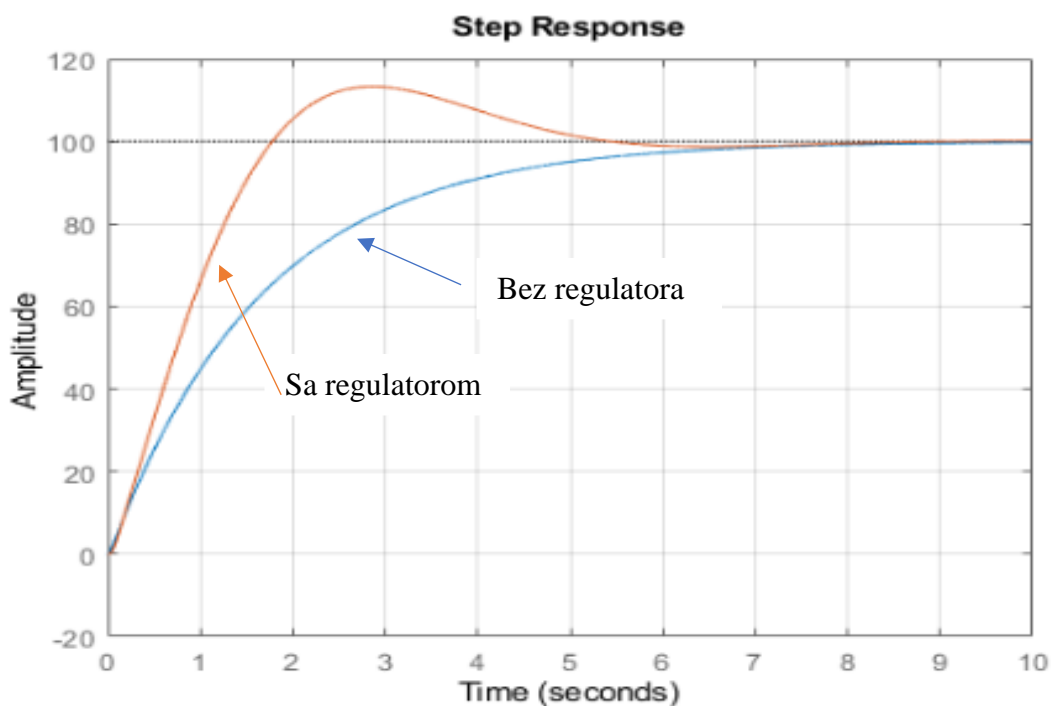
Amplitudno osiguranje iznosi $L_{AO} = 37,5 \text{ dB}$, a fazna osiguranje iznosi $\varphi_{FO} = 60^\circ$. Kružna frekvencija presjeka iznosi $\omega_c = 1,08 \text{ rad/sek}$.

U nastavku je data prijenosna funkcija reguliranog sustava $G_{zp}(s)$ i parametri prijelazne funkcije, dok je na slici 3.13 prikazana je prijelazna funkcija sustava bez regulatora i sa regulatorom na step pobudu.

```
ans = '8-Prijenosna funkcija '
Gzp =

-----
114.2 s + 183.6
-----
7.5e-06 s^5 + 0.001392 s^4 + 0.08453 s^3 + 1.705 s^2 + 2.142 s + 1.836

Continuous-time transfer function.
ans = struct with fields:
    RiseTime: 1.2967
    SettlingTime: 4.8980
    SettlingMin: 90.0448
    SettlingMax: 113.2921
    Overshoot: 13.2921
    Undershoot: 0
    Peak: 113.2921
    PeakTime: 2.8612
```



Sl. 3.13 - Prijelazna funkcija sustava bez regulatora i sa regulatorom na step pobudu

Prema podacima o prijelaznom procesu, trajanje prijelaznog procesa iznosi $T_s = 4,89\text{sek}$, a vrijeme prvog maksimuma iznosi $T_p = 2,86\text{ sek}$. Prema kriteriju robusnosti to iznosi:

$$T_s \cong (1 \text{ do } 2) \cdot \frac{2 \cdot \pi}{\omega_c} = (1 \text{ do } 2) \cdot \frac{2 \cdot \pi}{1,08} = 5,81 \div 11,63 \text{ sek}$$

$$T_p \cong \frac{\pi}{\omega_c} = 2,9 \text{ sek}$$

Pri čemu je broj oscilacija u granicama $N = 1 \text{ do } 2$.

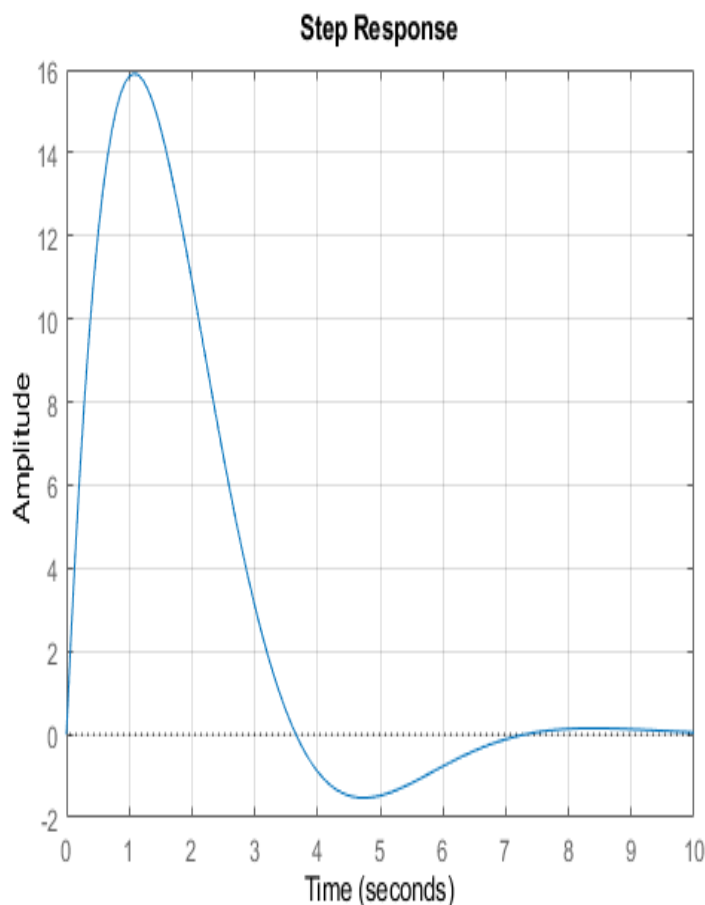
U nastavku je prikazana prijelazna funkcija tereta $G_{zt}(s)$ u zatvorenom reguliranom krugu, a na slici 3.14 prikazana je prijelazna funkcija tereta na step pobudu.

ans = '9 - Prijenosna funkcija tereta'

Gzt =

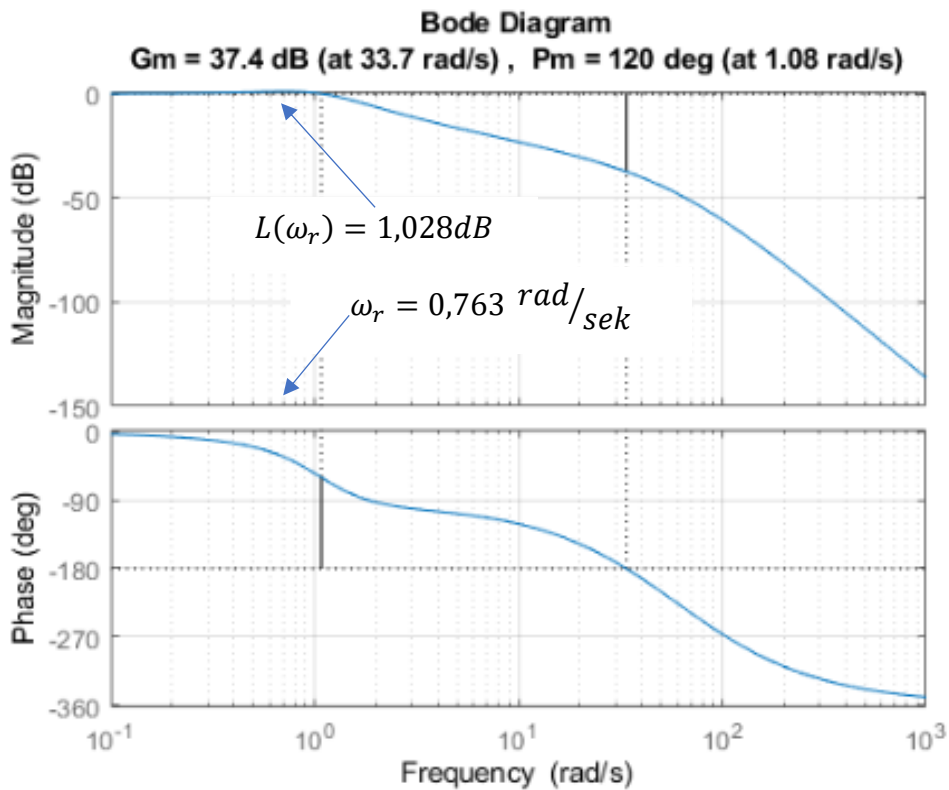
$$\frac{3.548e-08 s^7 + 1.226e-05 s^6 + 0.00168 s^5 + 0.1142 s^4 + 3.854 s^3 + 52.37 s^2 + 30.28 s}{1.085e-09 s^8 + 3.75e-07 s^7 + 5.144e-05 s^6 + 0.003506 s^5 + 0.1194 s^4 + 1.687 s^3 + 2.988 s^2 + 2.903 s + 1.02}$$

Continuous-time transfer function.



Sl. 3.14 - Prijelazna funkcija tereta na step pobudu

Na slici 3.15 prikazana je Bodeov dijagram i kriterij zatvorenog kruga.



Sl. 3.15 – Bodeov dijagram i kriterij zatvorenog kruga

U prezentiranom primjeru korišten je PI regulator s jednim stupnjem slobode (1-DOF, *degree of freedom*) i primjenom kriterija robusne regulacije dobiven su sljedeći parametri regulacije, prikazani u Tablici 3.1

Tablica 3.1 – Usporedni prikaz kriterija i ostvarenih parametara regulacije

Kriterij	Raspon	Ostvareno
$T_s \cong 1 \text{ do } 2 \cdot \frac{2\pi}{\omega_c}$	5,81 do 1,63 sek	$T_s = 4,89 \text{ sek}$
$T_p \cong \frac{\pi}{\omega_c}$	2,9 sek	$T_p = 2,86 \text{ sek}$
N	1 do 2	2
L_{AO}	6 do 20 dB	$L_{AO} = 37,5 \text{ dB}$
φ_{FO}	30° do 60°	$\varphi_{FO} = 60^\circ$
$L(\omega_r)$	0,82 do 3,52dB	$L(\omega_r) = 1,028dB$

Svi parametri kvalitete regulacije u odnosu na kriterije robusne regulacije nalaze se u zadanim granicama, osim amplitudnog osiguranja koje je veće za 17,5 dB.

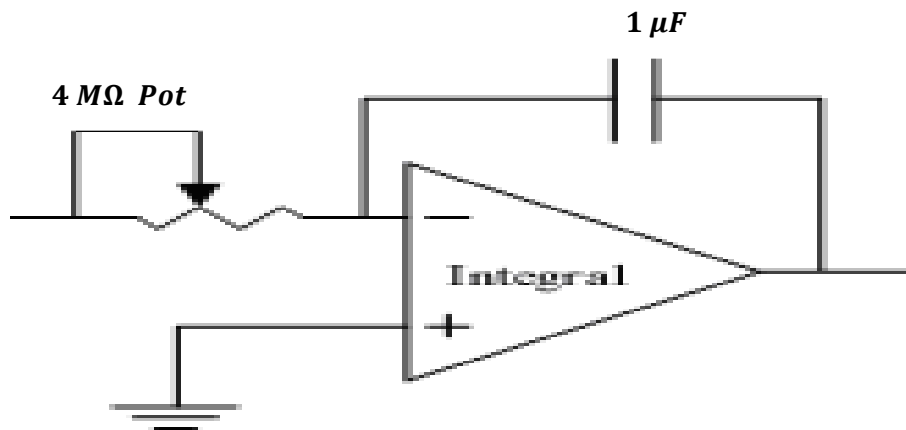
Vrijednost otpora R_p na potenciometru P – člana iznositi će:

$$k_p = \frac{R_p}{4,7} = 0,183$$

Odnosno slijedi:

$$R_p = 0,183 \cdot 4,7 = 9,86k\Omega$$

Za slučaj I – člana vrijediti će kako je prikazano na slici 3.17 b).



Sl. 3.17 b) – Integralni član analognog PI regulatora

Vrijednost otpora R_p na potenciometru I – člana iznositi će:

$$k_i \cdot \frac{1}{s} = \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{1}{C \cdot s} = \frac{1}{R_i \cdot C} \cdot \frac{1}{s}$$

Slijedi da je:

$$k_i = \frac{1}{R_i \cdot C} = \frac{1}{R_i \cdot 10^{-6}} = 0,294$$

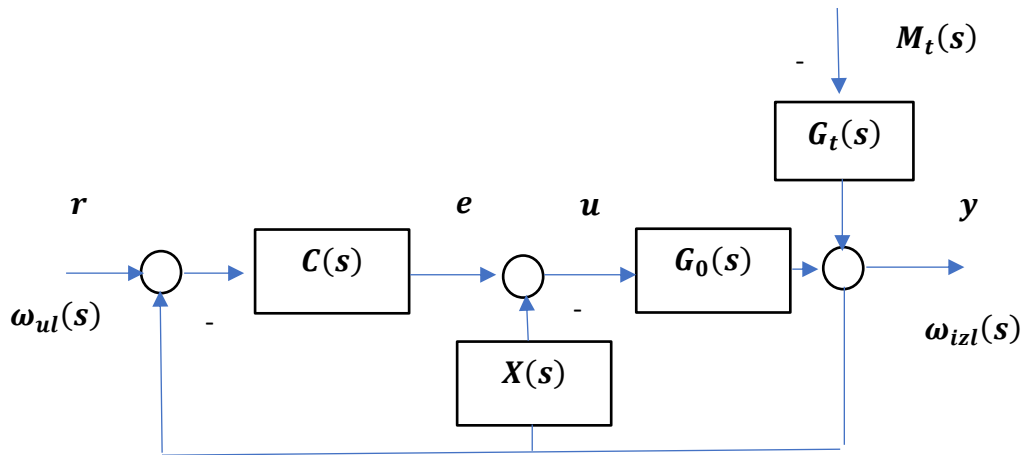
Odnosno dobivamo:

$$R_i = \frac{1}{0,294 \cdot 10^{-6}} = 3,4M\Omega$$

Na ovaj način podešen je analogni PI regulator prema kriterijima robusne regulacije dizalice.

3.3.2 Digitalni regulator

Digitalni PID regulatori koji se primjenjuju u PLC-u (Programmable Logic Controller) uobičajeno su regulatori s dva stupnja slobode (2-DOF, *degree of freedom*), čija je blok shema opisna na slici 3.18.



Sl. 3.18 – Automatska regulacija s regulatorom s dva stupnja slobode

gdje je:

$$G_0(s) = G_F(s) \cdot G_P(s) \cdot G_M(s)$$

Odnosno vrijedi:

$$C(s) = b \cdot k_p + \frac{k_i}{s} + \frac{c \cdot k_d}{T_f \cdot s + 1}$$

$$X(s) = (1 - b) \cdot k_p + k_d \cdot \frac{1 - c}{T_f \cdot s + 1} \cdot s$$

Izlaz iz regulatora u može se tada definirati u dva oblika i to paralelni i standardni. Paralelni oblik glasi:

$$u = k_p \cdot (b \cdot r - y) + \frac{k_i}{s} \cdot (r - y) + \frac{k_d \cdot s}{T_f \cdot s + 1} \cdot (c \cdot r - y)$$

gdje je:

u – signala regulatora

$r = \omega_{ul}$ – ulazni signal (ulazna kutna brzina vrtnje stroja)

$y = \omega_{izl}$ – izlazni signal (izlazna kutna brzina vrtnje stroja)

k_p – proporcionalno pojačanje

k_i – integratorsko pojačanje

k_d – derivacijsko pojačanje

T_f – vremenska konstanta derivacijskog člana [sek]

b – težinski faktor proporcionalnog člana

c – težinski faktor derivacijskog člana

Standardni oblik glasi:

$$u = k_p \cdot \left[(b \cdot r - y) + \frac{1}{T_i \cdot s} \cdot (r - y) + \frac{T_d \cdot s}{\frac{T_d}{N} \cdot s + 1} \cdot (c \cdot r - y) \right]$$

gdje je:

T_i – vremenska konstanta integratorskog člana [sek]

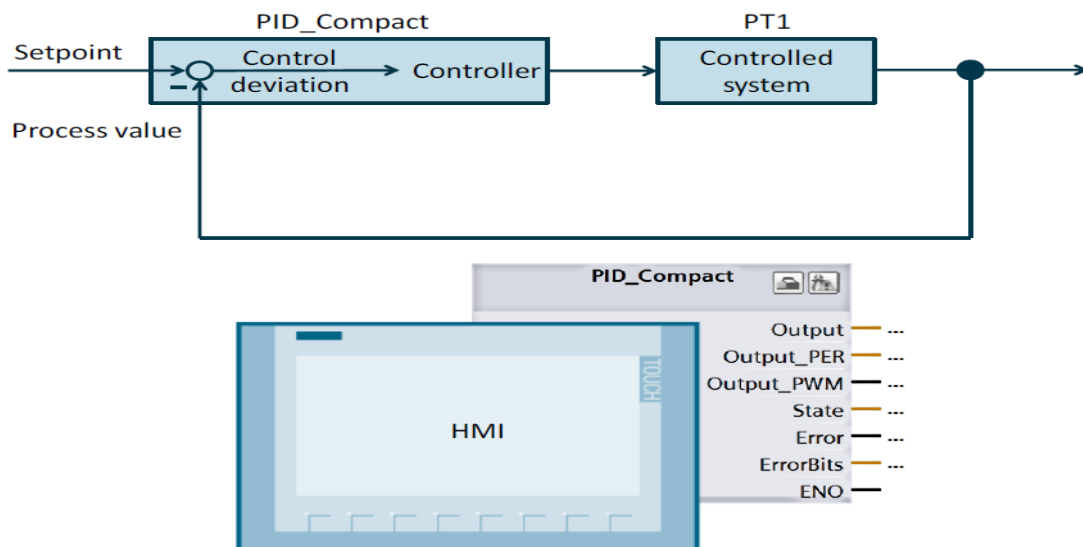
T_d – vremenska konstanta derivacijskog člana [sek]

N - ograničava pojačanje derivacijskog ponašanja na višim frekvencijama

U standardni oblik može se uvesti supstitucija $a = \frac{1}{N}$ kao koeficijent odgode kašnjenja, i standardni oblik poprima sljedeći izgled:

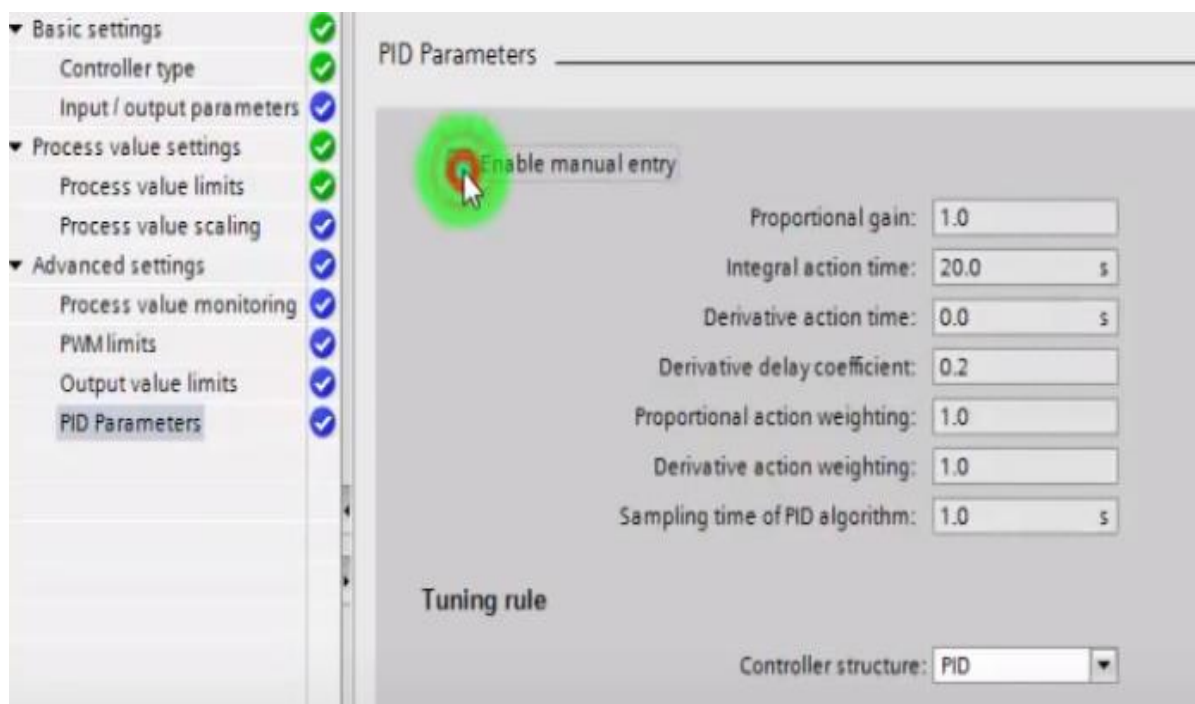
$$u = k_p \cdot \left[(b \cdot r - y) + \frac{1}{T_i \cdot s} \cdot (r - y) + \frac{T_d \cdot s}{a \cdot T_d \cdot s + 1} \cdot (c \cdot r - y) \right]$$

U slučaju kada se za regulatore pogona koriste Siemens regulatori u paketu SIMATIC S7-1200/S7-1500 u TIA portalu (engl. *Totally Integrated Automation Portal*) tada se za regulaciju koristi „PID_Compact“ kako je prikazano na slici 3.19.



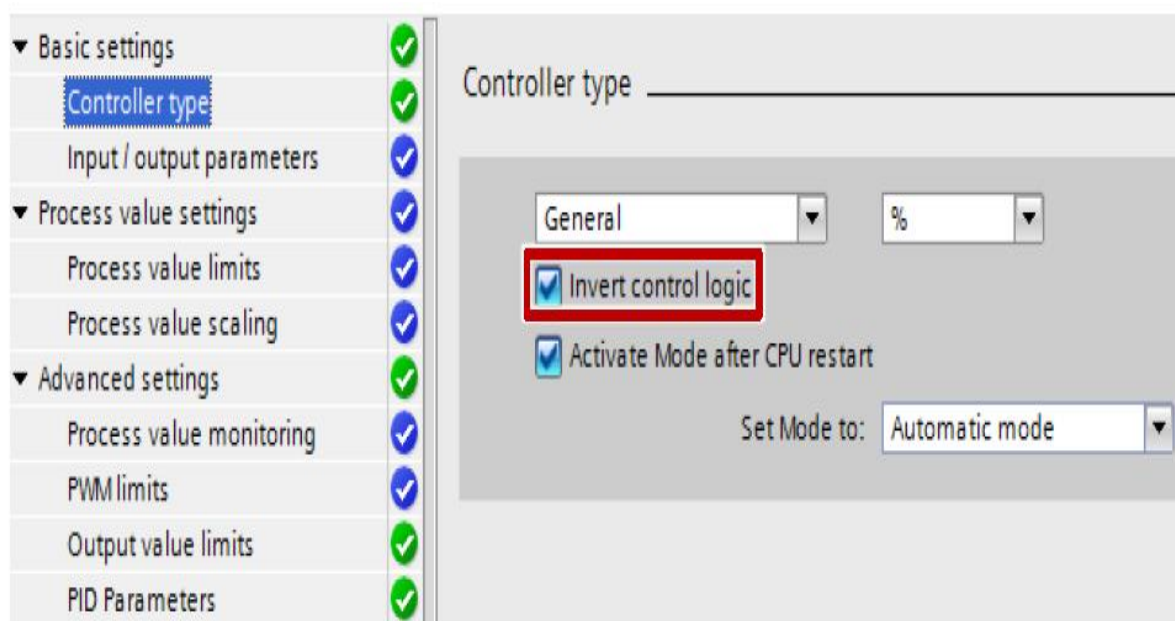
Sl. 3.19 - „PID_Compact“ alat za regulaciju PLC-a tipa Siemens

Konfiguracija i dodjela parametara softverskog regulatora „PID_Compact“ moguće je provesti putem HIM sučelja kada su poznati parametri elektromotornog pogona (Controlled system). Omogućene su dvije opcije: ručna (engl. *Manual option*) i automatska (engl. *Tuning option*). Na slici 3.20 prikazan je konfiguracija za ručni način unosa podataka PID regulatora prema standardnom obliku (podaci su preuzeti).



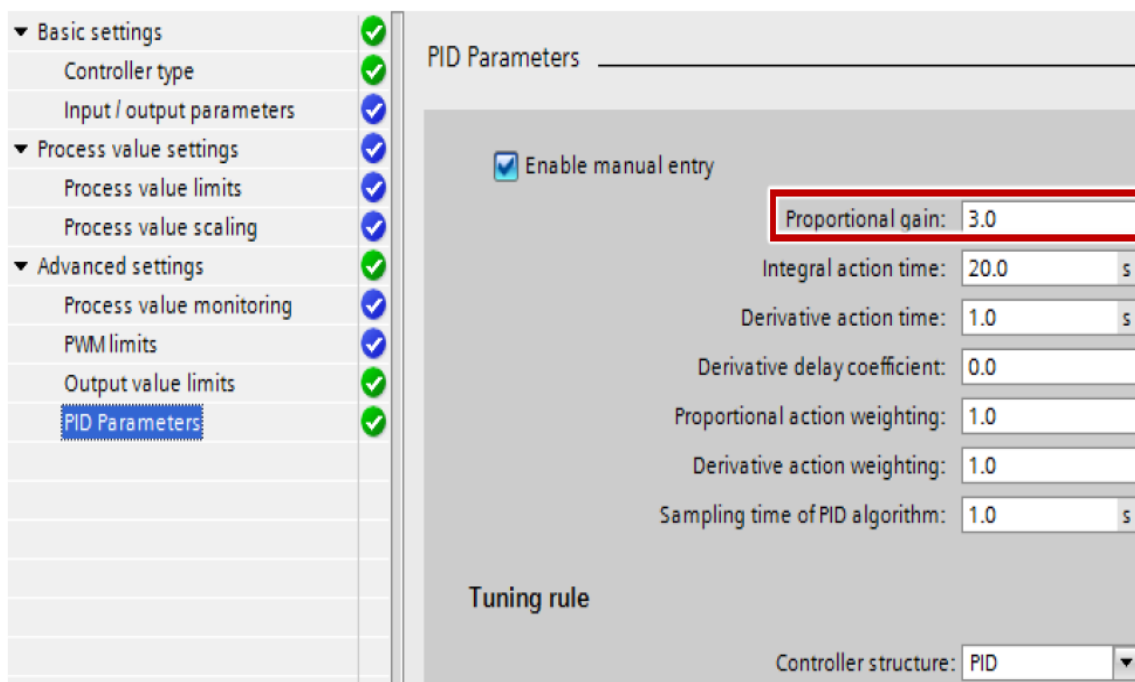
Sl. 3.20 – Ručni način unosa podataka PID regulatora [Siemens Manual]

Na slici 3.21 a) prikazan je uređivački editor u kojem možemo birati tip regulatora i opciju automatizacije.



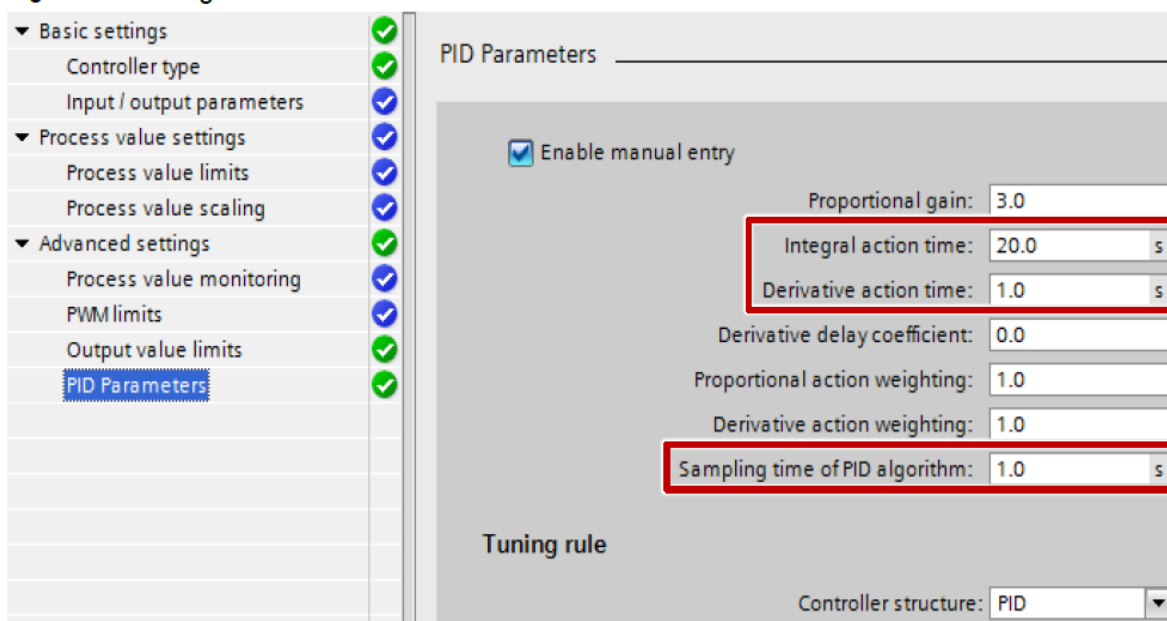
Sl. 3.21 a) – Izbor tipa regulatora i opcije automatizacije [ibidem]

Kako je izabrana ručna opcija, na slici 3.21. b) omogućen je ručni unos podataka i proporcionalno pojačanje k_p označen je crvenim pravokutnikom.



Sl. 3.21 b) – Ručni unos podataka u PID regulator s istaknutim proporcionalnim pojačanjem [ibidem]

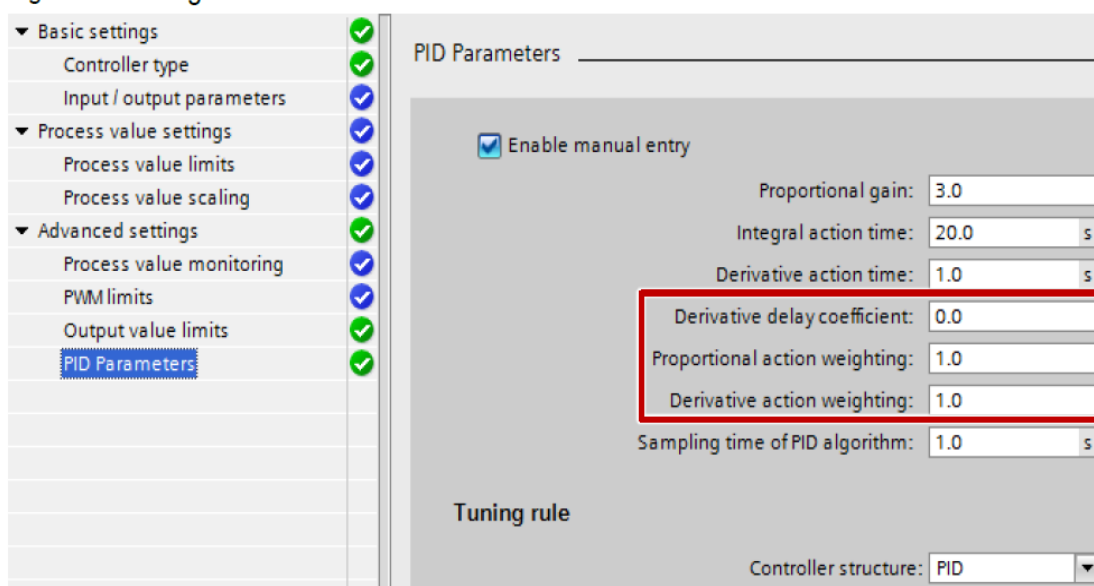
Na slici 3.21 c) prikazan je unos podataka u standardnom obliku kada se radi i PID regulatoru s jedni stupnjem slobode (1-DOF). Kako se radi o diskrenom regulatoru, potrebno je unijeti vrijeme diskreditacije PID algoritma (engl. *Samplin Time of PID algorithm*).



Sl. 3.21 c) – PID regulator (1-DOF) i vrijeme diskretizacije algoritma [ibidem]

Na slici 3.21 d) prikazan je unos podataka u standardnom obliku kada se radi i PID regulatoru s dva stupnja slobode (1-DOF).

Figure 1-2: Configuration editor



Sl. 3.21 d) – PID regulator (2-DOF) i vrijeme diskretizacije algoritma [ibidem]⁹

Na temelju prije navedenoga odredit će se parametri PI regulatora u kontinuiranom i diskretnom području.

Primjer br. 19

Potrebno je odrediti parametre PI regulatora sa dva stupnja slobode (2-DOF). Zadani podaci su kao i u primjeru br. 18. Parametre odrediti u kontinuiranom i diskretnom području.

Rješenje (programska rutina u MatLab-u) je sljedeće:

```
'AUTOMATSKA REGULACIJA BRZINE ISTOSMJERNOG STROJA PI REGULATOROM (2-DOF)'
```

```
'Zadano'
```

```
Jm=0.8 %Moment inercije stroja [kgm^2]
```

```
Jb=1.2 %Moment inercije bubnja [kgm^2]
```

```
kv=0.1 %Konstanta viskoznog trenja [Nms/rad]
```

```
D=0.2 %Promjer bubnja [m]
```

```
m=100 %Masa tereta [kg]
```

```
v=10 %Brzina podizanja tereta [m/s]
```

```
g=9.81 %Gravitacija [m/sek^2]
```

```
Ra=0.8 %Otpor armature [Om]
```

⁹ Više o svemu prije navedenome nalazi se na: <https://www.youtube.com/watch?v=Vianw940hw4>

```

k=1.2 %Konstanta motora [Vs]
La=10e-3 %Induktivitet armature [H]
kf=0.15 %Pojačanje pretvarača
Tf=20e-3 %Vremenska konstanta pretvarača
'Vrijedi'
kse=kf %Pojačanje senzora
Tse=Tf %Vremenska konstanta senzora
kpoj=50 %Pojačanje pojačala
Tpoj=18e-3 %Vremenska konstanta pojačala

'Rješenje'
'1-Moment inercije tereta i ukupni moment inercije [kgm^2]'
Jt=m*D^2/4 %Moment inercije tereta
Juk=Jm+Jb+Jt %Ukupni moment inercije

'2-Moment tereta [Nm]'
Mt=m*g*D/2 %Moment tereta stroja [Nm]

'3-Kutna brzina podizanja tereta [rad/sek] i broj okretaja [okr/min]'
omr=2*v/D %Kutna brzina (radna) [rad/sek]
n=20/pi*omr %Broj okretaja stroja [okr/min]

'4-Potrebni napon stroja [V]'
Um=Ra/k*Mt+k*omr %Napone stroja [V]

'5-Statička karakteristika stroja'
syms M
ommax=Um/k
Mmax=k*Um/Ra
a=Ra/k^2;
om=-a*M+ommax;
fplot(om,[0 Mmax])
title('Statička karakteristika')
xlabel('Moment M[Nm]')
ylabel('Kutna brzina w[rad/sek]')
grid
hold on
plot(Mt,omr, '*')
hold off

'6-Dinamička karakteristika - prijenosna funkcija'
'Pretvarač'
Gf=tf(kf,[Tf 1])
'Senzor'
Gs=Gf
'Pojačalo'
Gp=tf(kpoj,[Tpoj 1])

```

```

'Vremenske konstante stroja [sek] ';
Ta=La/Ra
Tm=Juk*Ra/k^2

'Koeficijenti stroja'
km=1/k
ks=km^2*Ra

'Prijenosna funkcija stroja'
a=Tm*Ta;
b=Tm;
c=1;
Gm=tf([km],[a b c])

'7-Prijenosna funkcija tereta'
Gt=ks*tf([Ta 1],[a b c])

'8 - Prijelazna funkcija pogona s teretom u otvorenom krugu'
omt=Gm*Um-Gt*Mt
step(omt)
title('Dinamička karakteristika stroja')
xlabel('Vrijeme t[sek]')
ylabel('Kutna brzina motora om[rad/sek]')
grid

'9-Prijenosna funkcija otvorenog kruga sa pretvaračem i pojačalom'
G0=Gf*Gp*Gm

'10 - Izbor PI regulatora'
C=pidtune(G0,'PI2')
pidTuner(G0,'PI2')

```

Parametri PI regulatora s dva srupnja slobode u paralelnoj formi iznose kako slijedi:

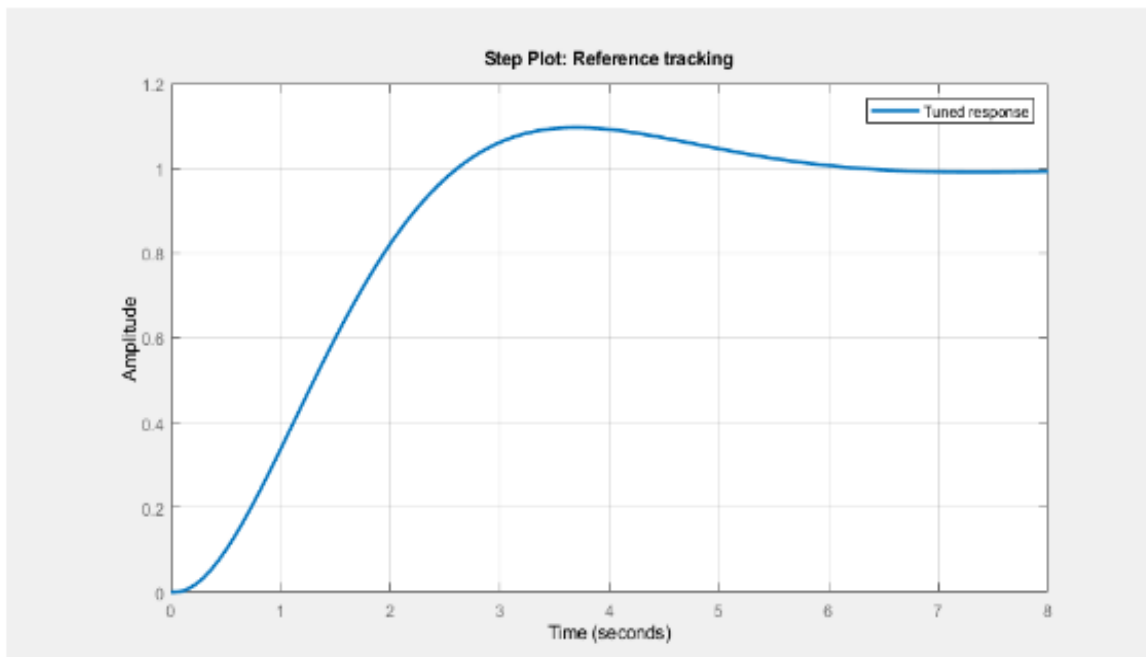
C =

$$u = K_p (b*r - y) + K_i \frac{1}{s} (r - y)$$

with $K_p = 0.183$, $K_i = 0.294$, $b = 0.0201$

Continuous-time 2-DOF PI controller in parallel form.

Na slici 3.22 a) prikazana je prijenosna funkcija reguliranog sustava PI regulatorom s dva stupnja slobode.



Sl. 3.22 a) - Prijenosna funkcija reguliranog sustava PI regulatorom s dva stupnja slobode

Na slici 3.22 b) prikazani su parametri PI regulatora i parametri prijelaznog procesa za ocjenu kvalitete robusne regulacije

Controller Parameters	
	Tuned
Kp	0.18271
Ki	0.29375
Kd	n/a
Tf	n/a
b	0.020141
c	n/a

Performance and Robustness	
	Tuned
Rise time	1.73 seconds
Settling time	5.58 seconds
Overshoot	9.61 %
Peak	1.1
Gain margin	37.5 dB @ 33.7 rad/s
Phase margin	60 deg @ 1.08 rad/s
Closed-loop stability	Stable

Sl. 3.22 b) - Parametri PI regulatora i parametri prijelaznog procesa

Općenito bi izlaz iz PID2 regulatora u diskretnom području glasio u slučaju primjene Z - transformacije:

$$u = k_p \cdot (b \cdot r - y) + k_i \cdot IF(z) \cdot (r - y) + \frac{k_d}{T_f + DF(z)} \cdot (c \cdot r - y)$$

Gdje je:

$$IF(z) = DF(z) = \frac{T_s}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1}$$

Vezano za primjer 19. izlaz iz PI2 regulatora iznosio bi:

$$u = k_p \cdot (b \cdot r - y) + k_i \cdot IF(z) \cdot (r - y)$$

Odnosno:

$$u = k_p \cdot (b \cdot r - y) + k_i \cdot \frac{T_s}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} \cdot (r - y)$$

Kako je frekvencija presjeka iz prethodnih rezultata $\omega_c = 1,08 \text{ rad/sek}$ vrijedi da je vrijeme diskretizacije T_s sukladno preporukama Astroma i Wittenmarka (Astrom, 1984) jednako:

$$\frac{0,15}{1,08} < T_s < \frac{0,5}{1,08}$$

Odnosno

$$0,1839 < T_s < 0,463 \text{ sek}$$

Neka je $T_s = 0,2 \text{ sek}$, tada vrijedi:

$$u = 0,183 \cdot (0,021 \cdot r - y) + 0,294 \cdot \frac{0,2}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} \cdot (r - y)$$

odnosno

$$u = 0,183 \cdot (0,021 \cdot r - y) + 0,0294 \cdot \frac{z+1}{z-1} \cdot (r - y)$$

Matlab rješenje je sljedeće:

```
Ts=0.2
Cd=c2d(C, Ts, 'Tustin')
```

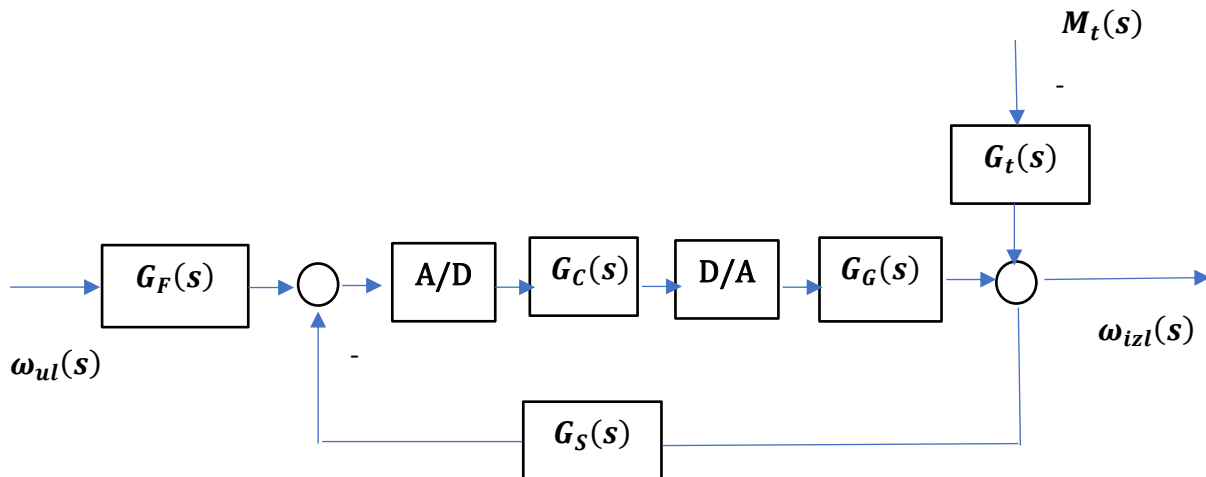
```
Ts = 0.2000
Cd =

      Ts*(z+1)
u = Kp (b*r-y) + Ki ----- (r-y)
                   2*(z-1)

with Kp = 0.183, Ki = 0.294, b = 0.0201, Ts = 0.2
Sample time: 0.2 seconds
Discrete-time 2-DOF PI controller in parallel form.
```

3.3.3 Modeliranje pogona u diskretnom području

Kako bi se provelo modeliranje pogona u diskretnom području na ulaz regulatora dodaje se Analogno/Digitalni (A/D) pretvornik, a na izlaz iz regulatora dodaje se Digitalno/Aanalogni (D/A) pretvornik kako je prikazano na slici 3.23.



Sl. 3.23 - Blok shema automatske regulacije pogona u diskretnom području

Analogno/Digitalni (A/D) pretvornik je diskretni modulator koji kontinuirani signal pretvara u diskretni signal impulsno-kodnom modulacijom i još se naziva *impulsni element*, dok je Digitalno/Aanalogni (D/A) pretvornik zapravo diskretni demodulator koji diskretni signal pomoću elementa za zadržavanje - *ekstrapolatora "0-reda"* (Zero Order Holder, ZOH) - pretvara u kontinuirani signal.

Impulsni element opisuje se sljedećom relacijom:

$$\delta^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k \cdot T)$$

Gdje je:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } t \neq 0 \\ \infty & \text{za } t = 0 \end{cases} \text{ - Dirackova delta funkcija koja je dobila ime po engleskom fizičaru i nobelovcu Paul Adrien Maurice Dirac}$$

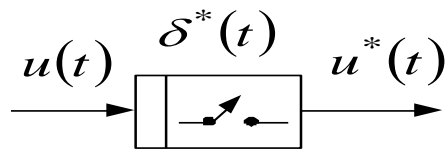
Ekstrapolator „0“ reda opisuje se sljedećom prijenosnom funkcijom $G_{zoh}(s)$:

$$G_{zoh}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

Gdje je:

T – vrijeme diskretizacije (uzorkovanja) signala, a k – broj uzorka signala

Simbol za impulsni element bio bi sljedeći:



Prema tome, impulsni element ili A/D pretvornik pretvara kontinuirani u diskretni signal, a ta transformacija naziva se Z – transformacija i opisana je sljedećom relacijom:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(t) \cdot z^{-k}$$

Npr. ako je pobudna funkcija „step funkcija“ definirana relacijom:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } t < 0 \\ 1 & \text{za } t \geq 0 \end{cases}$$

Tada je Z – transformacija step funkcije sljedeća:

$$U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u(t) \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^k}$$

Kako se radi o nizu koji konvergira, može se napisati:

$$U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^k} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots = \frac{1}{1 + \frac{1}{z}} = \frac{z}{z + 1}$$

Analogno prije napisanome, za ekstrapolator „0“ vrijedi:

$$G_{zoh}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} = \frac{1}{s} (1 - e^{-sT})$$

Kako je: $z = e^{sT}$, i kako se D/A pretvornik nalazi ispred prijenosne funkcije procesa, tada za sustav s jediničnom povratnom vezom vrijedi:

$$G_0(z) = Z\{G_{zoh}(s) \cdot G_G(s)\} = Z\left\{\frac{1}{s} (1 - e^{-sT}) \cdot G_G(s)\right\} = (1 - z^{-1}) \cdot Z\left\{\frac{G_G(s)}{s}\right\}$$

Takvu Z – transformaciju nazivamo Z – transformacija prijenosne funkcije u kaskadi.

Matlab rješenje takve transformacije glasi:

```
Ts=0.2
Cd=c2d(Gg, Ts, 'zoh')
```

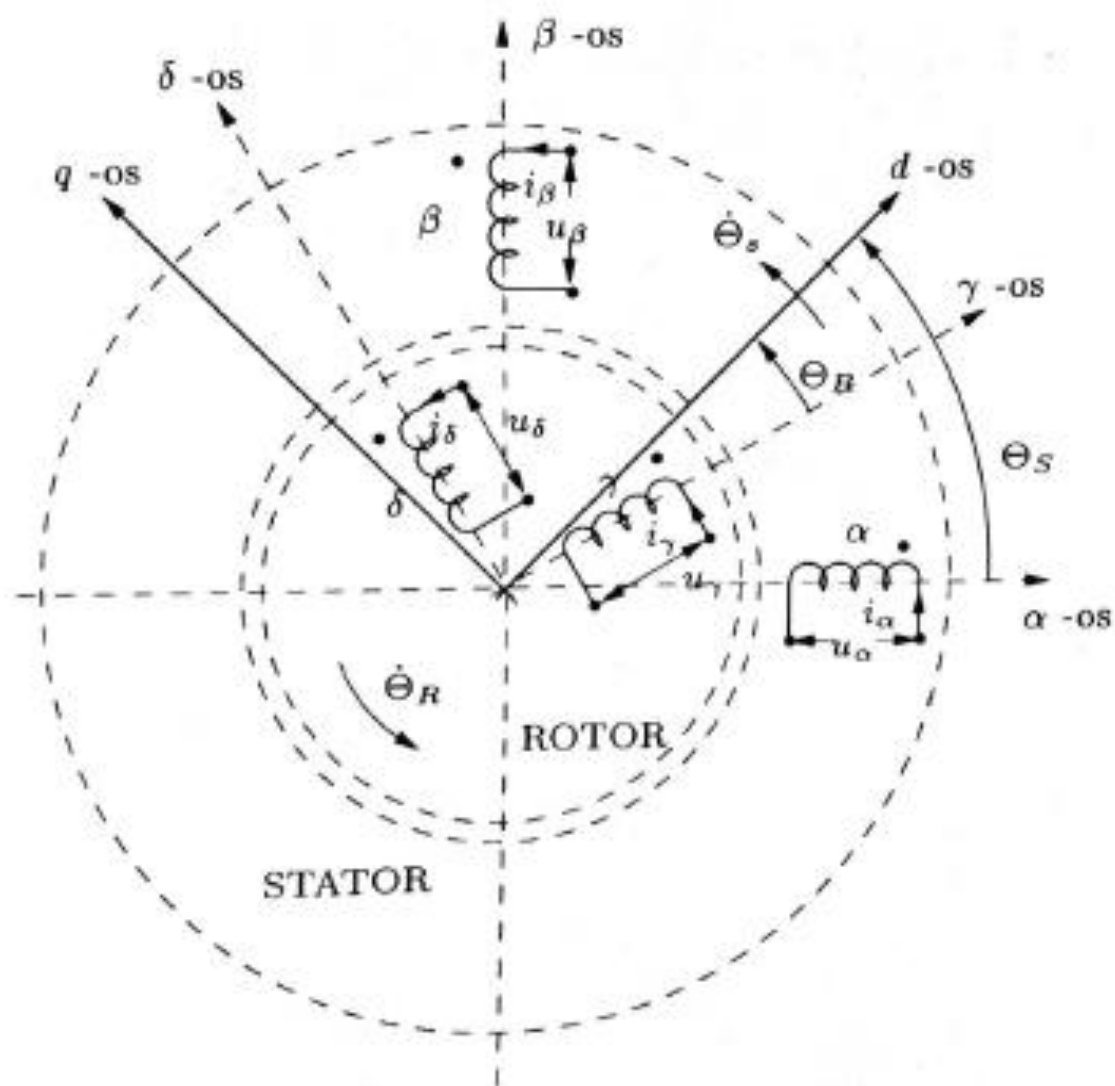
gdje je: $G_g(s)$ – prijednosna funkcija otvorenog kruga

3. 4 Vektorska regulacija asinhronog stroja

Pored jednostavnije i manje precizne skalarne regulacije koja se zasniva na zakonu upravljanja $\frac{U_s}{f} = const.$, razvijena je i koristi se vektorska regulacija izmjeničnih elektromotornih pogona.

Temelj vektorske regulacije je matematički model stroja koji obuhvaća statička i dinamička stanja električkih, magnetskih i mehaničkih pojava u stroju.

Na slici 3.24 prikazan je statorski i rotorski koordinatni sustav s bitnim parametrima koji određuju električne i magnetske pojave u stroju.



Sl. 3.24 - Statorski i rotorski koordinatni sustav (dvo fazni model)¹⁰

¹⁰ Dolinar, Štumberger: Modeliranje in vodenje elektromehanskih sistemov, Maribor, 2002.g.

Na slici 3.24 uočava se ortogonalni koordinatni sustav ($\alpha - \beta$ os) na kojima se nalaze zavojnice magnetiziranja statora kroz koje protječe struja i_α i napon u_β odnosno struja i_β i napon u_α .

Kako na se na ulaz dovodi trofazni napon u opisan matricom:

$$u = \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{bmatrix} = U_{max} \begin{bmatrix} \sin \omega \cdot t \\ \sin(\omega \cdot t - 120^\circ) \\ \sin(\omega \cdot t - 240^\circ) \end{bmatrix}$$

gdje su:

u_a, u_b i u_c – naponi faznih statorskih namotaja [V]

U_m – maksimalni napon [Vg]

$\omega = 2\pi f$ – kutna brzina [rad/sek]

$f = 50 Hz$ – frekvencija mreže

t – vrijeme [sek]

Vrijedi sljedeća transformacija u ortogonalni statorski sustav ($\alpha - \beta$ os) :

$$\begin{bmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{bmatrix}$$

Navedena transformacija naziva se „Clarke“ transformacija, a to je transformacija iz trofaznog sustva abc u dvofazni ortogonalni sustav $\alpha\beta$.

U pogledu struje i vrijedit će sljedeća matrica:

$$i = \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = I_{max} \begin{bmatrix} \sin(\omega \cdot t + \varphi) \\ \sin(\omega \cdot t - 120^\circ + \varphi) \\ \sin(\omega \cdot t - 240^\circ + \varphi) \end{bmatrix}$$

gdje su:

i_a, i_b i i_c – struje statorskih namotaja [A]

I_{max} -maksimalna struja [A]

φ – fazno kašnjenje struje za naponom

Vrijedi sljedeća transformacija u ortogonalni statorski sustav ($\alpha - \beta$ os) :

$$\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix}$$

Osim ortogonalnog koordinatnog sustava, na slici 3.24 prikazan je i zajednički rotirajući koordinatni sustav magnetskog polja ($q - d$ os) kao i rotirajući koordinatni sustav ($\gamma - \delta$ os) na kojem su smješteni rotorski namotaji.

Kut θ_S predstavlja kut zakreta između osi statorskog koordinatnog sustava α i osi zajedničkog koordinatnog sustava d , dok kut θ_R predstavlja kut između rotorskog koordinatnog sustava γ i osi zajedničkog koordinatnog sustava d . Vrijedi relacija:

$$\theta_S = \theta + \theta_R$$

gdje je:

$$\theta - \text{kut rotacije između statorske i rotorske osi [°]}$$

Analogno tome vrijedi:

$$\omega_S = \dot{\theta}_S, \omega = \dot{\theta} \text{ i } \omega_R = \dot{\theta}_R$$

Kutna brzina ω_S je zapravo sinhrona brzina za koju vrijedi relacija:

$$\omega_S = \frac{2 \cdot \pi \cdot f}{p}$$

gdje je:

p - broj pari polova statora

f - frekvencija mreže [Hz]

Transformacija iz ortogonalnog sustava $\alpha - \beta$ u rotirajući koordinatni sustav $q - d$ naziva se „Park“ transformacija i vrijede sljedeće relacije:

$$\begin{bmatrix} u_d \\ u_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_S & \sin \theta_S \\ -\sin \theta_S & \cos \theta_S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_S & \sin \theta_S \\ -\sin \theta_S & \cos \theta_S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix}$$

Izraz za „Clarke – Park“ transformaciju bio bi sljedeći:

$$\begin{bmatrix} u_d \\ u_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_S & -\sin \theta_S \\ \sin \theta_S & \cos \theta_S \end{bmatrix} \cdot \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_S & -\sin \theta_S \\ \sin \theta_S & \cos \theta_S \end{bmatrix} \cdot \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix}$$

Odnosno slijedi:

$$\begin{bmatrix} u_d \\ u_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_S & \cos(\theta_S - 120^\circ) & \cos(\theta_S + 120^\circ) \\ \sin \theta_S & \sin(\theta_S - 120^\circ) & \sin(\theta_S + 120^\circ) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_S & \cos(\theta_S - 120^\circ) & \cos(\theta_S + 120^\circ) \\ \sin \theta_S & \sin(\theta_S - 120^\circ) & \sin(\theta_S + 120^\circ) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix}$$

Invrerzna transformacija glasi:

$$\begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_S & \sin \theta_S \\ \cos(\theta_S - 120^\circ) & \sin(\theta_S + 120^\circ) \\ \cos(\theta_S + 120^\circ) & \cos(\theta_S - 120^\circ) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_d \\ u_q \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_S & \sin \theta_S \\ \cos(\theta_S - 120^\circ) & \sin(\theta_S + 120^\circ) \\ \cos(\theta_S + 120^\circ) & \cos(\theta_S - 120^\circ) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}$$

Napone $\begin{bmatrix} u_d \\ u_q \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}$ struje možemo podijeliti u njihove statorske i rotorske komponente kako slijedi:

a) Statorske komponente jesu: $\begin{bmatrix} u_{sd} \\ u_{sq} \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{bmatrix}$

b) Rotorske komponente jesu: $\begin{bmatrix} u_{rd} \\ u_{rq} \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} i_{rd} \\ i_{rq} \end{bmatrix}$

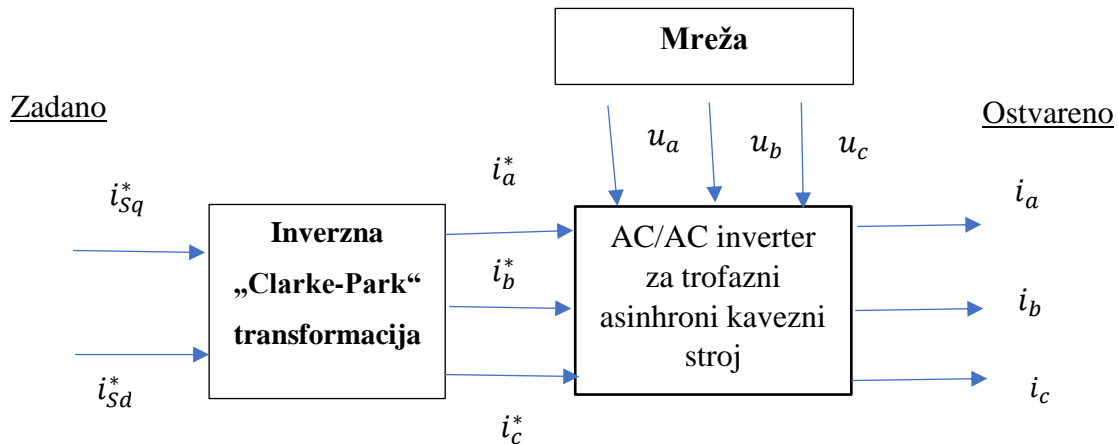
Naponi u_{rd} i u_{rq} iznose nula zbog fizičke izvedbe asinhronog kavezno stroja, dok vrijednosti struja i_{rd} i i_{rq} nisu mjerljive, stoga se za potrebe matematičkog modeliranja asinhronog stroja nadomještaju ili preoblikuju magnetskim tokovima ψ_{rd} i ψ_{rq} koji jednako tako nisu mjerljivi, ali pojednostavljaju matematičko modeliranje rada asinhronog stroja.

Ono što je važno naglasiti je da se:

- strujom i_{sq} regulira moment stroja M_{el}
- strujom i_{sd} regulira magnetski tok rotora ψ_{rd}

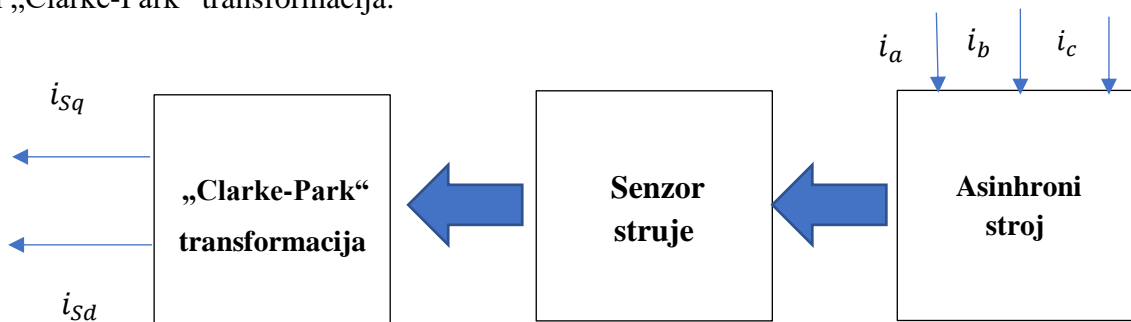
U tom slučaju energetski dio stroja (inverter) morao bi na svom ulazu imati zadane vrijednosti struja statora i_a^* , i_b^* i i_c^* , dok bi na izlazu bile ostvarene vrijednosti i_a , i_b i i_c kojima se napaja asinhroni stroj. S time da se zadane vrijednosti struja statora i_a^* , i_b^* i i_c^* određuju inverznom „Clarke-Park“ transformacijom na temelju zadanih vrijednosti struja i_{sq}^* i i_{sd}^* .

Shematski prikaz invertera bio bi sljedeći, prikazan na slici 3.25 a).



Sl. 3.25 a) – Shematski prikaz invertera asinhronog stroja

Na slici 3.25 b) prikazane su izmjerene struje iz asinhronog stroja na način da se koristi senzor struje i „Clarke-Park“ transformacija.



Sl. 3.25b) – Shematski prikaz izmjerene struje asinhronog stroja

Princip regulacije opisan je sljedećim relacijama gdje su e_{sq} i e_{sd} regulacijska odstupanja i morala bi težiti nuli:

$$e_{sq} = i_{sq}^* - i_{sq} \rightarrow 0$$

$$e_{sd} = i_{sd}^* - i_{sd} \rightarrow 0$$

Slijedom prije navedenoga potrebno je odrediti matematički model asinhronog stroja u $d - q$ sustavu. Pretpostavka primjene „Clarke-Park“ transformacije je da su namotaji statora asinhronog stroja spojeni u zvijezdu i da vrijedi:

$$i_a + i_b + i_c = 0$$

Na slici 3.26 prikazana je shema spajanja trofaznog stroja na nižem i višem naponu. Na nižem naponu radi se o spoju trokut (Δ), dok se na višem naponu radi o spoju zvijezda (Y).

Shema spajanja	NIŽI NAPON (spoj Δ) LOWER VOLTAGE (Δ connection) NIEDRIGE SPANNUNG (Δ Schaltung)	VIŠI NAPON (spoj Y) HIGHER VOLTAGE (Y connection) HÖHERE SPANNUNG (Y Schaltung)
NAMOT U SPOJU D/Y WINDING CONNECTED IN D/Y WICKLUNG GESCHALTET IN D/Y		
HEMA PRIKLJUČKA NA MREŽU DIAGRAM OF TERMINALS FOR POWER SUPPLY KLEMMENSCHALTPLAN AUF NETZ		

Sl. 3.26 – Spoj trokut -zvijezda asinhronog stroja [katalog Končar]

Kako bi asinhroni stroj mogao raditi u spoju trokut, njegovi namotaji moraju biti prilagođeni linijskom naponu od 400V. No, ako stroj radi u spoju zvijezda njegovi namotaji moraju biti prilagođeni naponu od 660V. Tako se asinhroni kavezni strojevi snage do 2,2 kW izrađuju standardno u spoju trokut (Δ 230/400V), dok se strojevi snage iznad 3 kW izrađuju u spoju zvijezda (Y 380/660V).

Za asinhroni kavezni stroj čiji je rotor „kratko spojen“ naponske jednadžbe glase:

$$u_a = R_a \cdot i_a + \frac{d\psi_a}{dt}$$

$$u_b = R_b \cdot i_b + \frac{d\psi_b}{dt}$$

$$u_c = R_c \cdot i_c + \frac{d\psi_c}{dt}$$

gdje su:

u_a, u_b i u_c – naponi faznih statorskih namotaja [V]

i_a, i_b i i_c – struje statorskih namotaja [A]

R_a, R_b i R_c – radni otpori statorskih namotaja [Ω]

ψ_a, ψ_b i ψ_c – magnetni tokovi statorskih namotaja [Wb]

Naponske jednadžbe u dvofaznom sustavu $d - q$ glasile bi:

$$U_{sd} = i_{sd} \cdot R_S + \frac{d}{dt} \left(\psi_{Rd} \cdot \frac{L_{MI}}{L_R} + i_{sd} \cdot L_\sigma \right) - \omega_S \left(\psi_{Rd} \cdot \frac{L_{MI}}{L_R} + i_{sd} \cdot L_\sigma \right)$$

$$U_{sq} = i_{sq} \cdot R_S + \frac{d}{dt} \left(\psi_{Rq} \cdot \frac{L_{MI}}{L_R} + i_{sq} \cdot L_\sigma \right) - \omega_S \left(\psi_{Rq} \cdot \frac{L_{MI}}{L_R} + i_{sd} \cdot L_\sigma \right)$$

gdje je: $L_\sigma = L_S - \frac{L_{MI}^2}{L_R}$ – reducirani induktivitet [H]

L_R i L_S – induktivitet rotora odnosno statora [H]

L_{MI} – međuinduktivite (utjecaj rotora na stator i obrnuto)

Izabrani sustav regulacije asinhronog stroja naziva se još *Field Oriented Control, FOC*, a temeljni uvjet upravljanja je da vrijedi:

$$\psi_{Rq} = 0 \text{ odnosno } \frac{d}{dt} \psi_{Rq} = 0$$

Na taj način magnetski tok će biti prisutan samo u d osi.

Vektorsko upravljanje (*Field Oriented Control, FOC*) suvremena je metoda regulacije asinhronog stroja jer omogućuje brže i preciznije upravljanje od upravljanja DC strojem. Prednosti takve regulacije očituju se u brzom odzivu na promjenu opterećenja (tereta stroja), u preciznijoj regulaciji brzine vrtnje stroja, u mogućnosti postizanja maksimalnog prekretnog momenta kod pokretanja stroja i sl. Polazeći od prije navedenih uvjeta, vrijede sljedeće jednadžbe u nakon Lapalove transformacije:

$$\psi_{Rd}(s) = \frac{L_{MI}}{1 + T_a \cdot s} I_{sd}(s)$$

$$\omega_R(s) = \frac{L_{MI}}{T_a} \cdot \frac{I_{sq}(s)}{\psi_{Rd}}$$

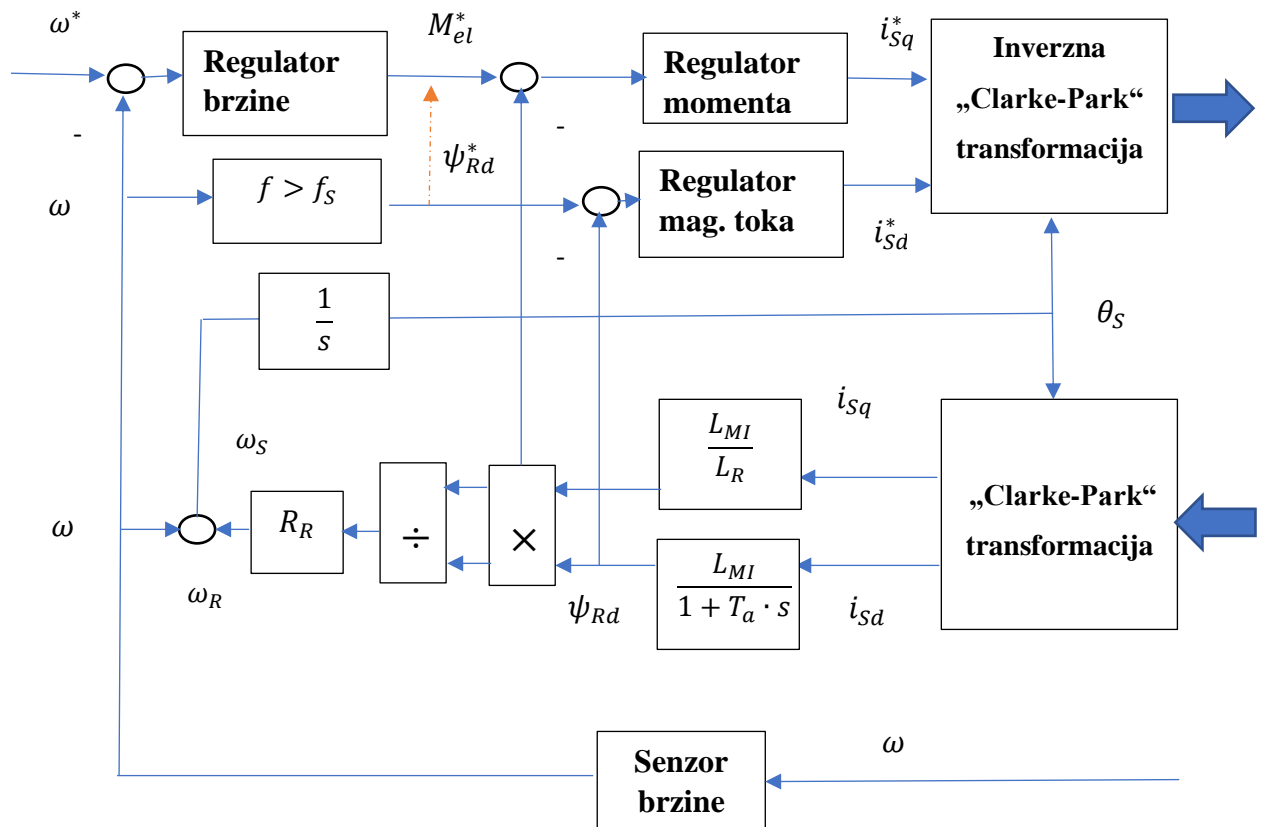
$$M_{el}(s) = p \cdot \frac{L_{MI}}{L_R} \cdot \psi_{Rd} \cdot I_{sq}(s)$$

gdje:

$$T_a = \frac{L_R}{R_R} - \text{električna vremenska konstanta rotora [sek]}$$

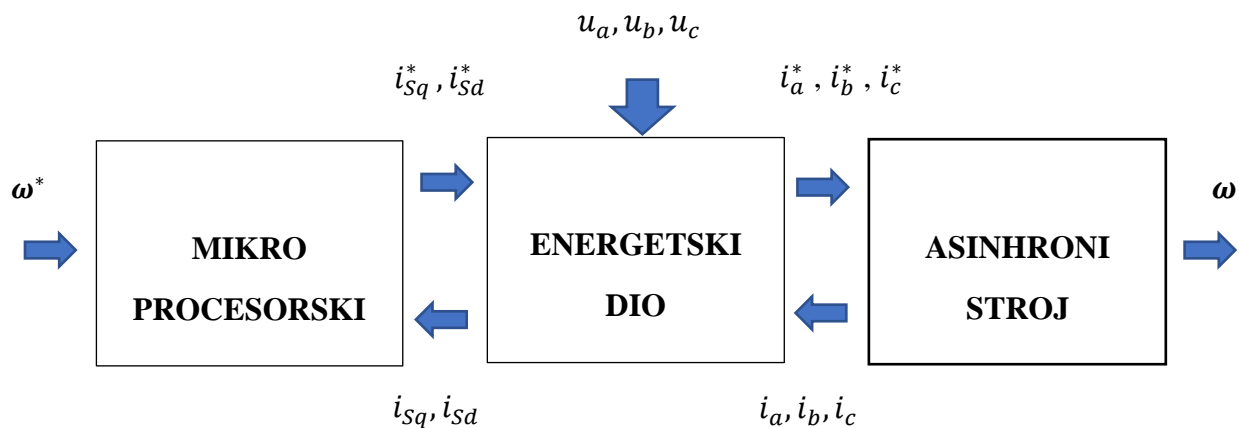
Slijedom prije navedenih relacija moguće je proširiti područje regulacije na način da se zadaju vrijednosti: moment stroja M_{el}^* , kutne brzine vrtnje stroja ω^* i referentni magnetski tok ψ_{Rd}^* . U tom slučaju uvodi se estimator momenta stroja M_{el} , magnetnog toka ψ_{Rd} i rotirajućeg kuta θ_S , te se uvode tri PI regulatora (brzine vrtnje, momenta stroja i referentnog magnetskog toka).

Na slici 3.27 prikazan je estimator i regulatori asinhronog kaveznog stroja u slučaju vektorske regulacije.



Sl. 3.27 - Estimator i regulatori asinhronog kaveznog stroja u slučaju vektorske regulacije

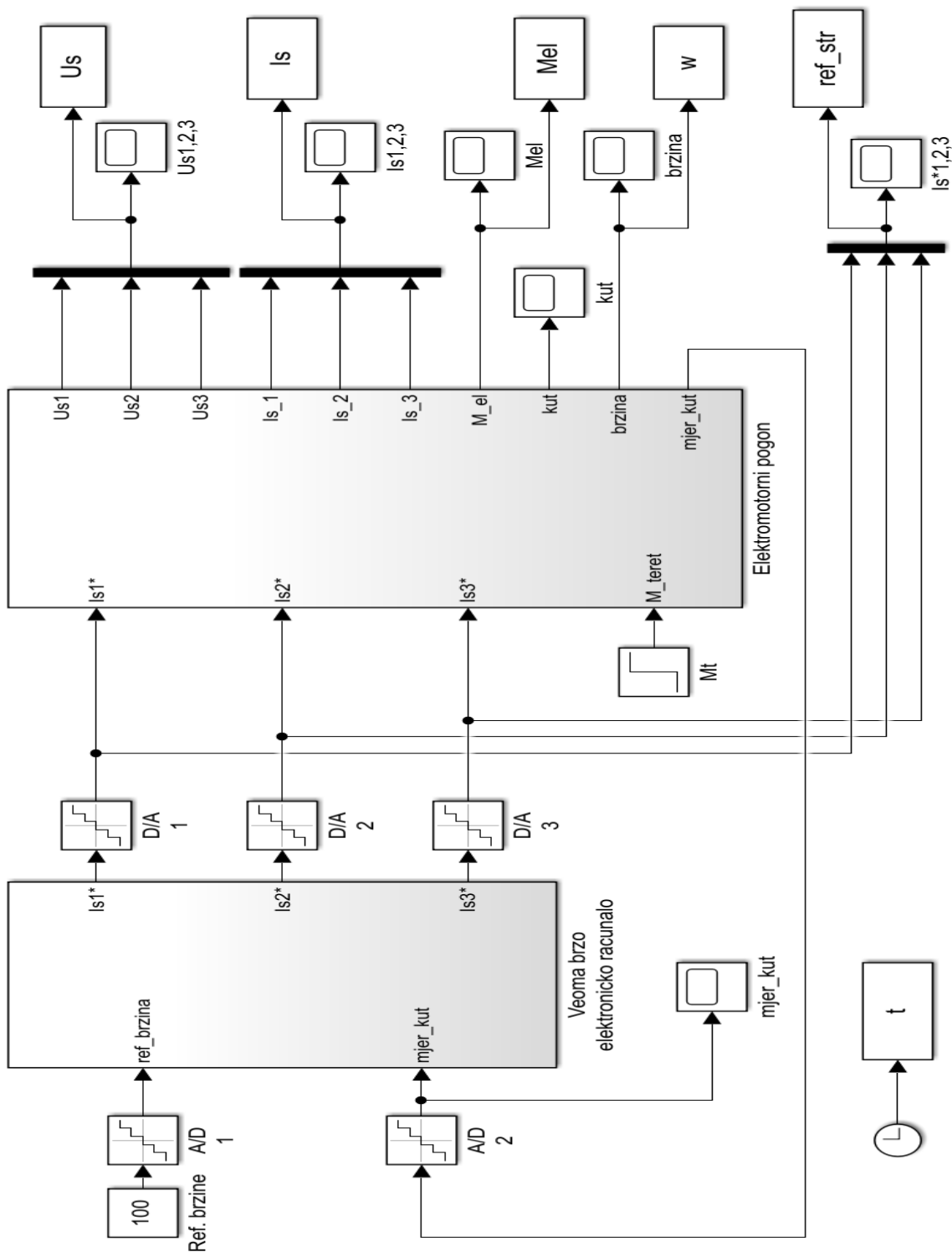
Na prethodnim slikama prikazan je energetska i mikropocesorski dio asinhronog stroja, dok je na slici 3.28 prikazana međusobna povezanost tih djelova s asinhronim strojem.



Sl. 3.28 – Međusobna povezano mikorprocesorskog i energetskog dijela sa strojem

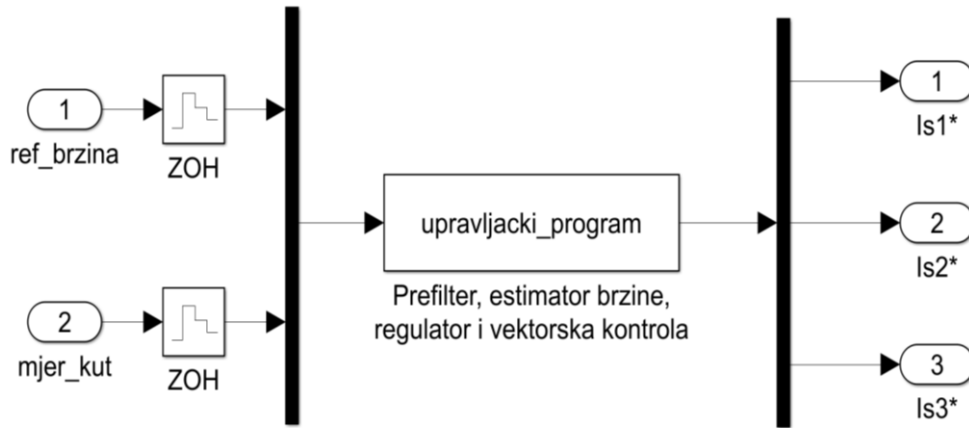
Polazeći od prije navedenih načina regulacije asinhronog kaveznog stroja (skalarna i vektorska regulacija) izrađeni su odgovarajući simulacijski modeli u MatLab-u.

Na slici 3.28 prikazan je model regulacije referentne brzine.



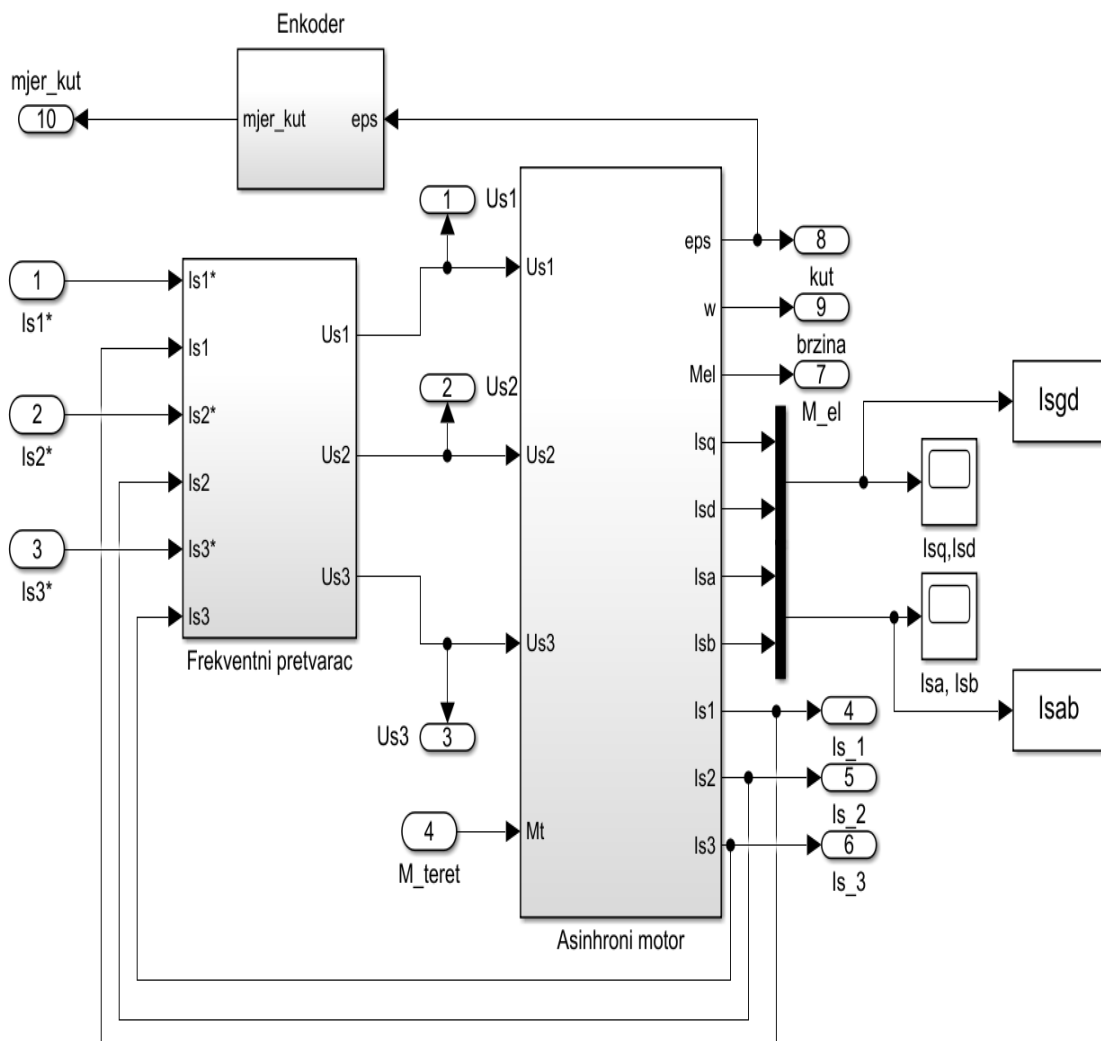
Sl. 3.28 – Regulacija referentne brzine

U funkciji regulacije pogona koristi se veoma brzo računalo koje može obraditi veliki broj podataka i sastoji se od predfiltera, estimatora brzine, regulatora i vektorske kontrole. Shematski prikaz upravljačkog dijela sustava dat je na slici 3.29.



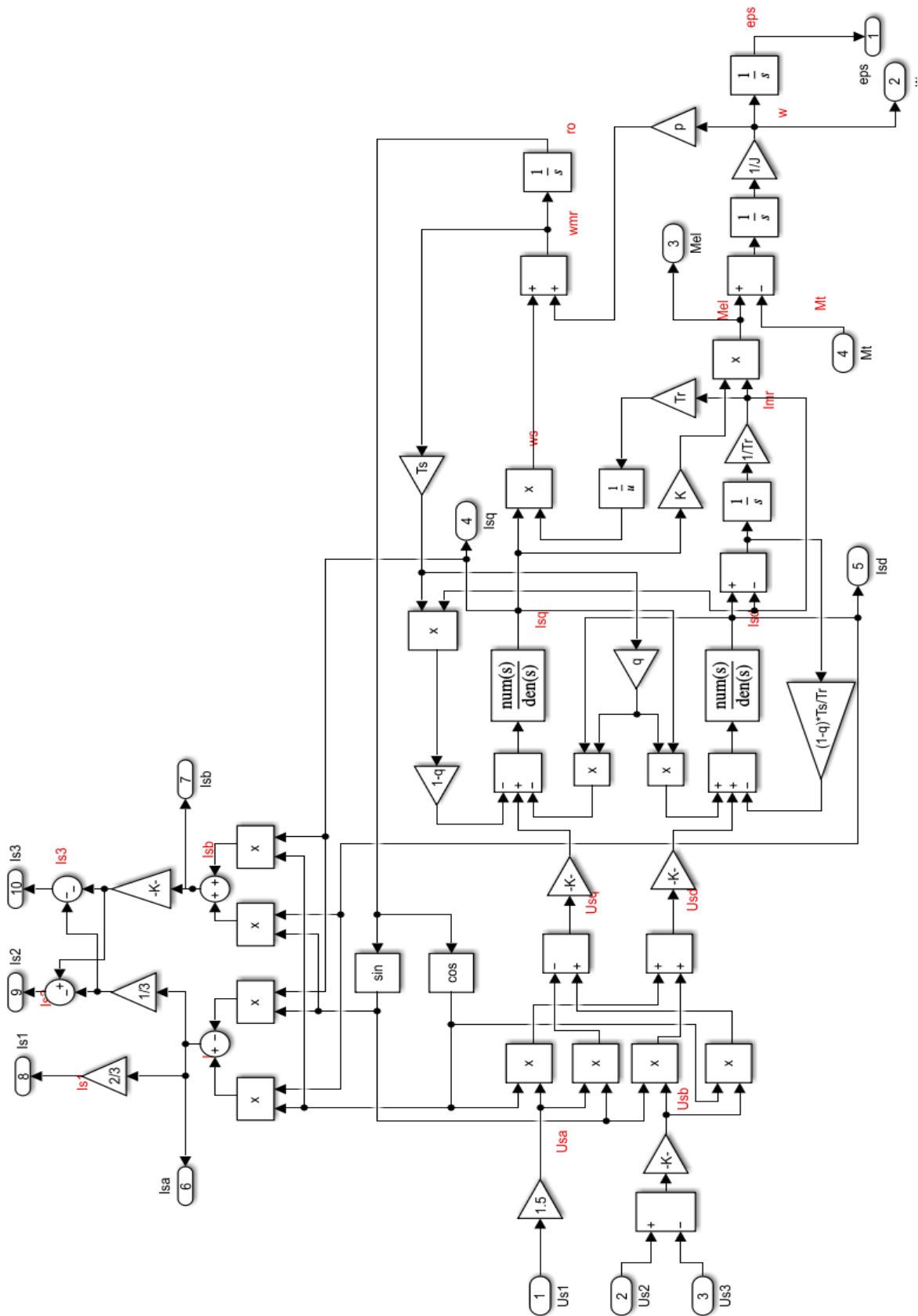
Sl. 3.29 – Shematski prikaz regulacije uz pomoć računala - upravljački dio

Na slici 3.30 prikazan je dio pogona kojim se upravlja, a sastoji od enkodera, frekvencijskog pretvarača i asinhronog stroja.



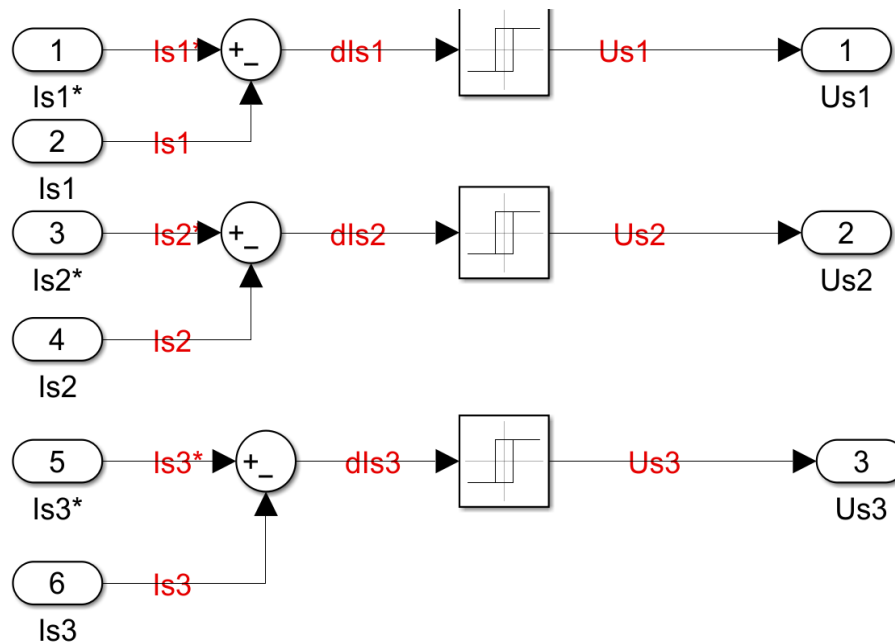
Sl. 3.30 – Pogon – upravljani dio

Na slici 3.31 prikazana je simulacijski model asinhronog stroja.



Sl. 3.31 – Simulacijski model asinhronog stroja

Na slici 3.32 prikazan je simulacijski model frekvencijskog pretvarača.



Sl. 3.32 – Simulacijski model frekvencijskog pretvarača

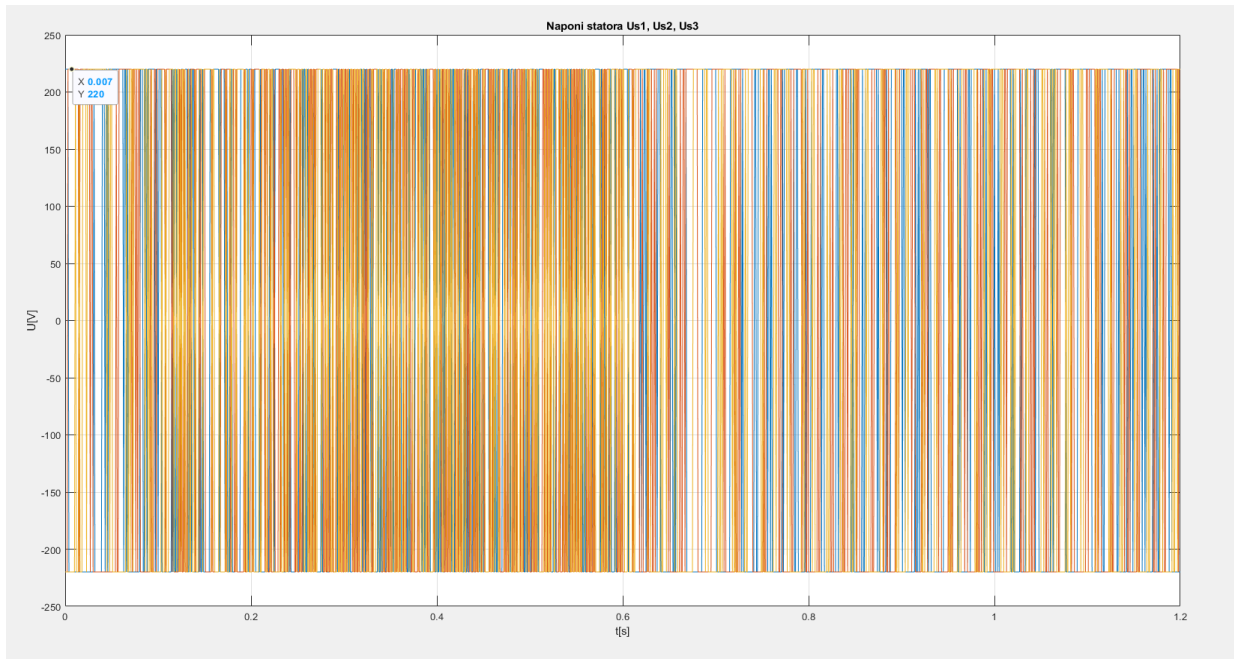
Parametri sustava zadani su sljedećom MatLab rutinom.

```
%PARAMETRI ASINHRONOG MOTORA
p=2; %broj pari polova
Rs=1.95; %otpor statora
Ls=0.244; %induktivitet statora
Rr=1.66; %otpor rotora
Lr=0.244; %induktivitet rotora
L0=0.233; %medjuinduktivitet izmedju statora i rotora
J=0.025; %moment inercije
Ts=Ls/Rs; %vremenska konstanta statora
Tr=Lr/Rr; %vremenska konstanta rotora
qr=(Lr/L0)-1; %koeficijent rasipanja statora
qs=(Ls/L0)-1; %koeficijent rasipanja rotora
K=(2*p/3)*(L0/(1+qr));
q=1-(L0^2/(Lr*Ls));
Mt=20; %moment tereta na osovini

%PARAMETRI REGULATORA BRZINE I VEKTORSKOG UPRAVLJANJA
RefTok=1.2; %referenca toka
Tpref=0.06; %vrem. konst. prefiltera
Td=0.001; %period diskretizacije
Kp=1.30; %proporcionalni dio
Ki=22; %integralni dio
Mmax=80; %ogranicenje momenta
```

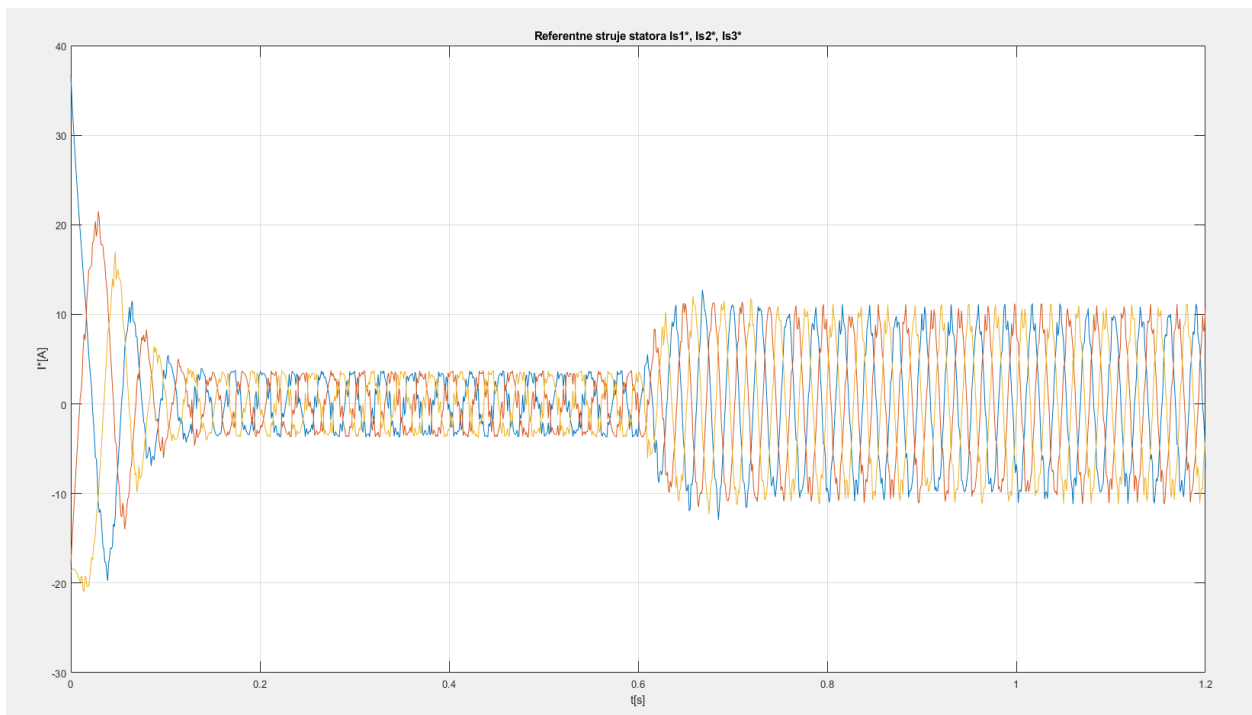
Na sljedećim dijagramima prikazani su rezultati simulacije regulacije referentne brzine asinhronog stroja. Zadana kutna brzina je $\omega = 100 \text{ rad/sek}$, zadani moment tereta je $M_t = 20 \text{ Nm}$ i teret se uključuje u 0,6 sekundi od početka rada stroja.

Na slici 3.33 prikazan je ulazni fazni napon koji iznosi maksimalno 220V.



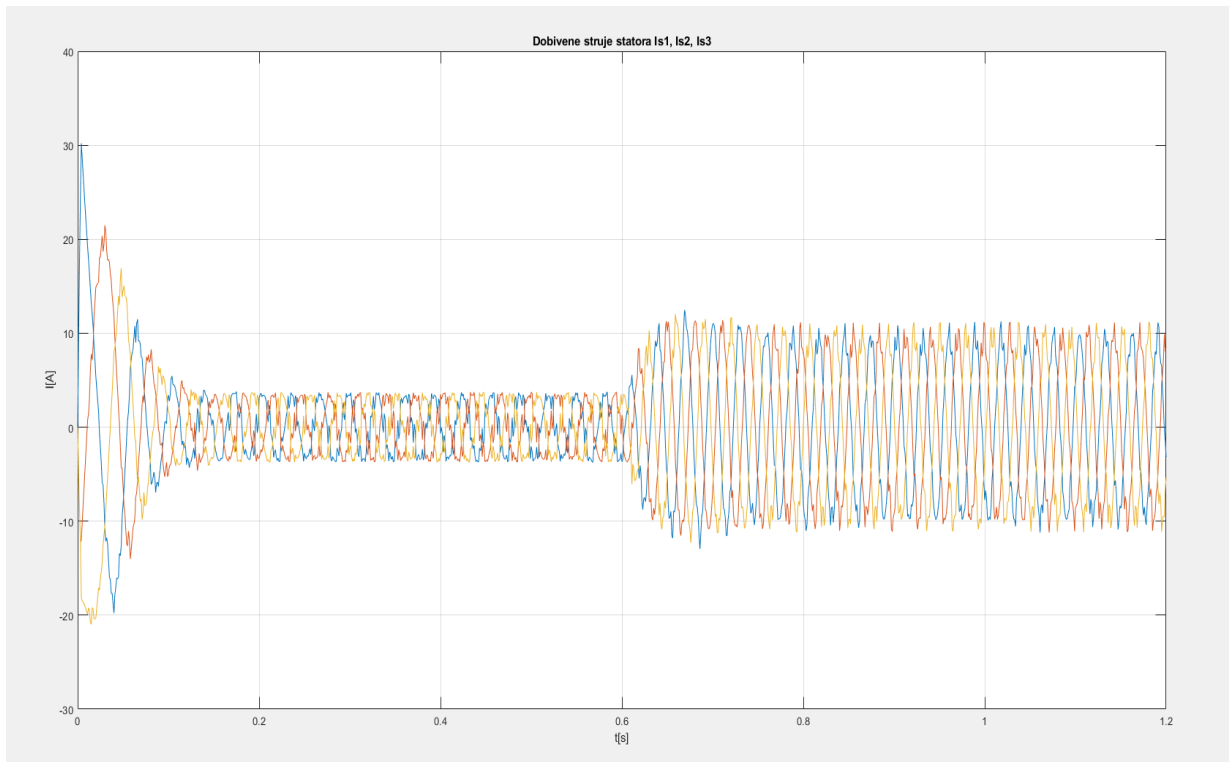
Sl. 3.33 – Ulazni fazni napon u_a, u_b, u_c

Na slici 3.34 prikazane su referentne struje statora.



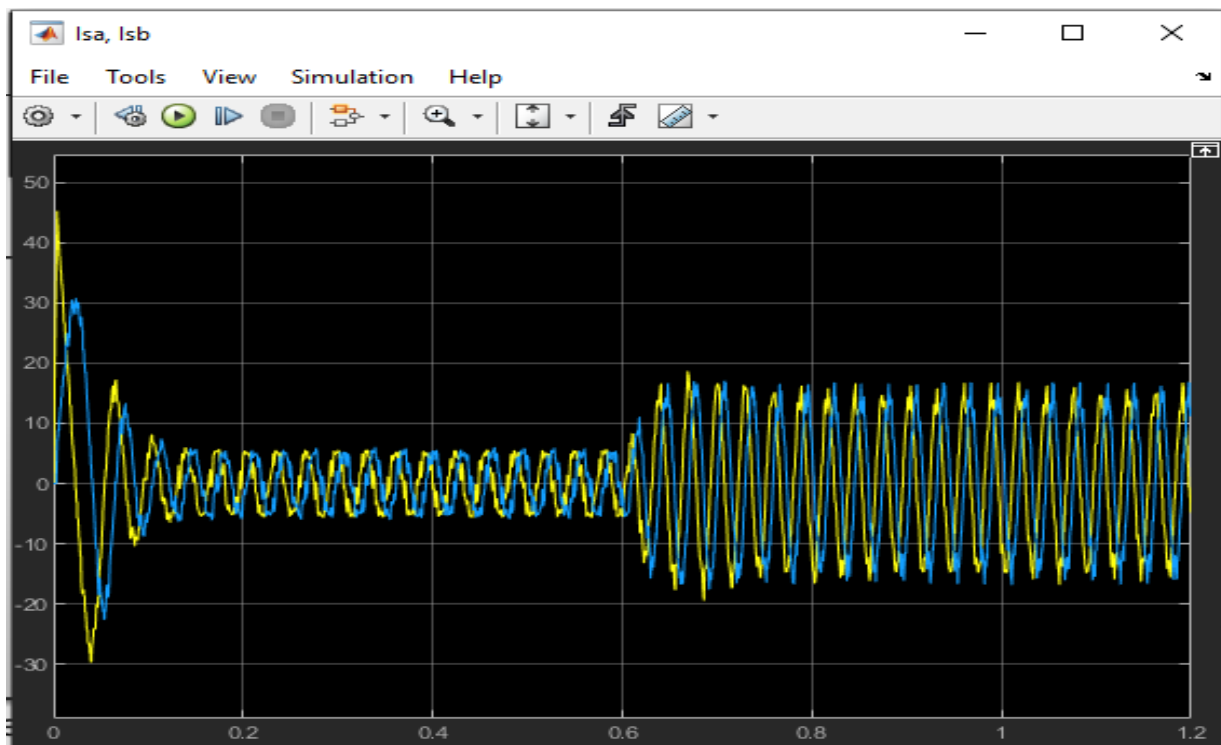
Sl. 3.34 – Referentne struje statora i_a^*, i_b^*, i_c^*

Na slici 3.35 prikazane su ostvarene struje statora.



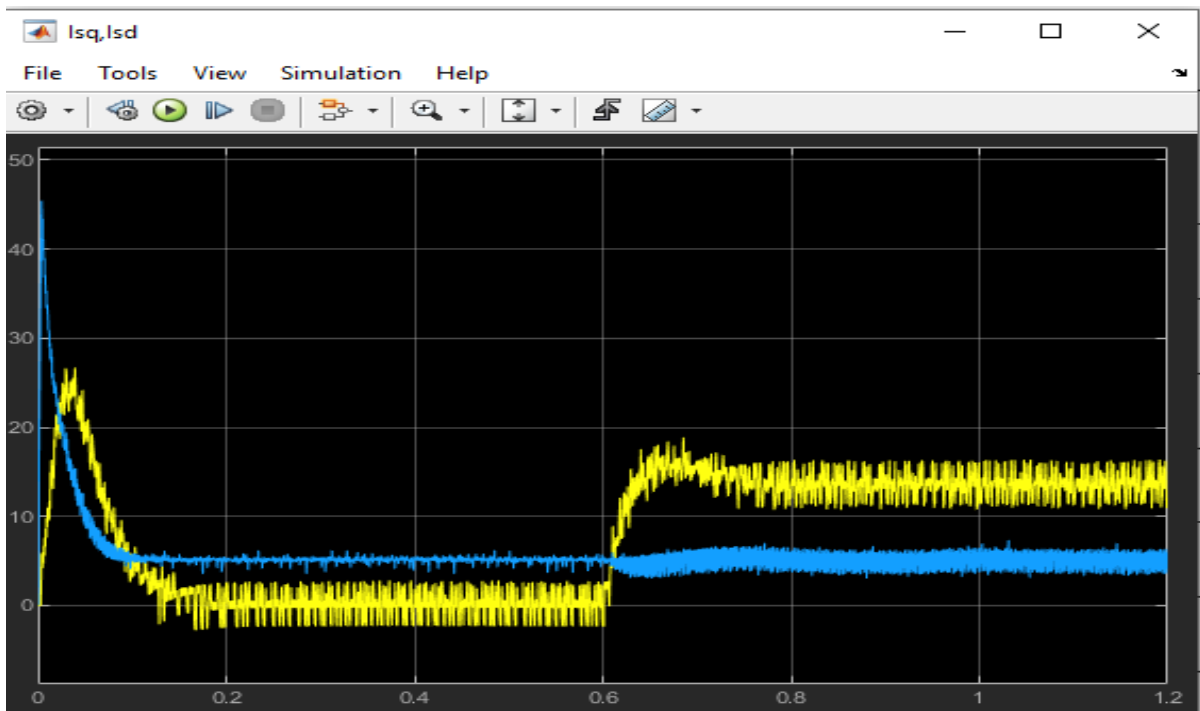
Sl. 3.35 – Ostvarene struje statora i_a, i_b, i_c

Na slici 3.36 prikazane su struje $i_\alpha = I_{sa}$ i $i_\beta = I_{sb}$, a koje su dobivene na temelju „Clarke“ transformacije.



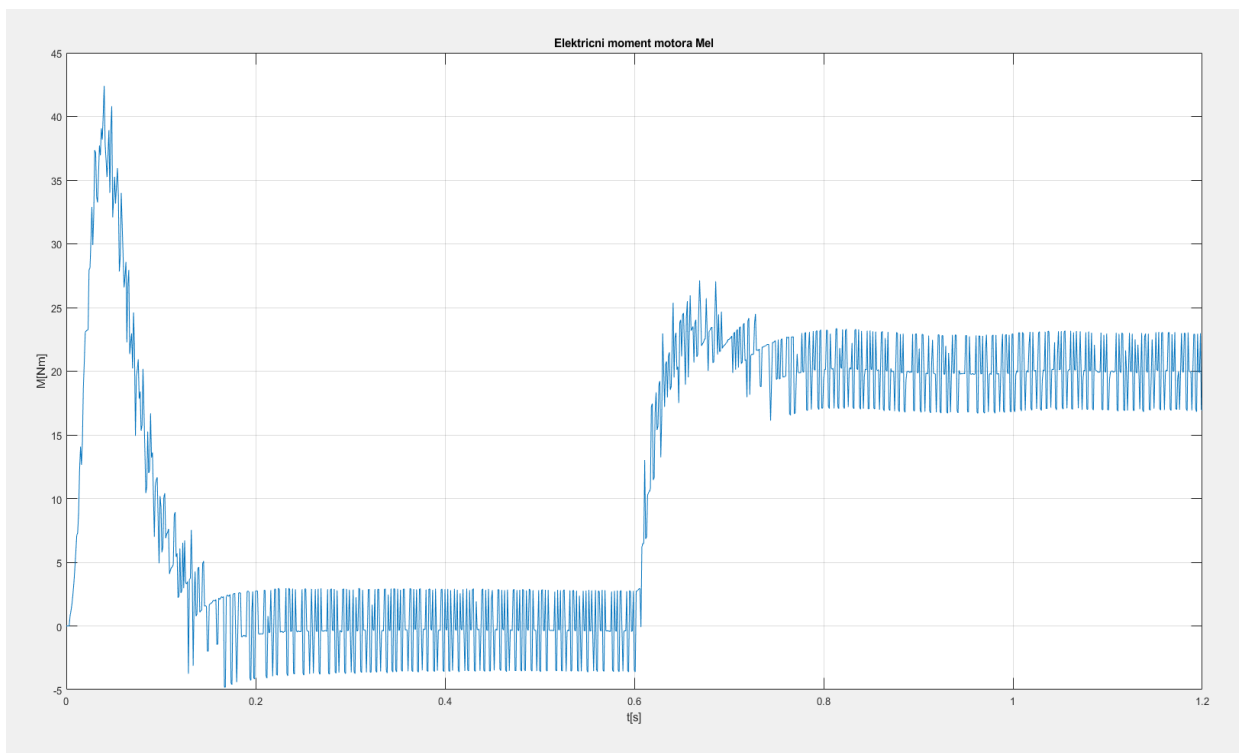
Sl. 3.36 – Struje dobivene na temelju temelju „Clarke“ transformacije i_α i i_β

Na slici 3.37 prikazane su struje $i_{sq} = I_{sq}$ i $i_{sd} = I_{sd}$, a koje su dobivene na temelju „Clarke-Park“ transformacije.



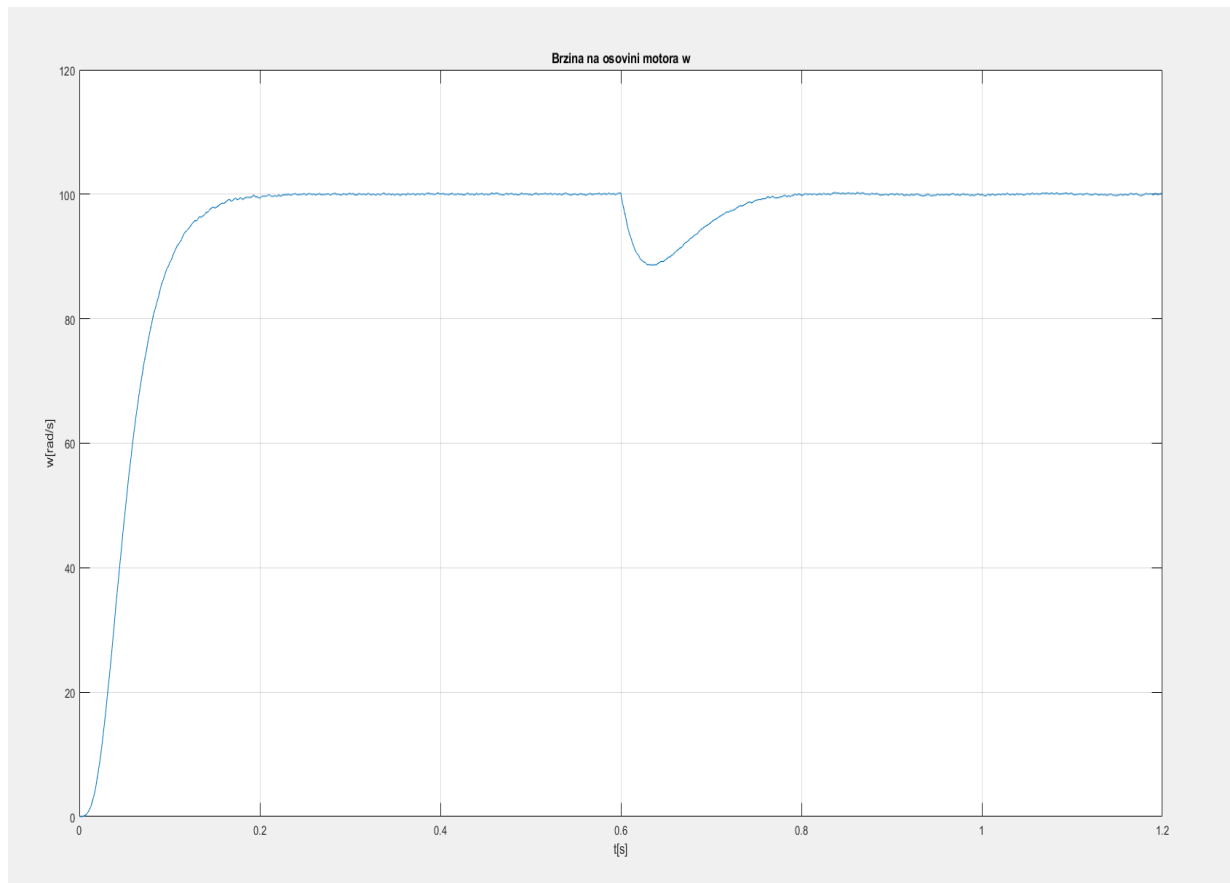
Sl. 3.37 - Struje dobivene na temelju „Clarke-Park“ transformacije i_{sq} i i_{sd}

Na 3.38 prikazan je električni moment stroja.



Sl. 3.38 – Električni moment stroja M_{el}

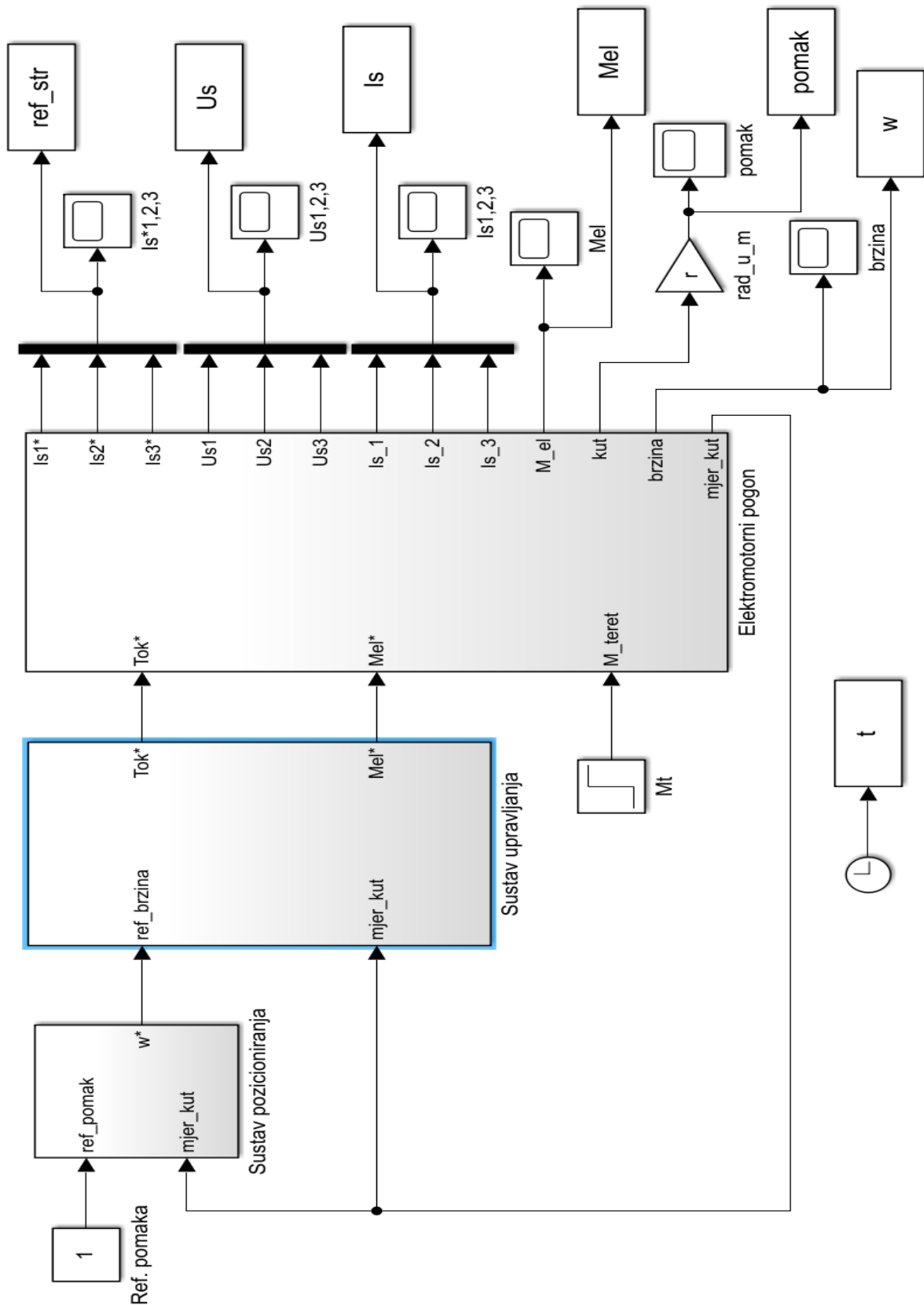
Električni moment stroja M_{el} posljedica je struje i_{sq} kako je vidljivo s prethodnih dijagrama. Završno na slici 3.39 prikazan je dijagram brzine. Referentna kutna brzina iznosi $\omega = 100 \text{ rad/sek}$ odnosno $n = 954,93 \text{ okr/min}$, dok je moment tereta iznosio $M_t = 20 \text{ Nm}$.

Sl. 3.39 – Kutna brzina stroja ω

Prema slici 3.39 može se zaključiti kako je prijelazni proces trajao $T_s = 0,2 \text{ sek}$, kako se teret uljučio u stacionarnom (ustaljenom) stanju u 0,6 sek, te kako je regulacijski sustav automatski reagirao i vratio trenutnu brzinu na referentnu brzinu. Pad brzine bio je približno $\Delta\omega = 10 \text{ rad/sek}$, a vrijeme prijelaznog procesa bilo je u istim granicama od 0,2 sek. Prijelazni proces ima monotoni karakter bez značajnih oscilacija, što znači da su parametri regulacije u odnosu na parametre snage dobro odabrani.

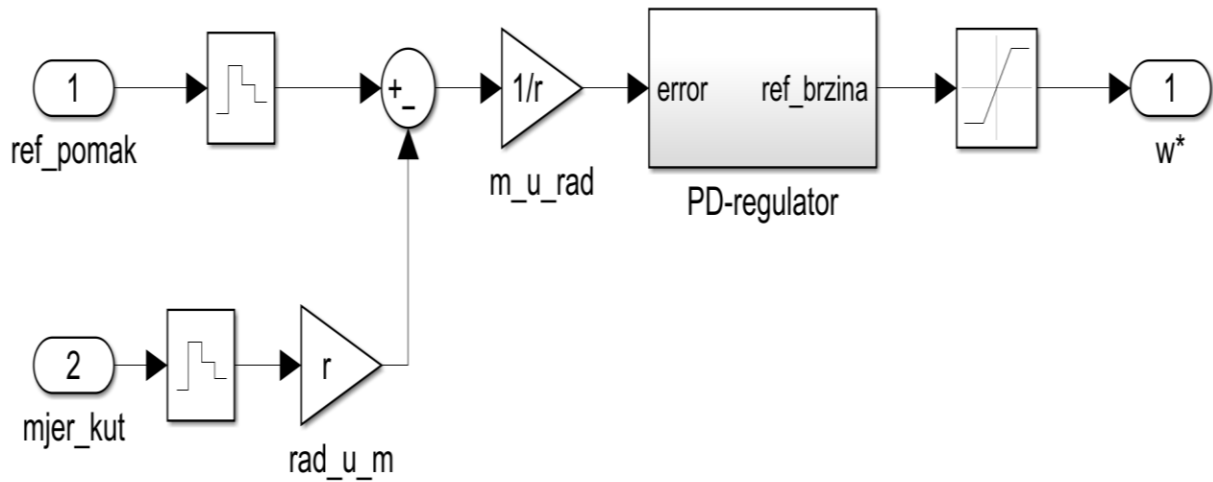
U prethodnom primjeru prikazan je model regulacije referentne brzine, dok će se na sljedećem primjeru analizirati model regulacije referentnog pomaka.

Na slici 3.40 prikazan je model regulacije referentnog pomaka. Referentni pomak iznosi 1m.



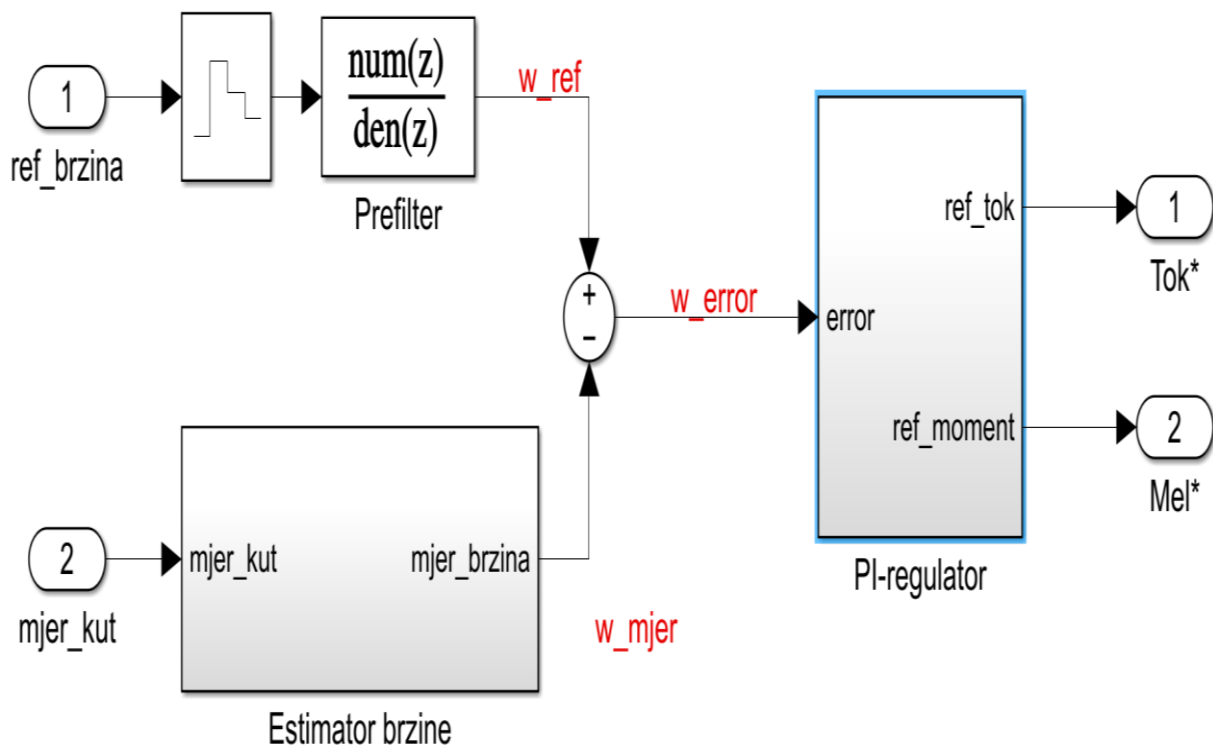
Sl. 3.40 – Regulacija referentnog pomaka

Na slici 3.41 prikazan je sustav pozicioniranja s PD regulatorom.



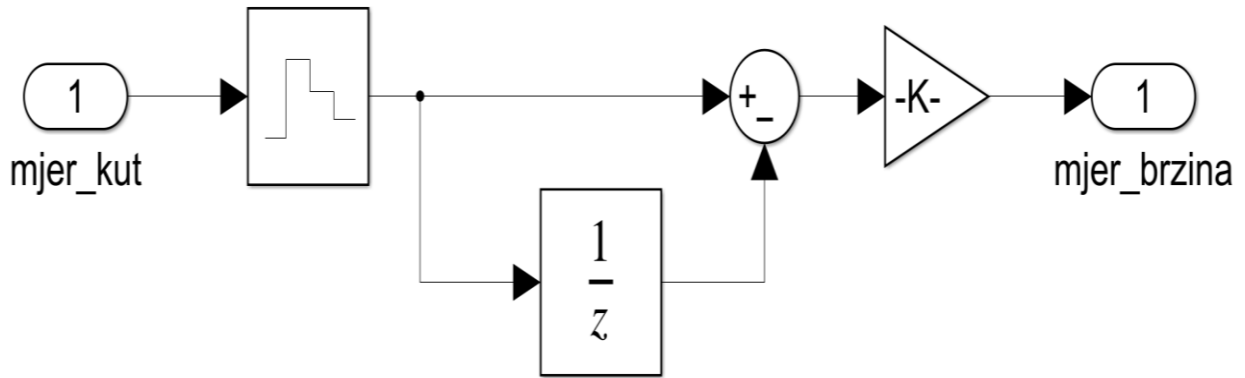
Sl. 3.41 – Sustav pozicioniranja s PD regulatorom

Na slici 3.42 prikazan je sustav upravljanja koji se staoji od predfiltra, estimatora brzine i PI regulatora.

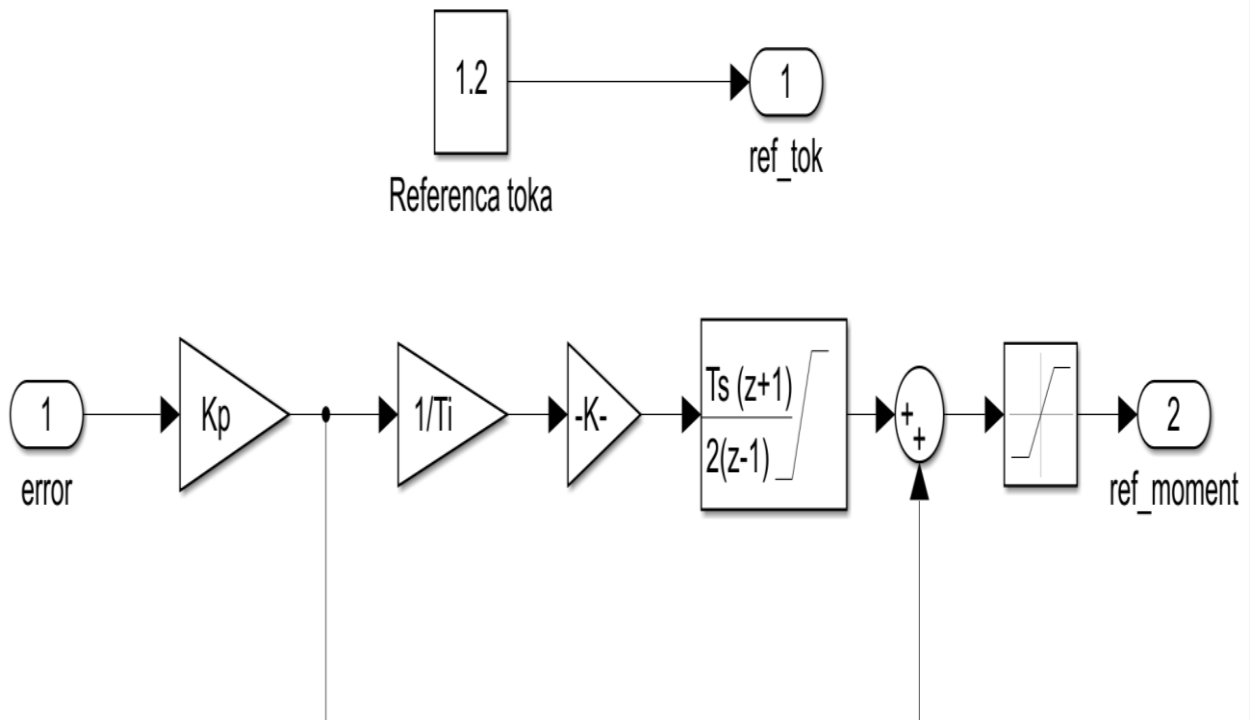


Sl. 3.42 – Sustav upravljanja

Na slici 3.43 prikazan je estimator brzine, dok je na slici 3.44 prikazan PI regulator u diskretnom području.

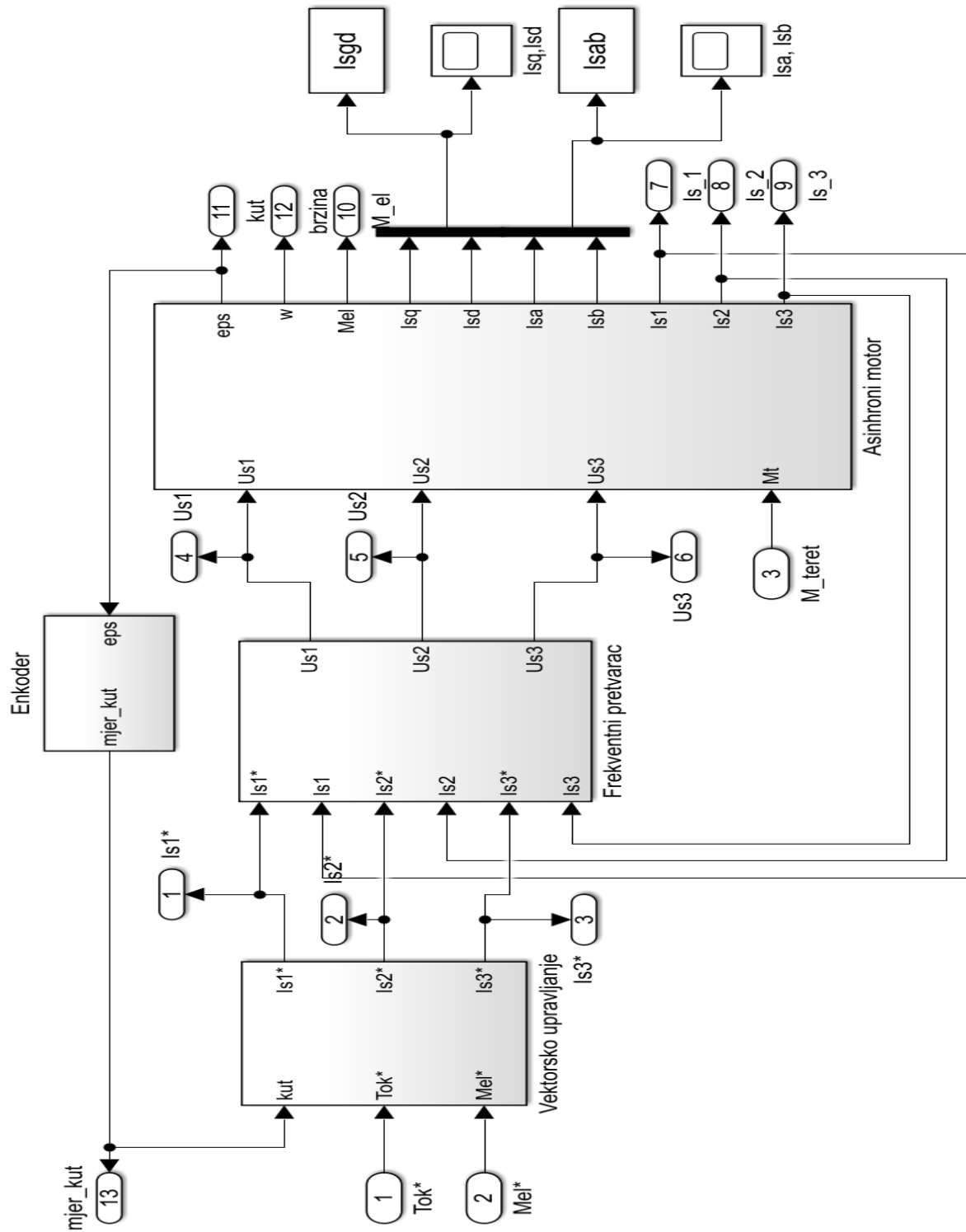


Sl. 3.43 – Estimator brzine



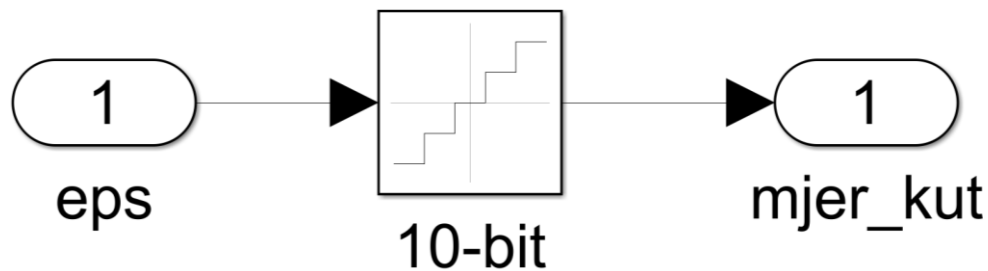
Sl. 3.44 – PI regulator

Na slici 3.45 prikazan je simulacijski pogona koji se sastoji od endkodera, vektorskog upravljanja, frekvencijskog pretvarača i asinhronog kaveznog stroja.



Sl. 3.45 – Ppogon – upravljani dio

Na slici 3.47 prikazana je shema endkodera.



Sl. 3.47 - Endkoder

Parametri sustava zadani su sljedećom MatLab rutinom.

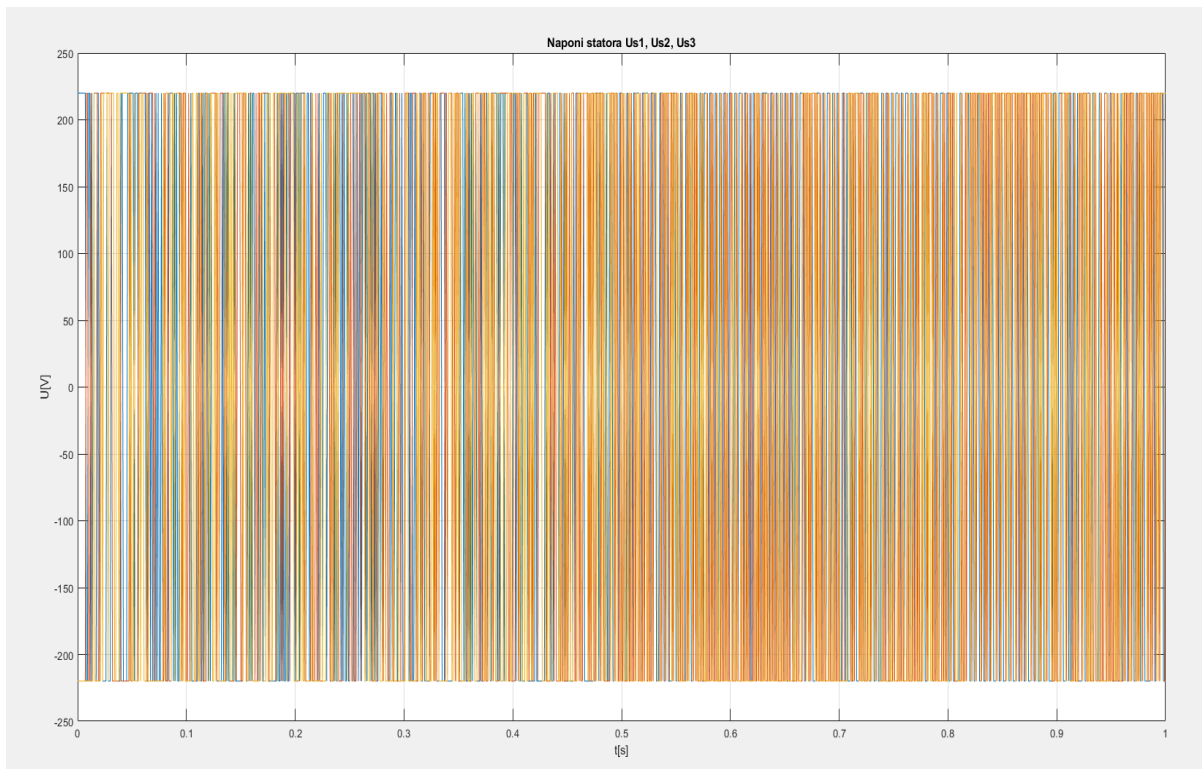
```
%PARAMETRI ASINHRONOG MOTORA
p=2;           %broj pari polova
Rs=1.95;      %otpor statora
Ls=0.244;     %induktivitet statora
Rr=1.66;      %otpor rotora
Lr=0.244;     %induktivitet rotora
L0=0.233;     %medjuinduktivitet izmedju statora i rotora
J=0.025;     %moment inercije
Ts=Ls/Rs;     %vremenska konstanta statora
Tr=Lr/Rr;     %vremenska konstanta rotora
qr=(Lr/L0)-1; %koeficijent rasipanja statora
qs=(Ls/L0)-1; %koeficijent rasipanja rotora
K=(2*p/3)*(L0/(1+qr));
q=1-(L0^2/(Lr*Ls));
Mt=20;        %moment tereta na osovini

%PARAMETRI PI-REGULATORA BRZINE
Td=0.008;     %period diskretizacije
Kp=1.3;       %pojacanje PI-regulatora
Ti=8;         %integralna vremenska konstanta
Mmax=80;      %ogranicenje momenta

%PARAMETRI SUSTAVA REGULACIJE POZICIJE
Kpp=6;        %pojacanje PD-regulatora
Tdp=0.03;     %derivacijska vremenska konstanta
r=0.05;       %prijenosni omjer (radijus) reduktora
```

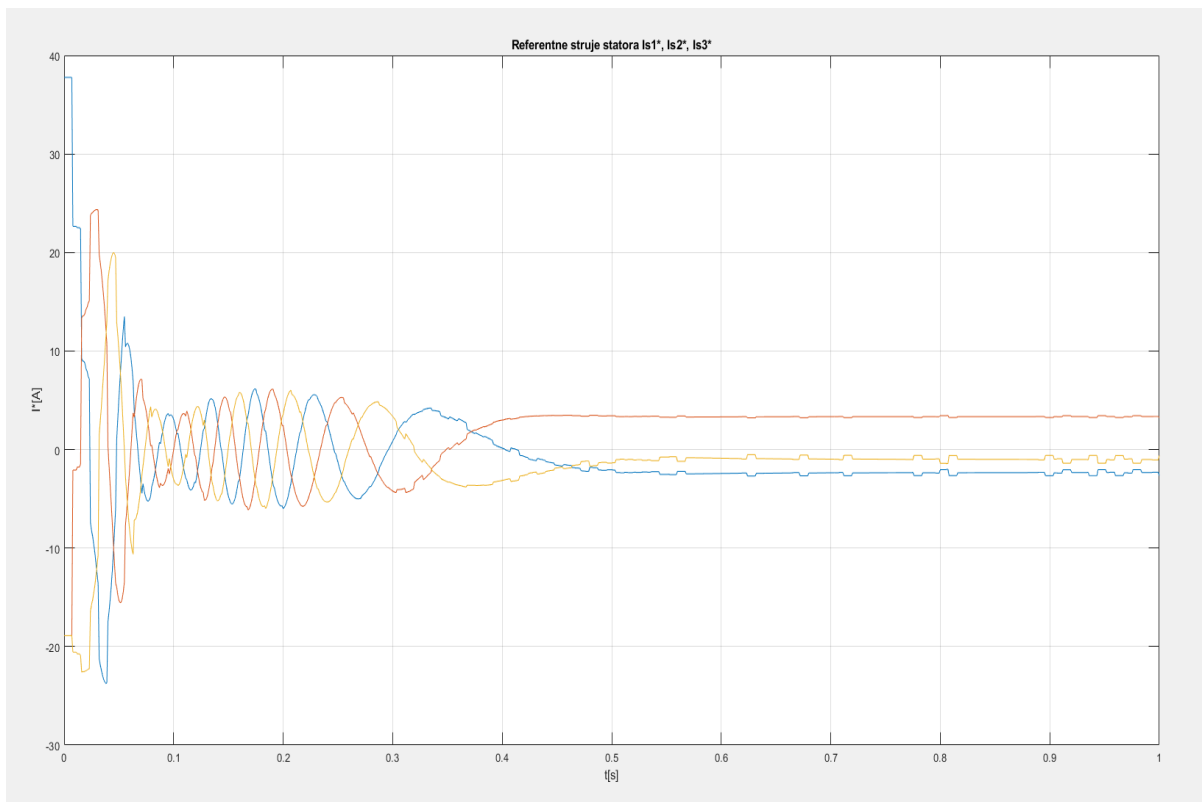
Na sljedećim dijagramima prikazani su rezultati simulacije u regulaciji referentnog (kružnog) pomaka asinhronog stroja od 1m. Zadana maksimalna kutna brzina je $\omega = 100 \text{ rad/sek}$, zadani moment tereta je $M_t = 20 \text{ Nm}$ i teret se uključuje od početka rada stroja.

Na slici 3.48 prikazan je ulazni fazni napon koji iznosi maksimalno 220V.



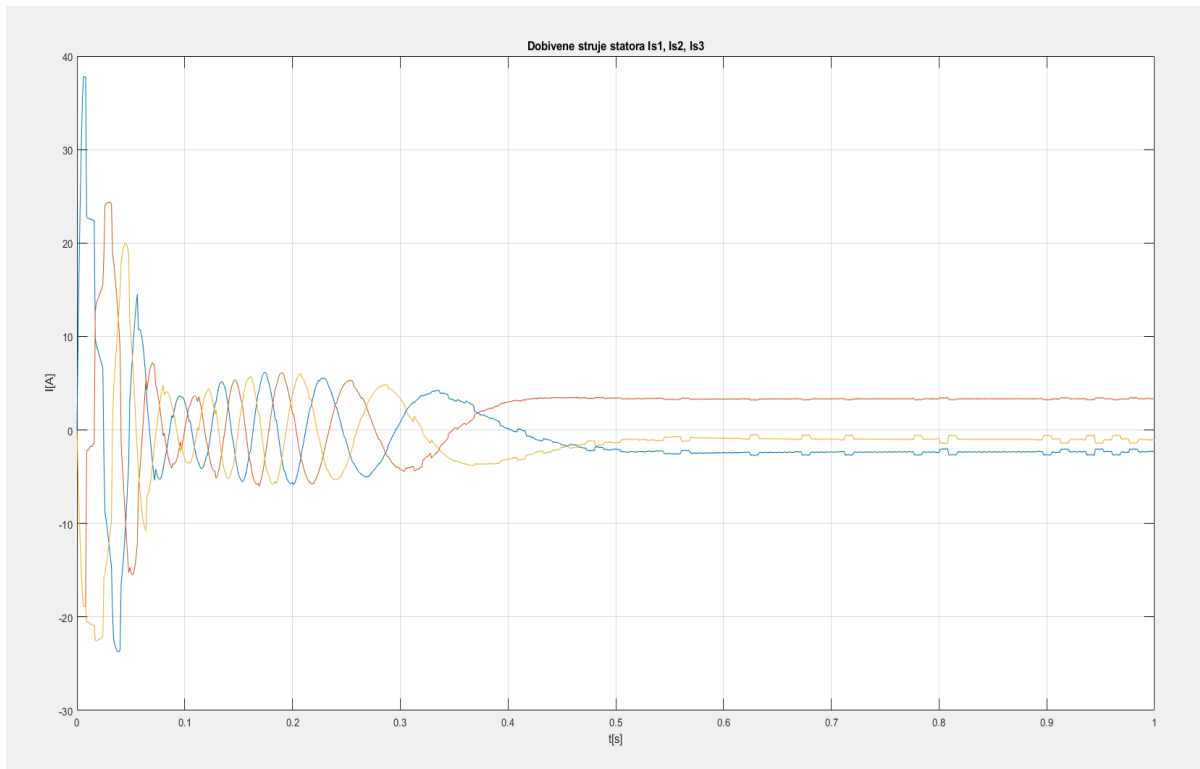
Sl. 3.48 – Ulazni fazni napon u_a, u_b, u_c

Na slici 3.48 prikazane su referentne struje statora.



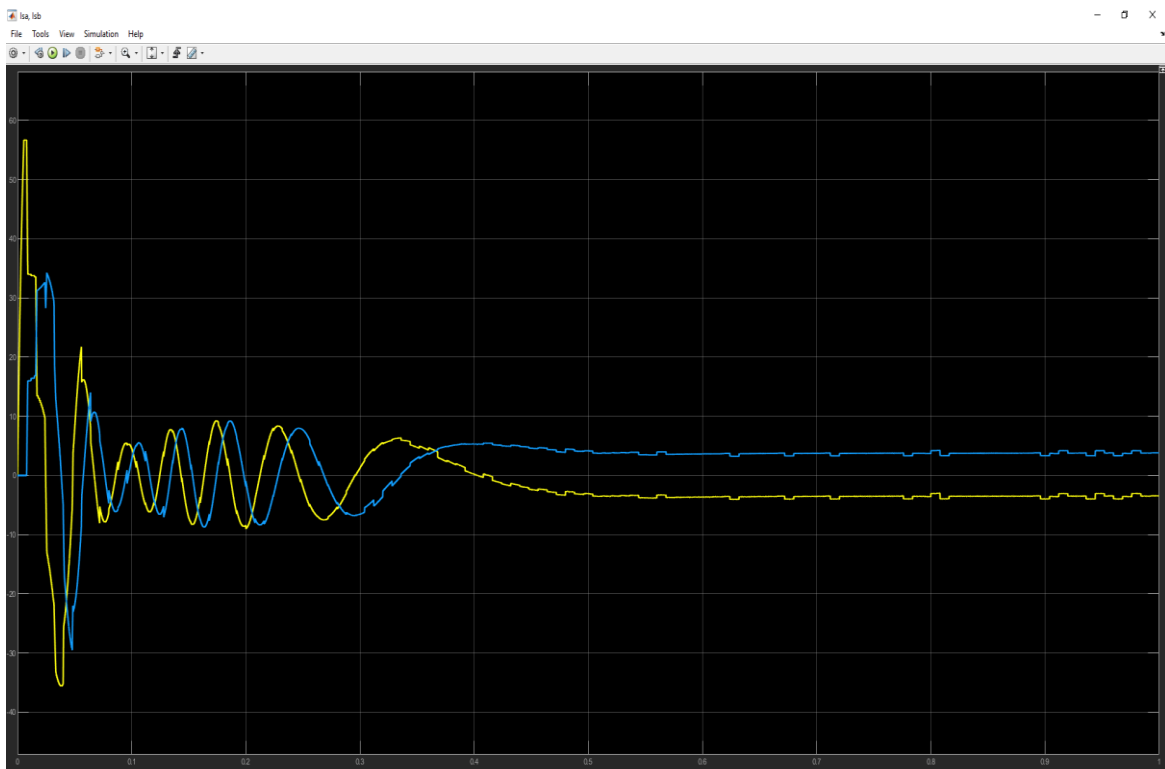
Sl. 3.48 – Referentne struje statora i_a^*, i_b^*, i_c^*

Na slici 3.49 prikazane su ostavrene struje statora.



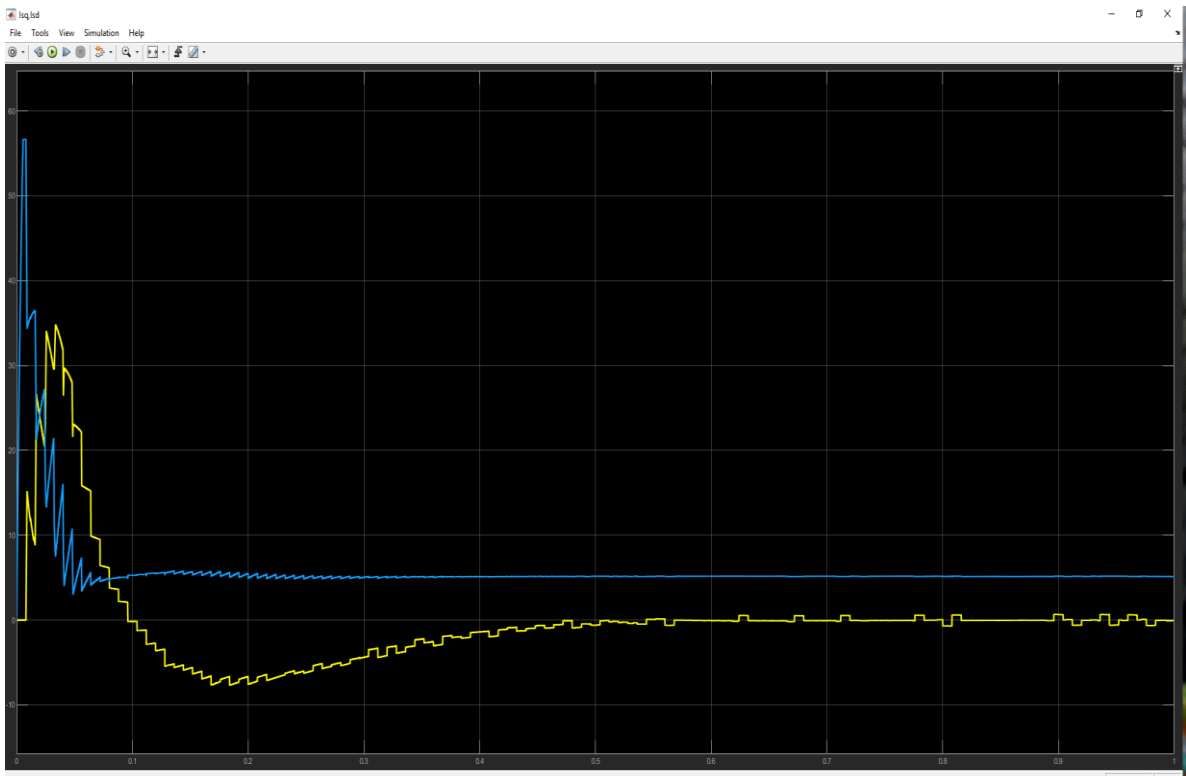
Sl. 3.49 – Ostvarene struje statora i_a, i_b, i_c

Na slici 3.50 prikazane su struje $i_\alpha = I_{s\alpha}$ i $i_\beta = I_{s\beta}$, a koje su dobivene na temelju „Clarke“ transformacije.



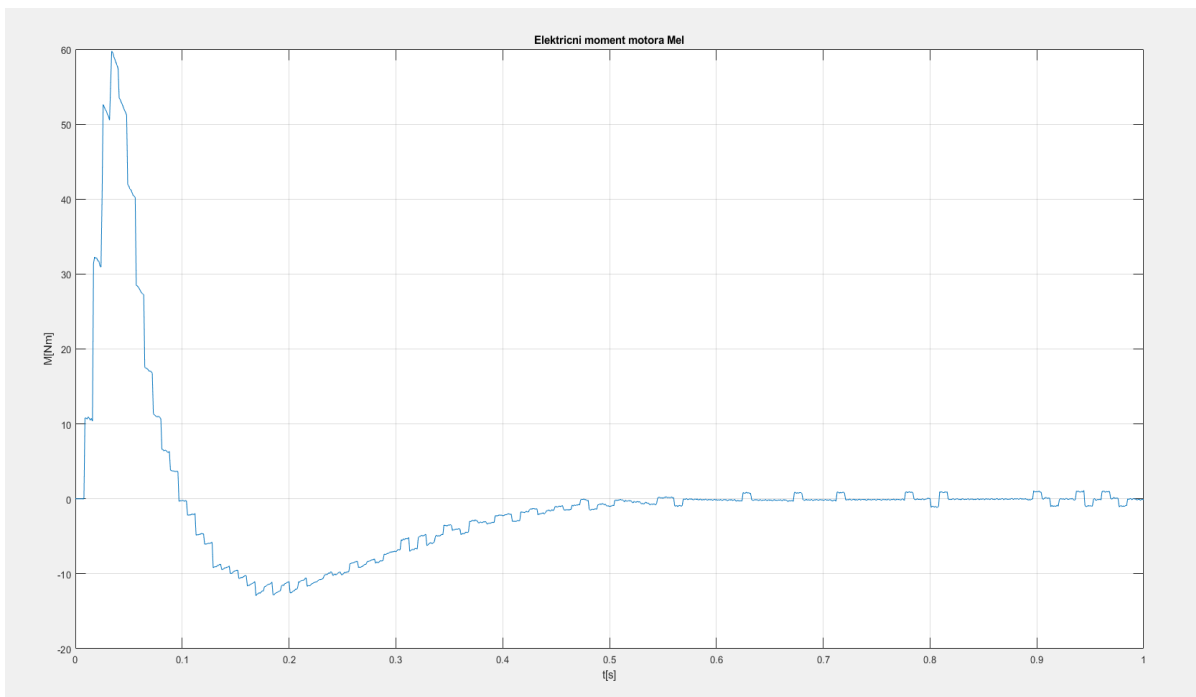
Sl. 3.50 – Struje dobivene na temelju temelju „Clarke“ transformacije i_α i i_β

Na slici 3.51 prikazane su struje $i_{sq} = I_{sq}$ i $i_{sd} = I_{sd}$, a koje su dobivene na temelju „Clarke-Park“ transformacije.



Sl. 3.51 - Struje dobivene na temelju temelju „Clarke-Park“ transformacije i_{sq} i i_{sd}

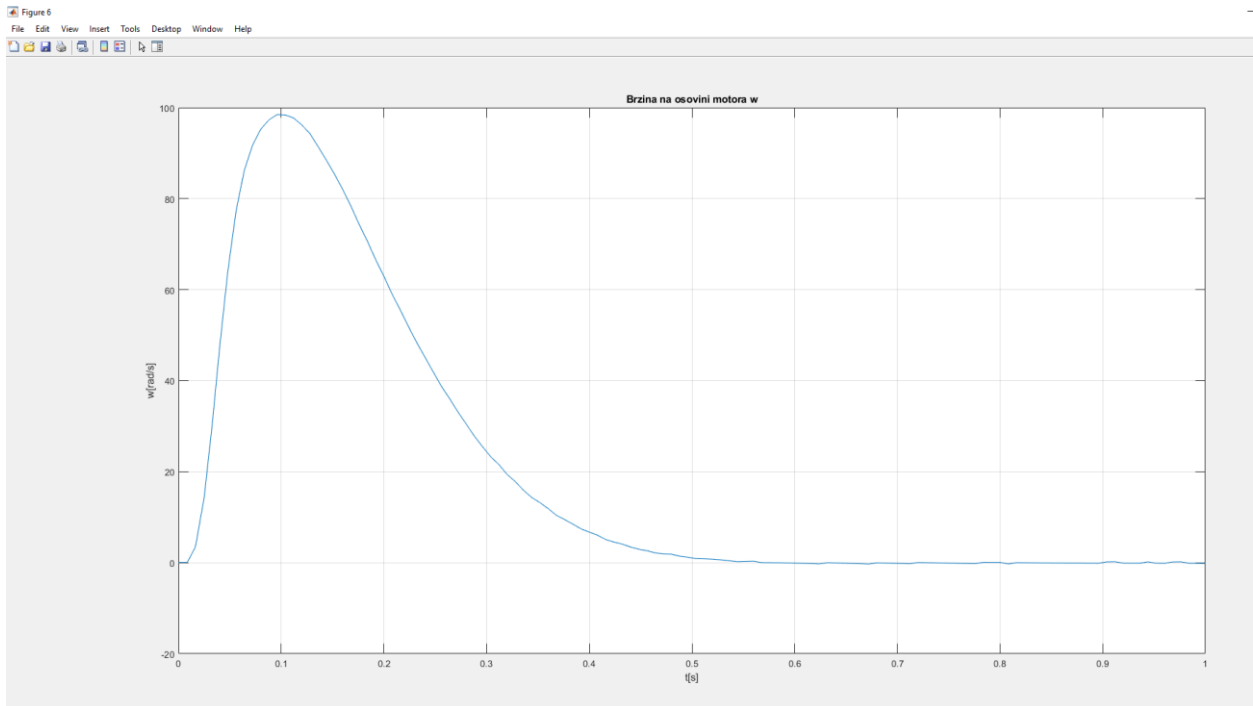
Na slici 3.51 prikazan je električni moment stroja.



Sl. 3.51 – Električni moment stroja M_{el}

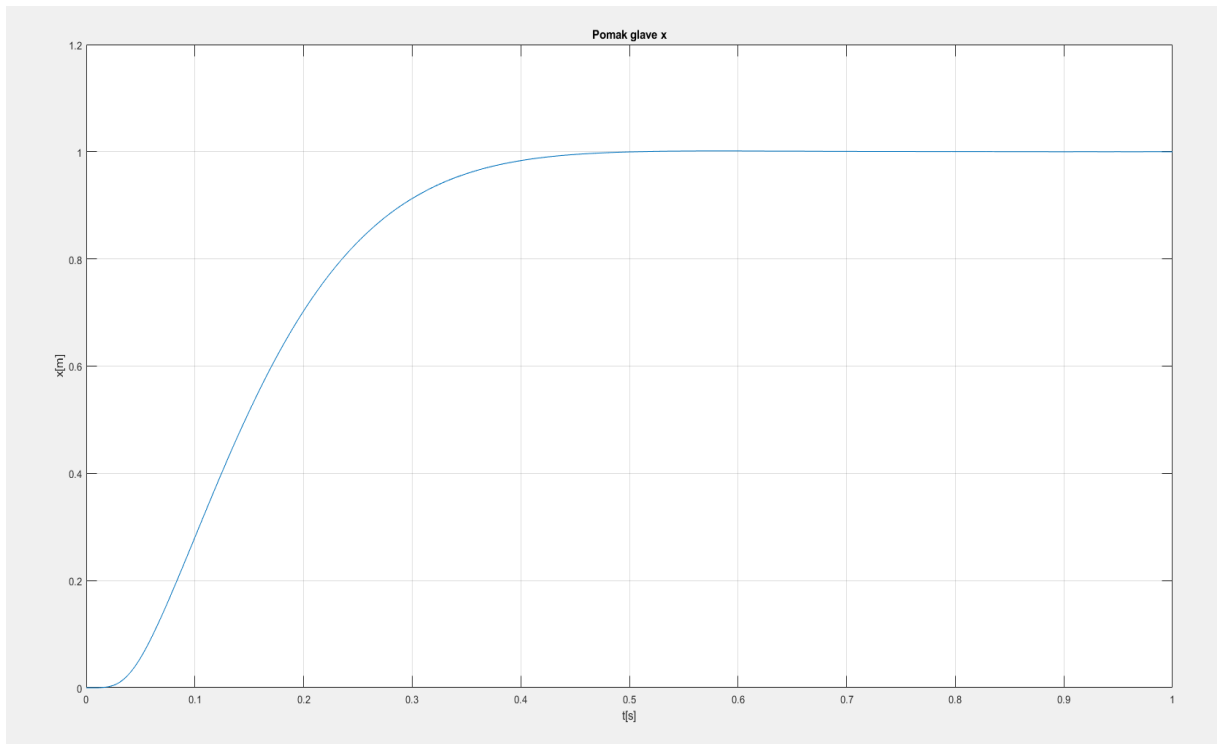
Eelektrični moment stroja M_{el} posljedica je struje i_{sq} kako je vidljivo iz prethodnih dijagrama.

Na slici 3.51 prikazana je regulirana brzina stroja.



Sl. 3.51 – Regulirana brzina stroja

Završno na slici 3.51 prikazan je dijagram pomaka od 1m.



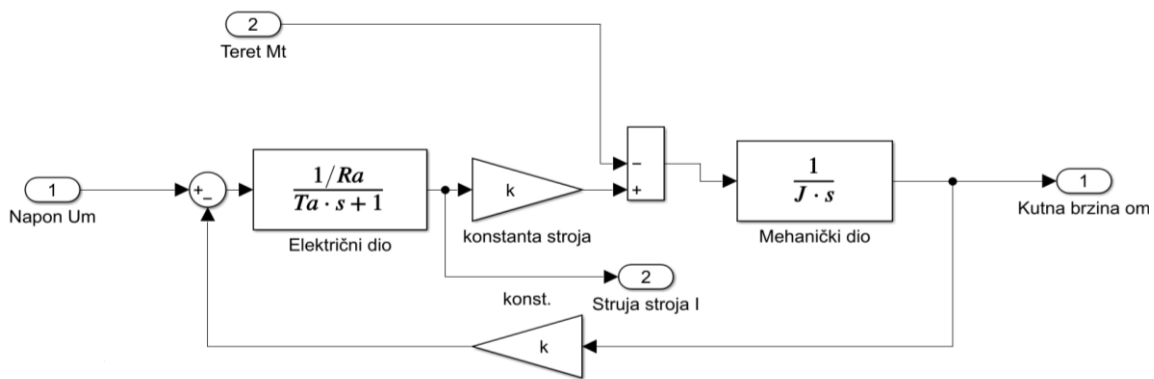
Sl. 3.51 – Regulirani pomak stroja

Prijelazna funkcija je monotona, a prijelazni proces trajao je maksimalno $T_s = 0,5$ sek.

3.5 Kaskadna regulacija

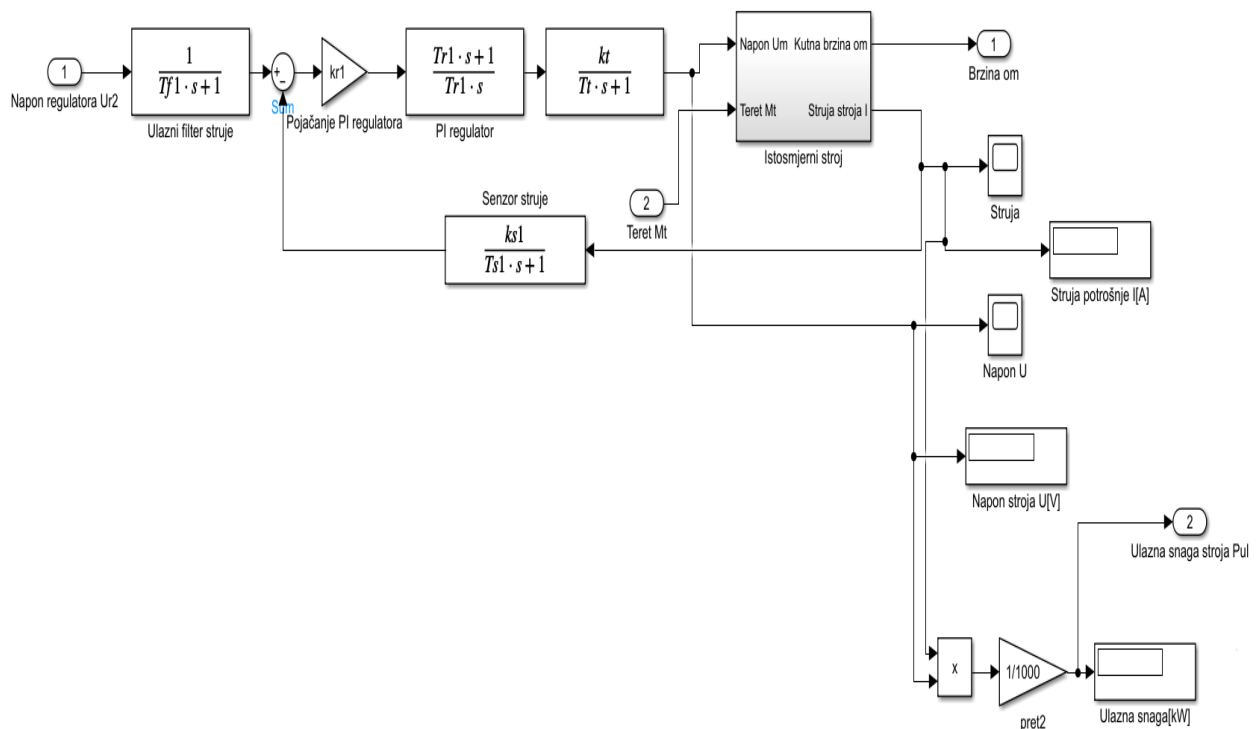
Kasakadna regulacija istosmjernog stroja teorijski je obrađena u kurentnoj literaturi koja se bavi pitanjima analize i sinteze sustava automatskog upravljanja¹¹. Teorija se u ovoj knjizi neće ponavljati, već će se primjeniti i prezentirati kroz izrada simulacijskog modela u MatLab-u.

Na slici 3.52 prikazan je simulacijski model istosmjernog stroja.



Sl. 3.52 – Simulacijski model istosmjernog stroja

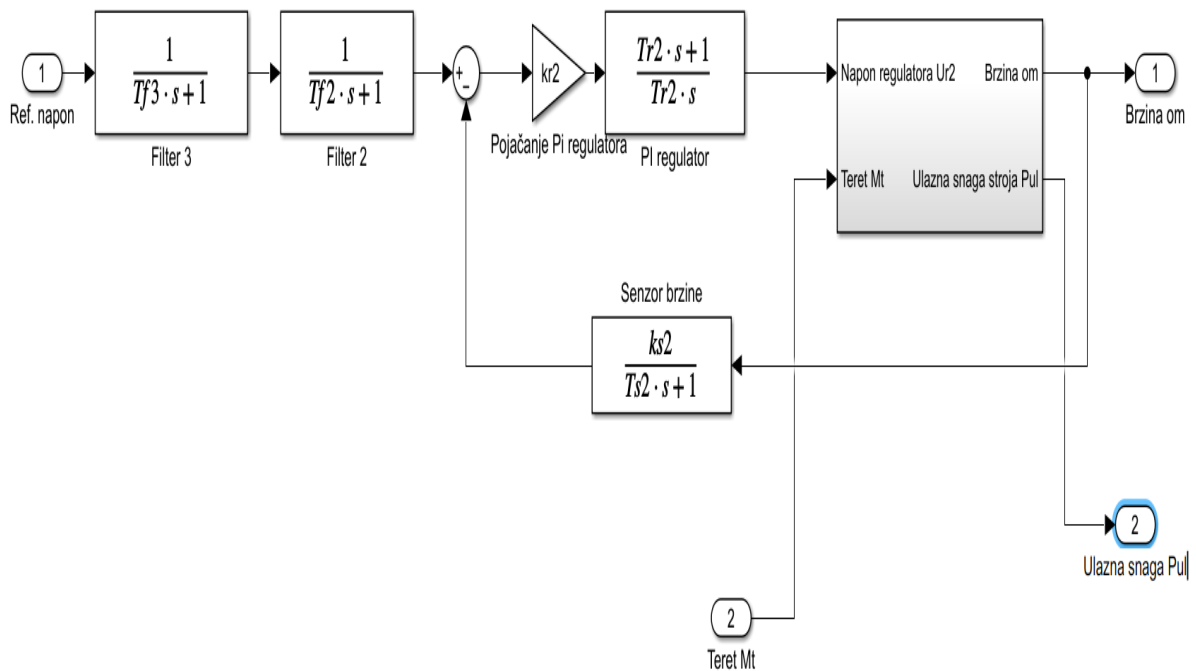
Na slici 3.53. prikazana je podređena regulatorska petlja tj. petlja struje armature.



Sl. 3.53 – Petlja struje armature

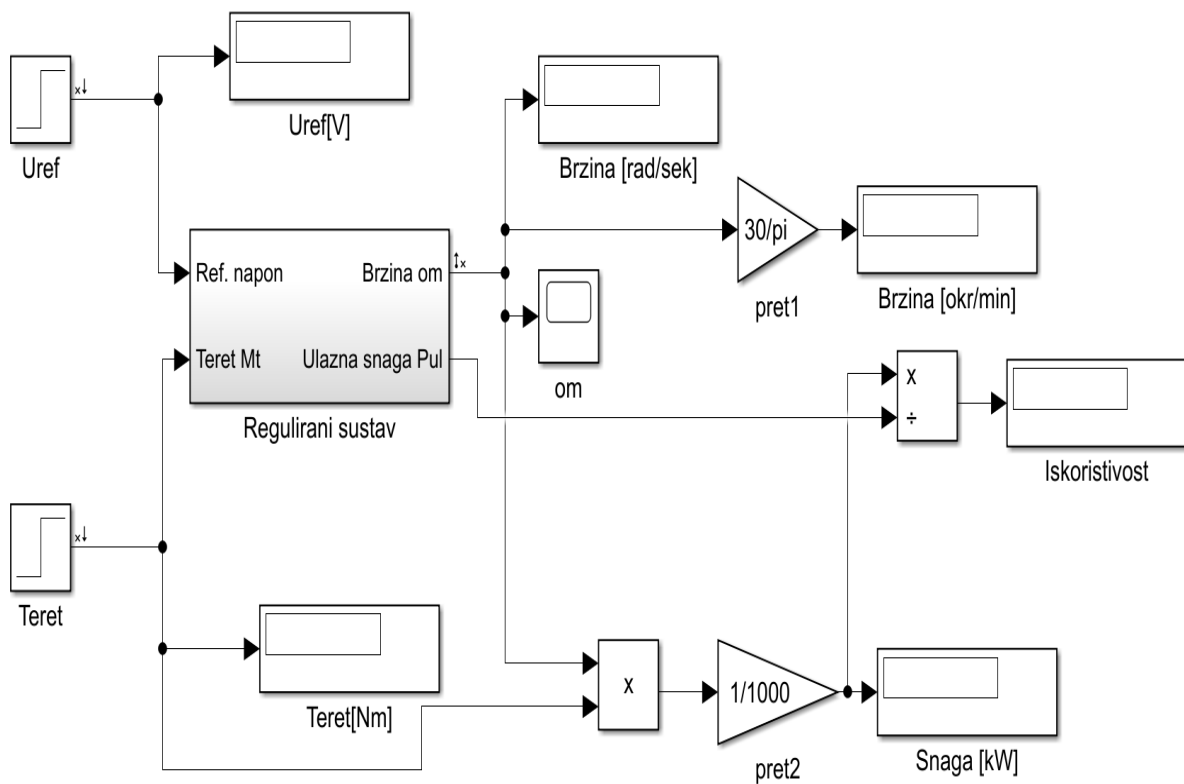
¹¹ Veslagic Jasmin, Upravljanje sistemima, kolegija Mehatronika, Elektrotehnički fakultet Sarajevo, 2012/2013. godina

Na slici 3.54 prikazana je nadređena regulatorska petlja tj. petlja brzine vrtnje.



Sl. 3.54 – Petlja brzine vrtnje

Na slici 3.55 prikazan je ukupni simulacijski model.



Sl. 3.55 – Ukupni simulacijski model

Primjer br. 20

Zadan je elektromotorni pogon sa sljedećim parametrima: moment stroja $M_n = 350 \text{ Nm}$, brzina vrtnje stroja $n = 800 \text{ okr/min}$, moment inercije rotora $J = 1,75 \text{ rad/sek}$, konstanta stroja $k = 2,46 \text{ Vs}$, otpor armature $R_a = 0,488 \Omega$, induktivitet armature $L_a = 15 \text{ mH}$, konstanta tiristorskog usmjerivača $k_t = 1$, vremenska konstanta tiristorskog usmjerivača $T_t = 1,67 \text{ ms}$, konstanta senzora struje $k_{s_1} = 0,14$, vremenska konstanta senzora struje $T_{s_1} = 2 \text{ ms}$, konstanta senzora brzine $k_{s_2} = 0,12$, vremenska konstanta senzora brzine $T_{s_2} = 15 \text{ ms}$. Konstante prvog filtera jednake su parametrima senzora struje, dok su konstante drugog filtera jednak parametrima senzora brzine. Vrijeme uključenja tereta iznosi $t_{opt} = 1,5 \text{ sek}$, a prijelazni proces je aperiodski s koeficijentom prigušenja $\xi = 0,707$.

Potrebno je odrediti odgovarajuće parametre kaskadne regulacije i to:

- prijenosnu funkciju regulatora struje $G_{r_1}(s) = k_{r_1} \frac{1+T_{r_1}s}{T_{r_1}s}$
- prijenosnu funkciju regulatora brzine $G_{r_2}(s) = k_{r_2} \cdot \frac{1+T_{r_2}s}{T_{r_2}}$
- vremensku konstantu filtra T_{f_3}
- referentni napon U_{ref}

Potrebno je na temelju simulacijskog model kaskadne regulacije odrediti:

- brzinu vrtnje stroja $n[\text{okr/min}]$
- koeficijent iskoristivosti stroja η
- izlaznu snagu stroja $P_{izl}[\text{kW}]$
- uzlaznu snagu $P_{ul}[\text{kW}]$
- struju potrošnje $I[\text{A}]$
- napon stroja $U[\text{V}]$

Potrebno je nacrtati prijelaznu karakteristiku kutne brzine $\omega = \omega(t)$ i struje potrošnje $I = I(t)$.

Rješenje:

Prijenosna funkcija regulatora struje $G_{r_1}(s)$ određuje se na temelju *tehničkog optimuma* i vrijede sljedeće relacije:

$$T_{r_1} = T_a = \frac{L_a}{R_a}$$

$$T_{\Sigma} = T_{s_1} + T_t$$

$$\frac{T_{r_1}}{T_{\Sigma}} > (5 - 10)$$

Koeficijent pojačanja regulatora struje k_{r_1} određuju se na temelju sljedeće relacije:

$$k_{r_1} = \frac{k_0}{k_p}$$

gdje je:

- koeficijent $k_0 = \frac{1}{4 \cdot \xi^2} \cdot \frac{T_{r_1}}{T_{\Sigma}}$
- koeficijent $k_p = k_t \cdot k_{s_1} \cdot k_a$
- koeficijent $k_a = \frac{1}{R_a}$
- koeficijent prigušenja ξ

Prijenosna funkcija regulatora brzine $G_{r_2}(s)$ određena je na temelju *simetričnog optimuma* za astatizam I. reda, pri čemu vrijedi da je:

$$T_m \gg T_{\Sigma}, T_{s_2}$$

gdaje je:

$$T_m = \frac{J \cdot R_a}{k^2} \text{ -mehanička konstanta stroja [sek]}$$

Kako bi sustav bio stabilan mora vrijediti:

$$T_{r_2} = a^2 \cdot T_{\Sigma}^*$$

gdje je:

$$T_{\Sigma}^* = T_{s_2} + 2 \cdot T_{\Sigma} \quad \text{i} \quad 1 < a < 3$$

Koeficijent a povezan je s faznom pričuvom φ_r i vrijedi relacija:

$$\varphi_r = \arctan\left[\frac{1}{2} \cdot \left(a - \frac{1}{a}\right)\right]$$

Npr. za $a = 2$ vrijedi:

$$\varphi_r = \arctan\left[\frac{1}{2} \cdot \left(2 - \frac{1}{2}\right)\right] = \arctan 0,75 = 36,86^\circ$$

Koeficijent pojačanja regulatora struje k_{r_2} određuju se na temelju sljedeće relacije:

$$k_{r_2} = \frac{k_0^*}{k_p^*}$$

gdje je:

- koeficijent $k_0^* = \frac{1}{a} \cdot \frac{T_m}{T_\Sigma^*}$
- koeficijent $k_p^* = \frac{k_{s2}}{k_{s1} \cdot k_a \cdot k}$

Za vremensku konstantu filtra T_{f3} vrijedi da je:

$$T_{f3} = T_{r2}$$

Odnosno za referentni napon U_{ref} vrijedi da je:

$$U_{ref} = k_{s2} \cdot \omega = k_{s2} \cdot \frac{\pi}{30} \cdot n$$

Prijenosna funkcija *simetričnog optimuma* određena je sljedećom relacijom:

$$G_{sopt}(s) = \frac{k_0^*}{T_{r2} \cdot T_m} \cdot \frac{1 + T_{r2}s}{T_\Sigma^* \cdot s^3 + s^2}$$

Odnosno vrijedi da je kružna frekvencija presjeka jednaka:

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{T_{r2} \cdot T_\Sigma^*}}$$

Na temelju funkcije $G_{sopt}(s)$ može se nacrtati Bodov dijagram gdje će se na kružnoj frekvenciji ω_c očitati fazna pričuva φ_r .

Rješenje (programska rutina u MatLab-u) je sljedeće:

```
'Kaskadna regulacija istosmjernog stroja'
'Zadano'
Mn=350 %monet opterećenja stroj [Nm]
nn=800 %broj okretaja stroja [okr/min]
J=1.75 %moment inercije stroja [kgm2]
k=2.46 %konstanta stroja [Vs]
Ra=0.488 %otpor armature [Ω]
La=15e-3 %Induktivitet armature [H]

'Parametri tiritorskog usmjerivača'
kt=1
Tt=1.67e-3

'Parametri senzora struje'
ks1=0.14
```

```

Ts1=2e-3

'Parametri senzora brzine'
ks2=0.12
Ts2=15e-3
a=2; %koeficijent fazne pričuve

'Parametri filtera 1'
Tf1=Ts1
Gf1=tf([1],[Ts1 1]) %prijenosna funkcija filtera 1

'Parametri filtera 2'
Tf2=Ts2
Gf2=tf([1],[Ts2 1]) %prijenosna funkcija filtera 2

'Vrijeme uključivanja tereta'
topt=1.5

'Koeficijent prigušenja'
priz=0.707

'Rješenje'
'1 - Parametri regulatora struje'
Ta=La/Ra
Tr1=Ta %vremenska konstanta regulatora struje
Tsum=Ts1+Tt
Tr1/Tsum %provjera
k0=1/(4*priz^2)*Tr1/Tsum;
ka=1/Ra;
kp=ks1*kt*ka;
kr1=k0/kp %konstanta regulatora struje
Gr1=kr1*tf([Tr1 1],[Tr1 0]) % prijenosna funkcija regulatora struje

'2 - Parametri regulatora brzine'
Tm=J*Ra/k^2
Tsum
Ts2
Tsum1=Ts2+2*Tsum;
Tr2=a^2*Tsum1; %vremenska konstanta regulatora brzine
fir=180/pi*atan(1/2*(a-1/a)) %fazna pričuva

k01=1/a*Tm/Tsum1;
kp1=ks2/(ks1*ka*k);
kr2=k01/kp1 %konstanta regulatora brzine
Gr2=kr2*tf([Tr2 1],[Tr2 0])

```

```
'3-Parametar filtera 3'
Tf3=Tr2;
Gf3=tf([1],[Tr2 1]) %prijenosna funkcija filtera 3

'4 - Referentni napon'
om=nn*pi/30
Uref=ks2*om

'5 - Bodeov dijagram - simetrični optimum'
k03=kr2*kp1/(Tr2*Tm);
G=k03*tf([Tr2 1],[Tsum1 1 0 0])
margin(G)
grid

'6 - Simulacijski model'
EMPkas
```

Parametri

```
ans = 'Kaskadna regulacija istrosmjernog stroja'
ans = 'Zadano'
Mn = 350
nn = 800
J = 1.7500
k = 2.4600
Ra = 0.4880
La = 0.0150
ans = 'Parametri tiritorskog usmjerivača'
kt = 1
Tt = 0.0017
ans = 'Parametri senzora struje'
ks1 = 0.1400
Ts1 = 0.0020
ans = 'Parametri senzora brzine'
ks2 = 0.1200
Ts2 = 0.0150
ans = 'Parametri filtera 1'
Tf1 = 0.0020
Gf1 =

      1
-----
0.002 s + 1
```

Continuous-time transfer function.

ans = 'Parametri filtera 2'

Tf2 = 0.0150

Gf2 =

$$\frac{1}{0.015 s + 1}$$

Continuous-time transfer function.

ans = 'Vrijeme uključivanja tereta'

topt = 1.5000

ans = 'Koeficijent prigušenja'

priz = 0.7070

ans = 'Rješenje'

ans = '1 - Parametri regulatora struje'

Ta = 0.0307

Tr1 = 0.0307

Tsum = 0.0037

ans = 8.3754

kr1 = 14.6015

Gr1 =

$$\frac{0.4488 s + 14.6}{0.03074 s}$$

Continuous-time transfer function.

ans = '2 - Parametri regulatora brzine'

Tm = 0.1411

Tsum = 0.0037

Ts2 = 0.0150

fir = 36.8699

kr2 = 18.5753

Gr2 =

$$\frac{1.66 s + 18.58}{0.08936 s}$$

Continuous-time transfer function.

ans = '3-Parametar filtera 3'

Gf3 =

$$\frac{1}{0.08936 s + 1}$$

Continuous-time transfer function.

ans = '4 - Referentni napon'

om = 83.7758

Uref = 10.0531

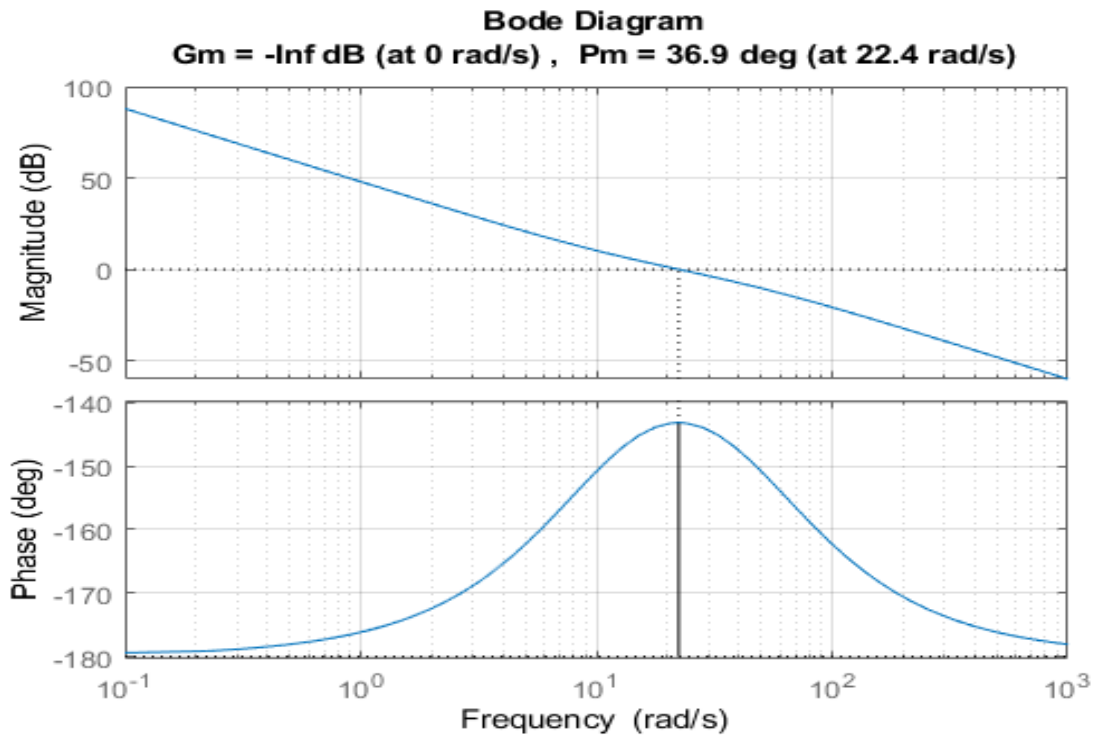
ans = '5 - Bodeov dijagram - simetrični optimum'

G =

$$\frac{22.38 s + 250.5}{0.02234 s^3 + s^2}$$

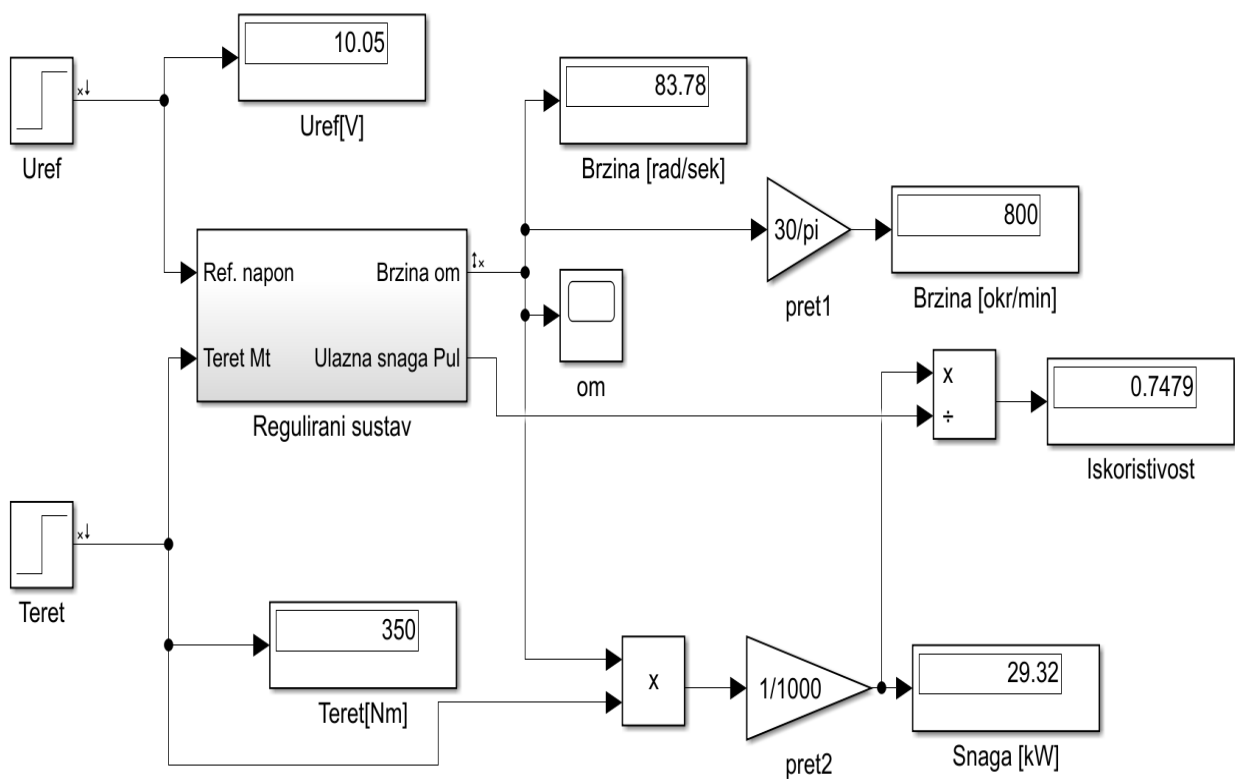
Continuous-time transfer function.

Na slici 3.56 prikazan je Bodeov dijagram na kojem je prikazan „simetrični optimum“ koji se očituje na faznom dijelu dijagram zbog simetrije faznog dijagrama na frekvenciji poresjeka ω_c .



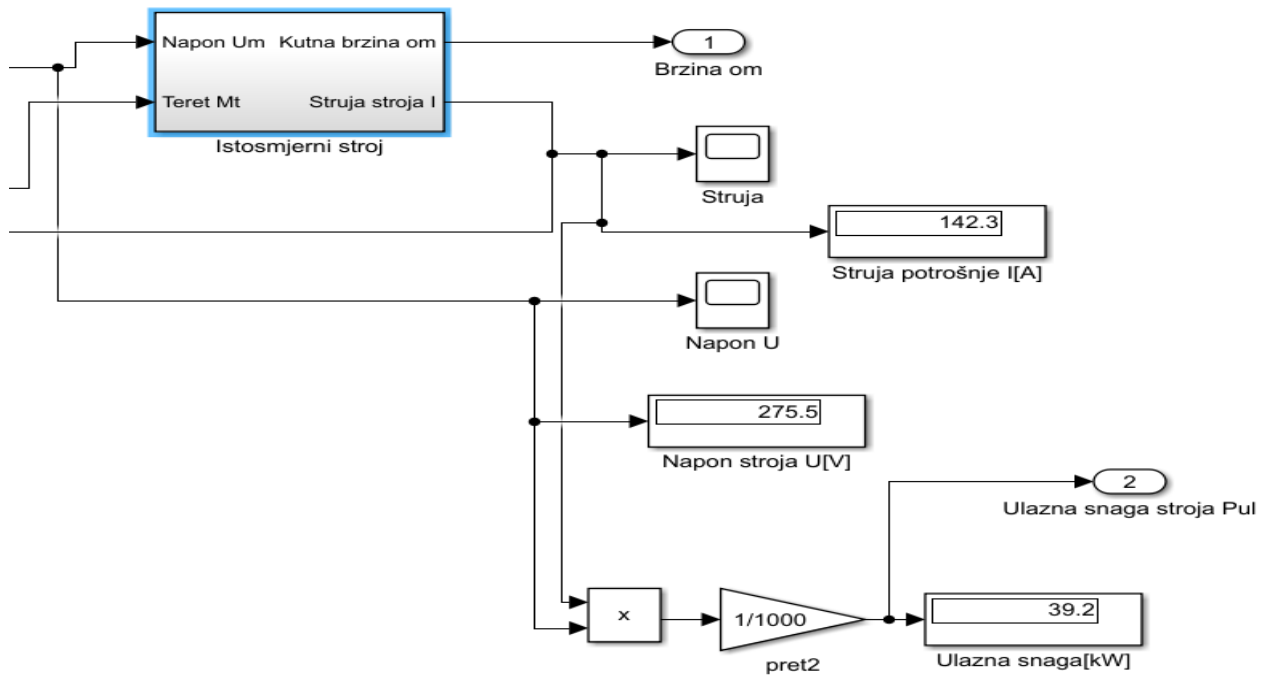
Sl. 3.56 – Bodeov dijagram sa „simetričnim optimumom“

Na slici 3.57 prikazan je model simulacije kaskadne regulacije.



Sl. 3.57 – Model simulacije kaskadne regulacije

Na slici 3.58 prikazan je dio modela koji se odnosi na istosmjerni stroj.



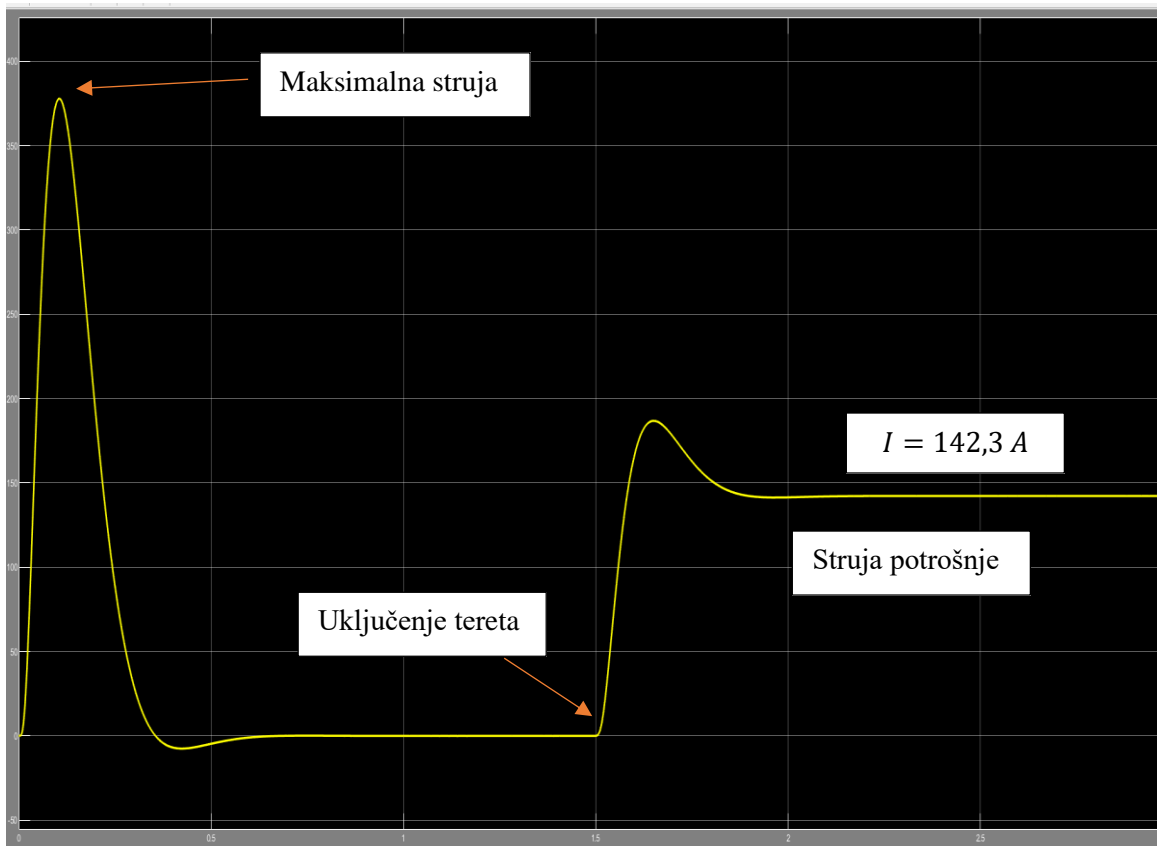
Sl. 3.58 – Model simulacije istosmjernog stroja

Na slici 3.59 prikazan je prijelazni proces kutne brzine i uključivanje tereta u ustaljenom stanju.



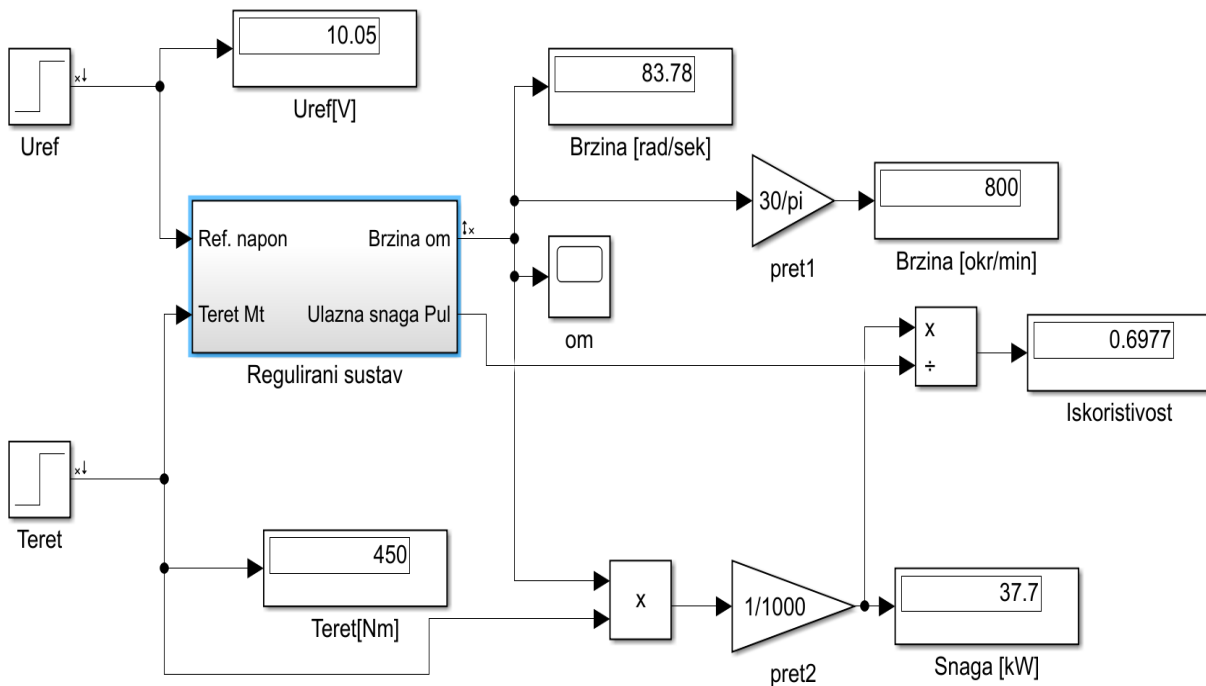
Sl. 3.59 – Prijelazni funkcija kutne brzine i uključivanje tereta u ustaljenom stanju

Na slici 3.60 prikazan je prijezni proces struje i uključenje tereta u ustaljenom stanju.



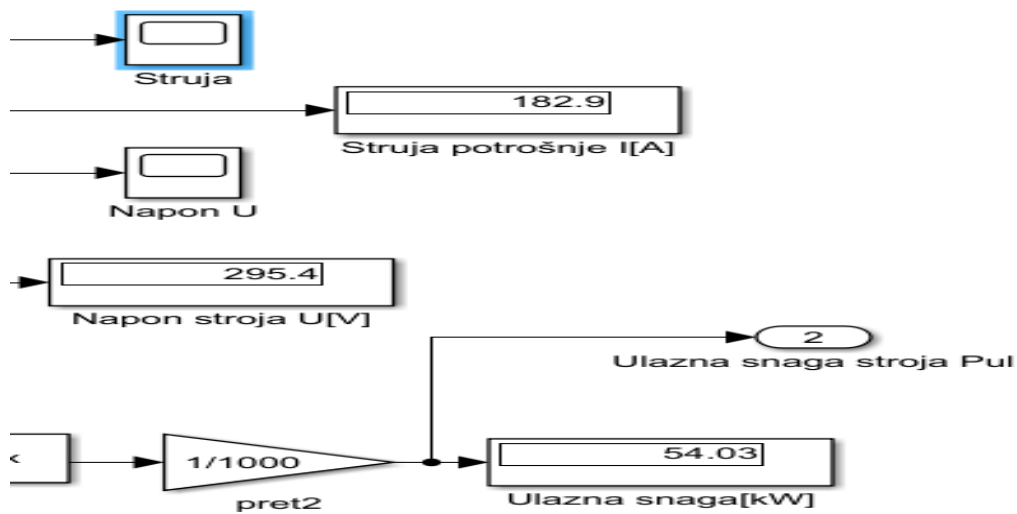
Sl. 3.60 - Prijezna funkcija struje i uključenje tereta u ustaljenom stanju

Na slici 3.61 prikazano je povećanje momenta tereta na $M_n = 450 \text{ Nm}$.



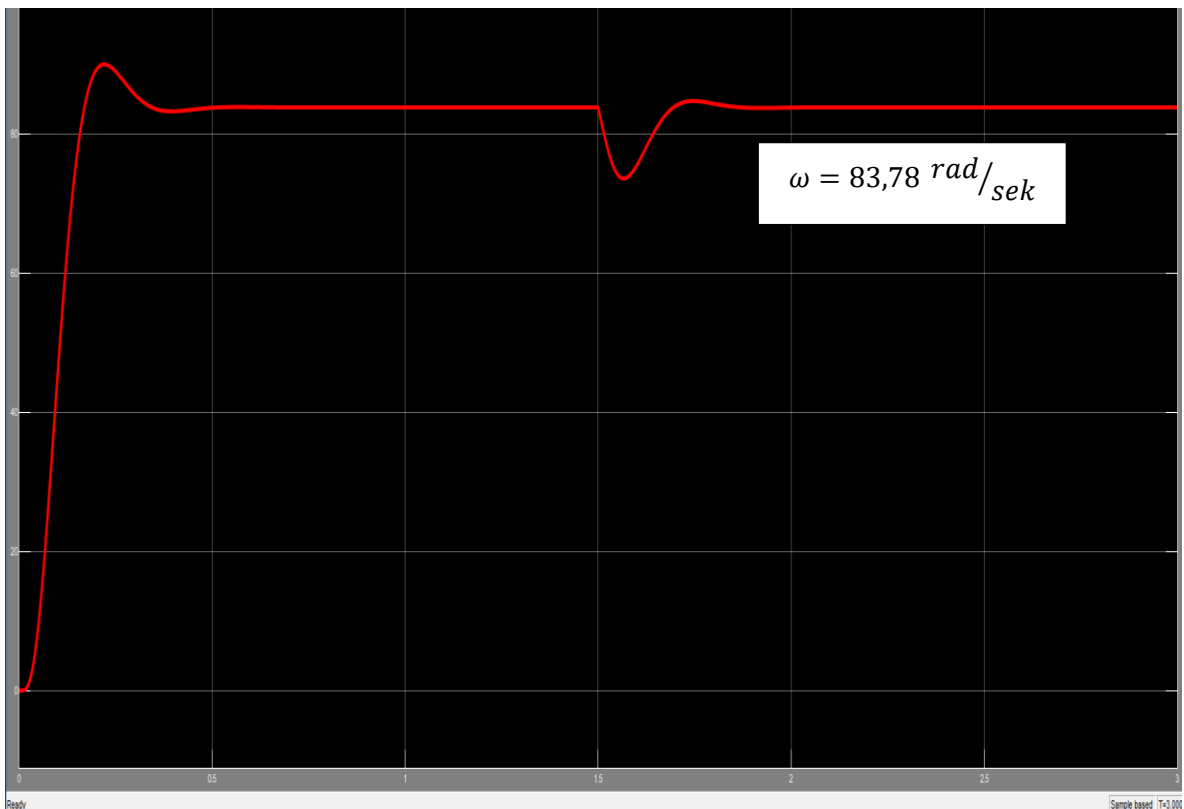
Sl. 3.60 – Simulacija povećanja momenta tereta na $M_n = 450 \text{ Nm}$

Brzina vrtnje i dalje ostala ista, a povećao se teret sa 350 na 450Nm. Smanjio sa koeficijent iskoristivosti stroja sa 0,748 na 0,6977, kako je prikazano na slici 3.60. Na slici 3.61 prikazane je nova vrijednost ulazne snage koja iznosi 54,03 kW.



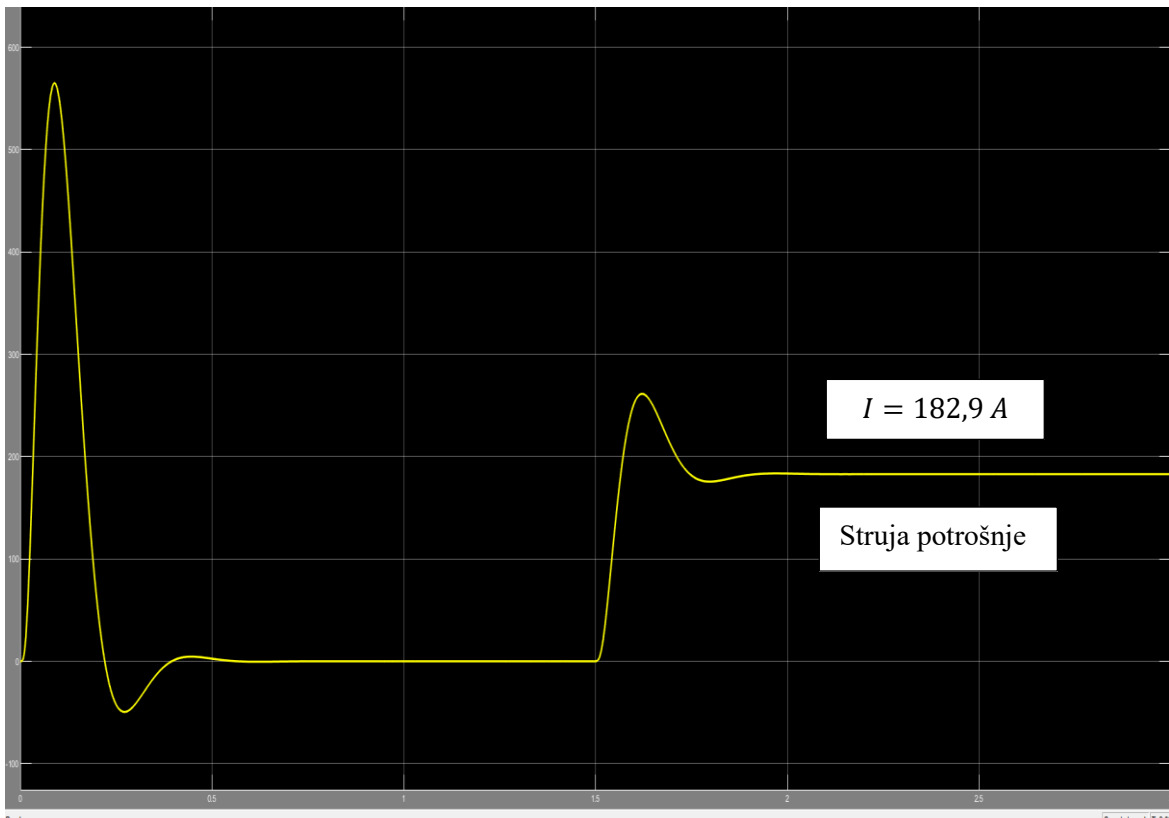
Sl. 3.61 – Povećanje ulazne snage

Osim ulazne snage, povećala se struja potrošnje sa 142,3 na 182,9 A odnosno napon sa 275,5 na 295,4 V, što je zapravo rezultiralo povećanjem ulazne snage sa 39,2 na 54,03 kW. Prijelazni proces brzine ostaje približno isti, kako je prikazano na slici 3.62.



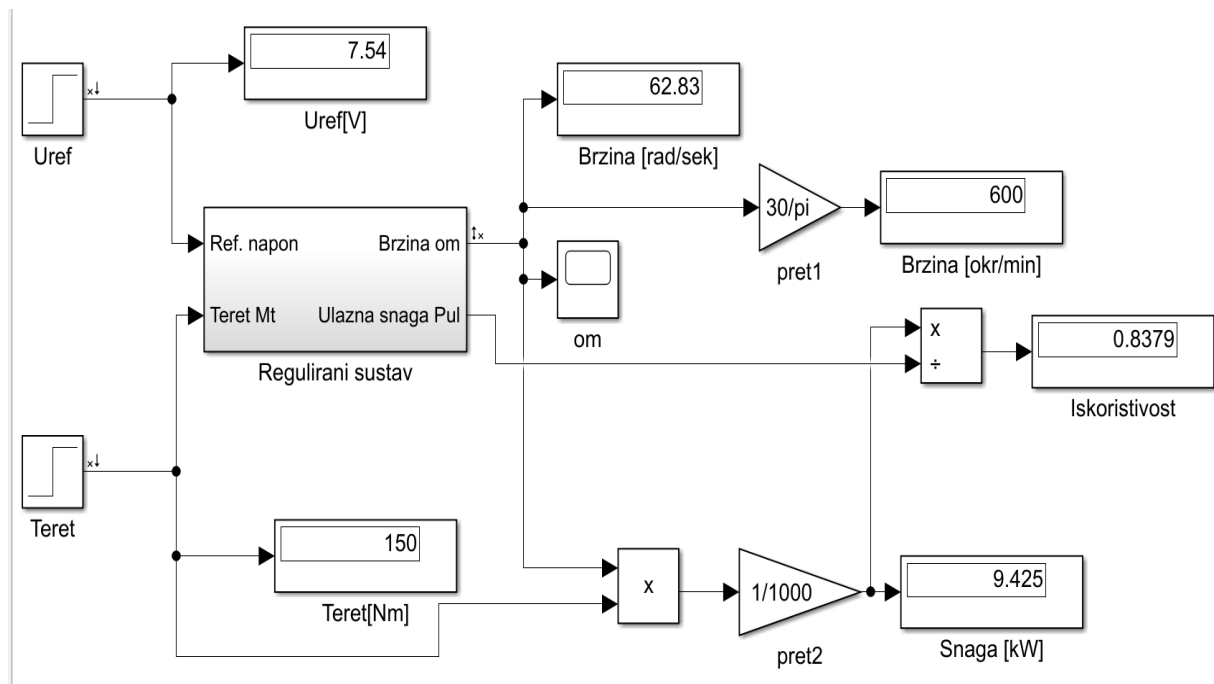
3.62 – Prijelazna funkcija kutne brzine s promjenjenim teretom

Prijelazni proces struje mijenja se samo u vrijednosti struje potrošnje, a prikazan je na slici 3.63.



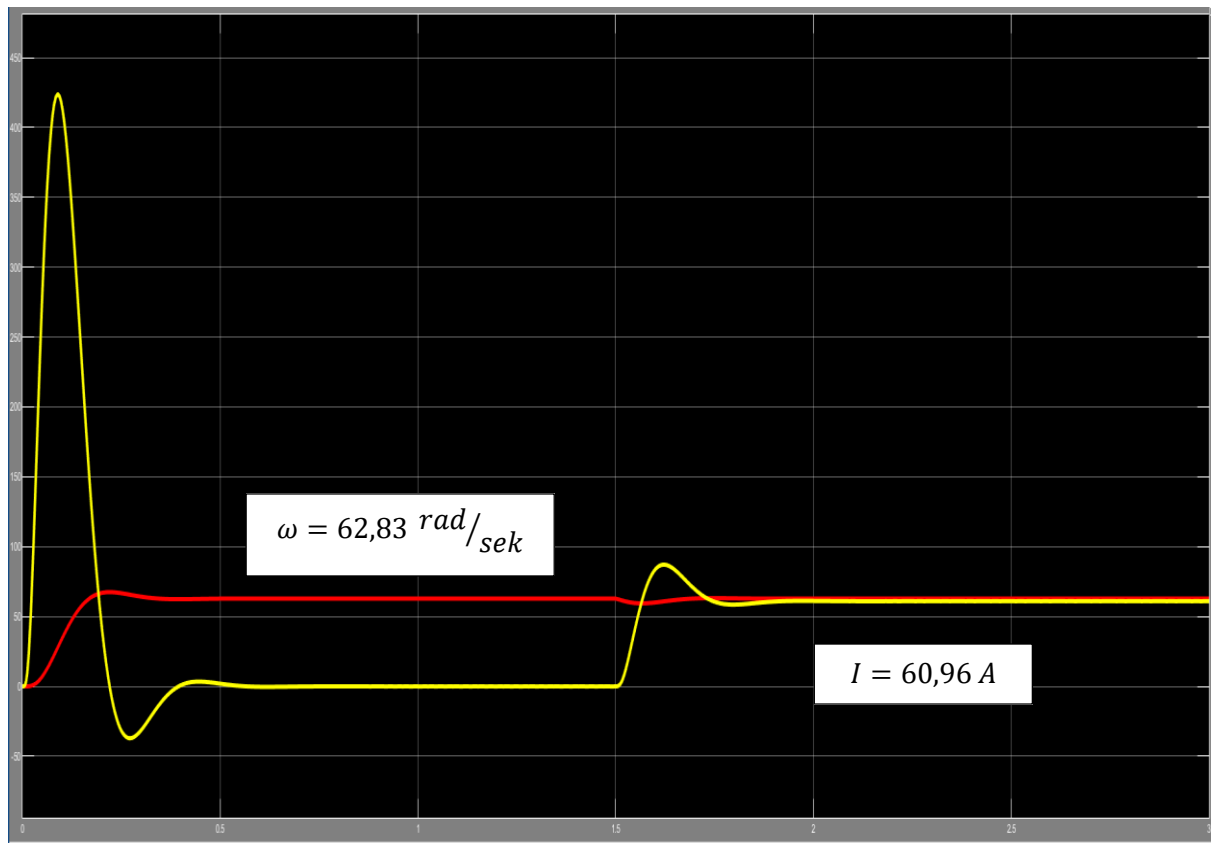
Sl. 3.63 – Prijelazna funkcija struje s promjenjenim teretom

Na slici 3.64 prikazan je slučaj promjene brzine vrtnje na $n = 600 \text{ okr/min}$ i momenta tereta na $M_n = 150 \text{ Nm}$.



Sl. 3.64 – Simulacija promjene brzine vrtnje i momenta tereta

Na slici 3.65 prikazan je prijelazna funkcija kutne brzine i struje potrošnje.



Sl. 3.65 – Prijelazna funkcija kutne brzine i struje potrošnje

Kaskadna regulacija bitno mjenja svojstva automatskog upravljanja jer sustavi koji imaju negativnu povratnu vezu manje su osjetljivi na promjene parametara upravljanja i za njih se kaže da su robusniji. Prednosti takvih sustava automatskog upravljanja očituju se u stabilizaciji procesa, povećanju točnosti, povećanju brzine odziva i smanjenju utjecaja poremećaja.

Šezdesetih godina prošlog stoljeća razvijena je nova teorija automatskog upravljanja koja se temelji na konceptu stanja sustava odnosno mogućnosti da se sustav može opisati skupom varijabli koje se nazivaju varijable stanja.

U nastavku će pozornost biti usmjerena na regulaciji sustava u prostoru stanja i regulatoru u povratnoj vezi na način da se dinamika zatvorenog sustava ostvari bez povećanja reda sustava.

3.6 Regulacija u prostoru stanja

Sustav koji se može opisati s konačnim brojem varijabli stanja naziva se konačno dimenzijski sustava ili sustav s koncentriranim parametrima. Kod ovakvih sustava vrijeme je jedina nezavisna varijabla i dinamičke jednadžbe koje opisuju ovakav sustav su obične diferencijalne jednadžbe konačnog reda. U poglavlju 2.1.2 predstavljen je bio model istrosmjernog motora u prostoru stanja, a takva način opisa model sustava s „više ulaza i više izlaza“ nazvan je „engl. *Multiple Input Multiple Output, MIMO*) ili MIMO model.

Matematički model takvog linearnog vremenski nepromjenljivog kontinuiranog sustava opisuje se jednadžbama diferencijala i u općem obliku glasi:

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \text{ – jednadžba stanja sustava}$$

$$y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \text{ – jednadžba izlaza}$$

gdje je:

$$x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)] \text{ } nx1 \text{ – vektor varijabli stanja}$$

$$u(t) = [u_1(t) \ u_2(t) \ \dots \ u_m(t)] \text{ } mx1 \text{ – vektor ulaznih signala}$$

$$y(t) = [y_1(t) \ y_2(t) \ \dots \ y_r(t)] \text{ } rx1 \text{ – vektor izlaznih signala}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ } nxn \text{ – matrica stanja sustava}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \text{ } nxm \text{ – ulazna matrica ili matrica upravljanja}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{r1} & c_{r2} & \dots & c_{rn} \end{bmatrix} \text{ } rxn \text{ – izlazna matrica}$$

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{r1} & d_{r2} & \dots & d_{rm} \end{bmatrix} \text{ } rxm \text{ – ulazno/izlazna matrica}$$

Neka je dinamika linearnog kontinuiranog sustava određena sljedećom diferencijalnom jednadžbom:

$$a_3 \cdot \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + a_2 \cdot \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + a_0 \cdot y(t) = c_2 \cdot \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + c_1 \cdot \frac{du(t)}{dt} + c_0 \cdot u(t)$$

Na temelju Laplasove transformacije vrijedi:

$$\begin{aligned} a_3 \cdot s^3 \cdot Y(s) + a_2 \cdot s^2 \cdot Y(s) + a_1 \cdot s \cdot Y(s) + a_0 \cdot Y(s) \\ = c_2 \cdot s^2 \cdot U(s) + c_1 \cdot s \cdot U(s) + c_0 \cdot U(s) \end{aligned}$$

Prijenosna funkcija sustava $G(s)$ bila bi:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{c_2 \cdot s^2 + c_1 \cdot s + c_0}{a_3 \cdot s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0}$$

Transformacija u prostor stanja bila bi sljedeća:

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_3 \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = [c_0 \quad c_1 \quad c_2] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot u$$

Laplasova transformacija jednadžbe stanja sustava i jednadžbe izlaza bila bi sljedeća:

$$s \cdot X(s) = A \cdot X(s) + B \cdot U(s)$$

$$Y(s) = C \cdot X(s) + D \cdot U(s)$$

Kako bi prostor stanja transformirali ponovno u prijenosnu funkciju, potrebno je sljedeće:

$$(s \cdot I - A) \cdot X(s) = B \cdot U(s)$$

gdje je :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \text{jedinična matrica}$$

Vrijedi da je:

$$X(s) = (s \cdot I - A)^{-1} B \cdot U(s)$$

Odnosno

$$Y(s) = C \cdot X(s) + D \cdot U(s) = C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B \cdot U(s) + D \cdot U(s)$$

Prijenosna funkcija $G(s)$ iznosi:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B + D$$

Kako je u prije prikazanom primjeru ulazno/izlazna matrica jednaka nuli $D = [0]$, tada su jednadžbe na temelju koji se projektira regulator u prostoru stanja sljedeće:

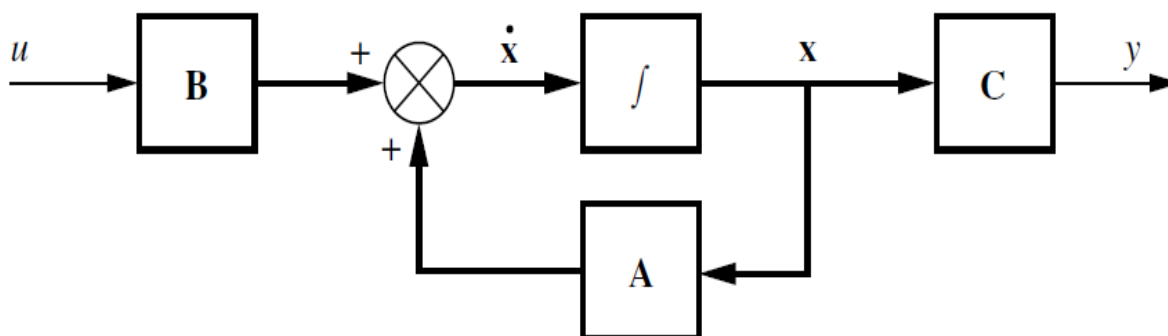
$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$$

$$y = C \cdot x$$

Odnosno

$$G(s) = C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B$$

Na slici 3.66 prikazan je blok dijagram sustava u prostoru stanja.

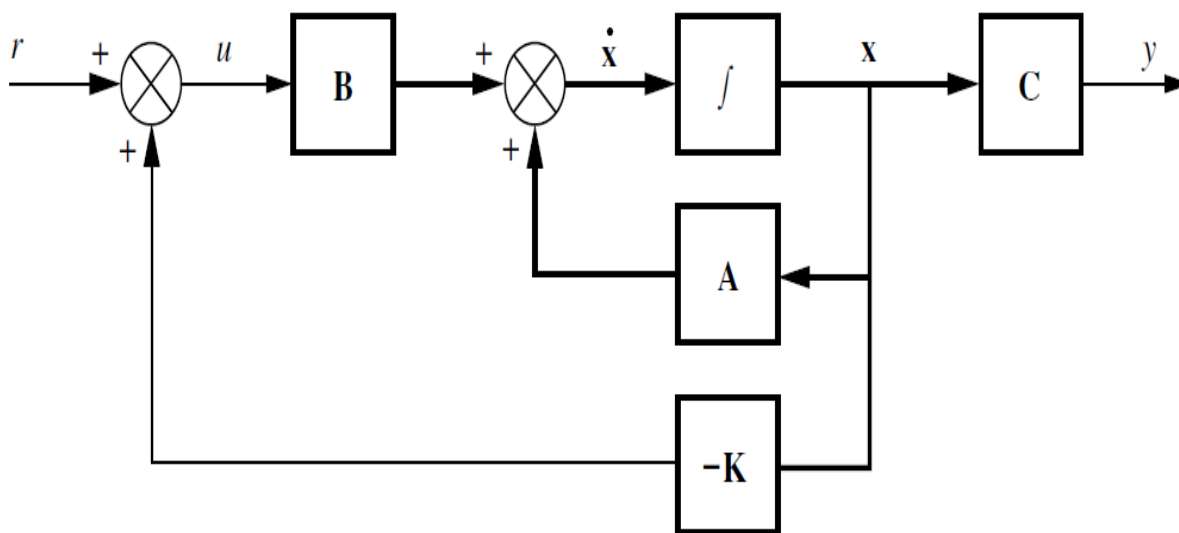


Sl. 3.66 – Blok dijagram sustava u prostoru stanja

Pri čemu je:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ i } C = [c_0 \quad c_1 \quad c_2]$$

Na slici 3.67 prikazan je dijagram sustava u prostoru stanja s regulatorom u povratnoj vezi.



Sl. 3.67 - Blok dijagram sustava u prostoru stanja s regulatorom u povratnoj vezi

Za slučaj regulacije prikazan na slici 3.67 vrijede sljedeće jedandžbe:

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$$

$$u = -K \cdot x + r$$

Na temelju navedenog može se pisati:

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u = A \cdot x + B \cdot (-K \cdot x + r) = (A - B \cdot K) \cdot x + B \cdot r$$

gdje je:

$$K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3] - \text{vektor regulacije}$$

Potrebno je odrediti matricu $A - B \cdot K$ koja iznosi:

$$A - B \cdot K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(a_0 + k_1) & -(a_1 + k_2) & -(a_2 + k_3) \end{bmatrix}$$

Kako bi odredili koeficijente vektora regulacije, potrebno je odrediti željeno stanje odziva sustava na temelju parametara prijelazne funkcije sustava na step pobudu. Neka je izlazno stanje određeno nadvišenjem (engl. Overshoot, OS[%]) i vremenom smirivanja signala (engl. Settling Time, T_s). Kako je :

$$T_s \cong \frac{4}{\zeta \cdot \omega}$$

$$OS[\%] = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \cdot 100\%$$

Mogu se izračunati vrijednosti za prirodnu frekvenciju ω i koeficijent prigušenja ζ jer je:

$$\omega \cong \frac{4}{\zeta \cdot T_s}$$

$$\zeta = -\frac{\ln\left(\frac{OS}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(\frac{OS}{100}\right)}}$$

Tada bi željena prijenosna funkcija koja opisuje dinamiku prije definiranog odziv u zatvorenom krugu bila jednaka:

$$T(s) = \frac{1}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega \cdot s + \omega^2}$$

Postupak određivanja koeficijenata regulatora pojasnit će se na sljedećem primjeru.

Primjer br. 21

Naka je zadana prijenosna funkcija otvorenog sustava:

$$G(s) = \frac{(s + 3)}{s^3 + 5 \cdot s^2 + 4 \cdot s + 1}$$

Potrebno je odrediti parametre regulatora $K = [k_1 \ k_2 \ k_3]$ tako da su parametri odziva sustava u zatvorenom krugu na step funkciju jednaki $OS[\%] = 10\%$ i $T_s = 1,1 \text{ sek}$.

Rješenje:

Na temelju parametara odziva sustava u zatvorenom krugu određuje se prijenosna funkcija zatvorenog kruga tako što se prvo određuje koeficijent prigušenja ζ , a zatim prirodna kružna frekvencija ω , kako slijedi:

$$\zeta = -\frac{\ln\left(\frac{OS}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(\frac{OS}{100}\right)}} = \frac{\ln\left(\frac{10}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(\frac{10}{100}\right)}} = 0,5912$$

$$\omega \cong \frac{4}{\zeta \cdot T_s} = \frac{4}{0,5912 \cdot 1,1} = 6,5133$$

Prijenosna funkcija koja opisuje dinamiku prije definiranog odziv u zatvorenom krugu bila bi sljedeća:

$$T(s) = \frac{1}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega \cdot s + \omega^2} = \frac{1}{s^2 + 2 \cdot 0,5912 \cdot 6,5133 \cdot s + 6,5133^2}$$

odnosno

$$T(s) = \frac{1}{s^2 + 7,273 \cdot s + 37,84}$$

Kako se u brojniku zadane prijenosne funkcije nalazi nula -3, to će se prijenosna funkcija pomnožiti s približnim polom -3,01 i slijedi:

$$T(s) = \frac{s + 3}{s + 3,01} \cdot \frac{1}{s^2 + 7,273 \cdot s + 37,84} = \frac{s + 3}{s^3 + 10,28 \cdot s^2 + 59,73 \cdot s + 113,9}$$

Prijenosna funkcija $T(s)$ odgovara zadanoj dinamici zatvorenog kruga određenoj s parametrima $OS[\%] = 10\%$ i $T_s = 1,1 \text{ sek}$.

Pretvorbom prijenosne funkcije $T(s)$ u prostor stanja dobija se:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -113,9 & -59,73 & -10,28 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = [3 \quad 1] \cdot \mathbf{x}$$

Transformacija prijenosne funkcije $G(s)$ zajedno s regulatorom K bila bi sljedeća:

$$\begin{aligned}
 A - B \cdot K &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(a_0 + k_1) & -(a_1 + k_2) & -(a_2 + k_3) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(1 + k_1) & -(4 + k_2) & -(5 + k_3) \end{bmatrix} \\
 y &= [3 \quad 1] \cdot x
 \end{aligned}$$

Prema tome vrijedi jednakost:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -113,9 & -59,73 & -10,28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(1 + k_1) & -(4 + k_2) & -(5 + k_3) \end{bmatrix}$$

Odnosno

$$113,9 = 1 + k_1$$

$$59,73 = 4 + k_2$$

$$10,28 = 5 + k_3$$

Vrijednost parametara regulatora iznose:

$$K = [112,9 \quad 55,73 \quad 5,28]$$

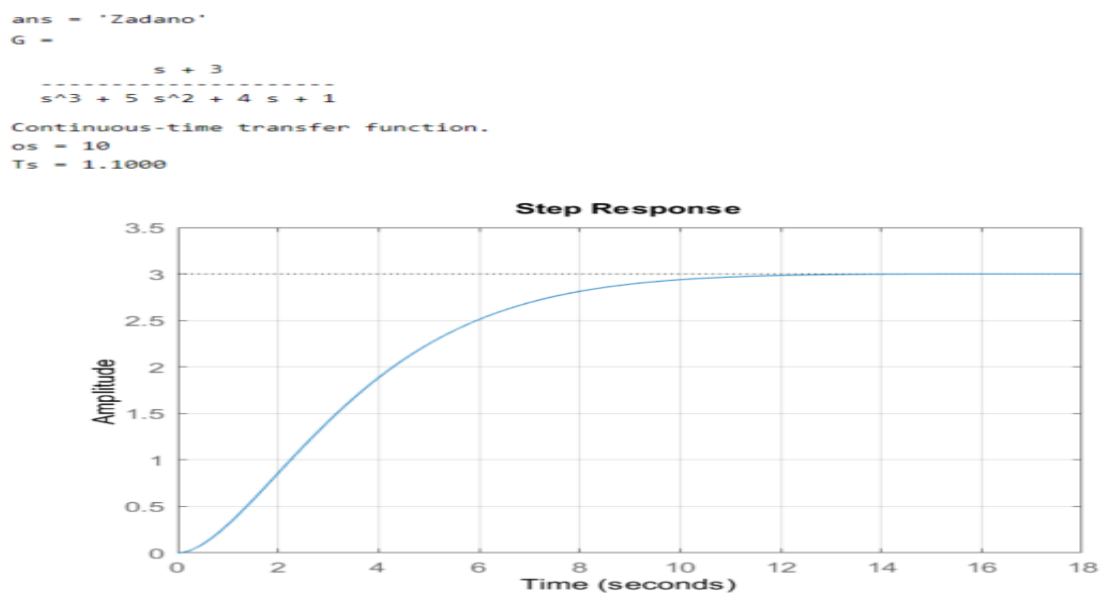
Rješenje (pomoću MatLab) rutine je sljedeće:

```

'Zadano'
G=tf([1 3],[1 5 4 1]) %prijenosna funkcija sustava
os=10 %nadvišenje [%]
Ts=1.1 %vrijem smirivanja signala [%]
step(G)
grid

```

Na slici 3.68 prijelazna funkcija sustava na step pobudu.

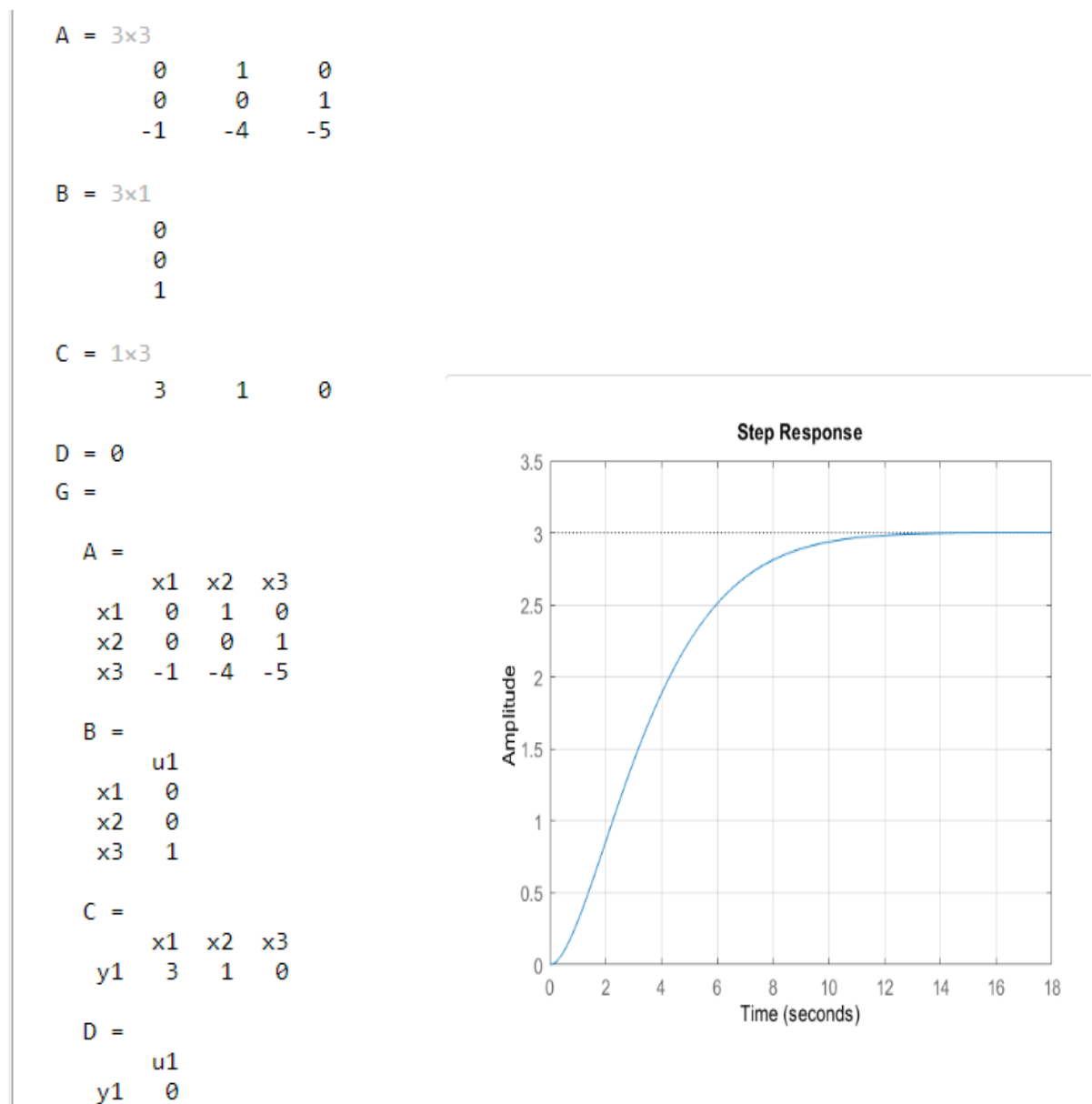


Sl. 3.68 – Prijelazna funkcija sustava

Trnasformacija u prostor stanja bila bi sljedeća:

```
'Rješenje'
'1 - Trasnformacija prijenosne funkcije u prostor stanja'
A=[0 1 0;0 0 1;-1 -4 -5]
B=[0;0;1]
C=[3 1 0]
D=[0]
G=ss(A,B,C,D)
step(G)
grid on
```

U nastavku su prikazane matrice transformacije, a na slici 3.69 prikazan je odziv sustava koji je jednak odzivu sa slike 3.68.



Sl. 3.69 - Transformacija sustava u prostor stanja i odziv sustava na step funkciju

Prijenosna funkcija $G_z(s)$ koja odgovara zadanoj dinamici prikazana je u nastavku.

```
'2 - Prijenosna funkcija zahtjevane dinamike Gz'
```

```
ksi=-(log(os/100)/sqrt(pi^2+(log(os/100)^2)))
```

```
om=4/(ksi*Ts)
```

```
sig0=ksi*om
```

```
om0=om*sqrt(1-ksi^2)
```

```
Gz=tf(1,[1 2*ksi*om om^2])
```

```
step(Gz)
```

```
[om zeta]=damp(Gz)
```

```
stepinfo(Gz)
```

```
grid on
```

```
ans = '2 - Prijenosna funkcija zahtjevane dinamike Gz'
ksi = 0.5912
om = 6.1513
sig0 = 3.6364
om0 = 4.9614
Gz =

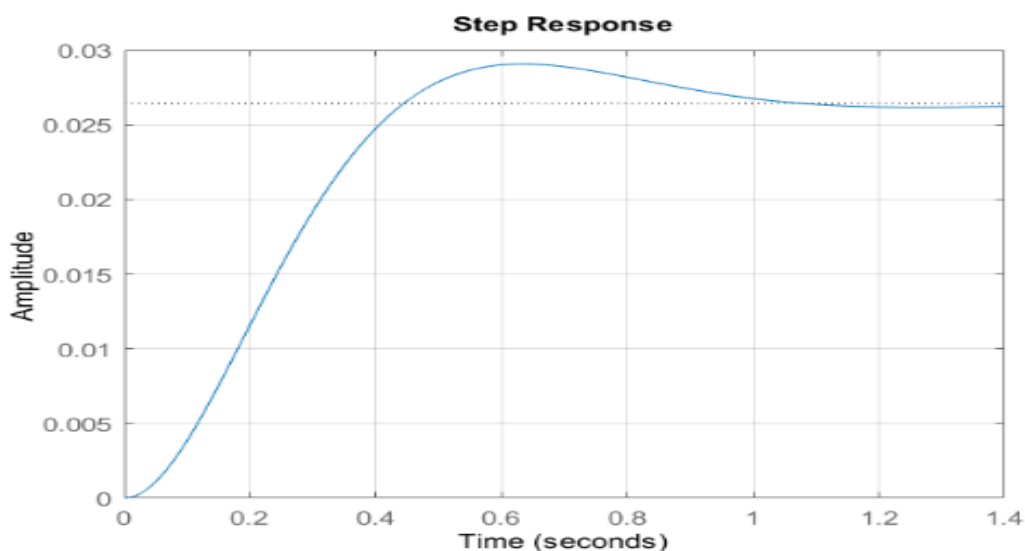
      1
-----
s^2 + 7.273 s + 37.84

Continuous-time transfer function.
om = 2x1
    6.1513
    6.1513

zeta = 2x1
    0.5912
    0.5912

ans = struct with fields:
    RiseTime: 0.2982
    SettlingTime: 0.9633
    SettlingMin: 0.0239
    SettlingMax: 0.0291
    Overshoot: 10.0000
    Undershoot: 0
    Peak: 0.0291
    PeakTime: 0.6332
```

Na slici 3.70 prikazan je odziv sustava (prijenosna funkcija) zadane dinamike.



Sl. 3.70 – Odziv sustava (prijenosna funkcija) zadane dinamike

Kako je potrebno bilo dodati pol $-3,01$ dolazi do promjene prijenosne funkcije $G_z(s)$ koja je sada označena kao funkcija $T(s)$.

```
'3 - Prijenosan funkcija s dodanim polom p=-3.01'
```

```
Gp=tf([1 3],[1 3.01])
```

```
T=Gz*Gp
```

```
step(T)
```

```
stepinfo(T)
```

```
grid on
```

```
ans = '3 - Prijenosan funkcija s dodanim polom p=-3.01'
```

```
Gp =
```

$$\frac{s + 3}{s + 3.01}$$

```
Continuous-time transfer function.
```

```
T =
```

$$\frac{s + 3}{s^3 + 10.28 s^2 + 59.73 s + 113.9}$$

```
Continuous-time transfer function.
```

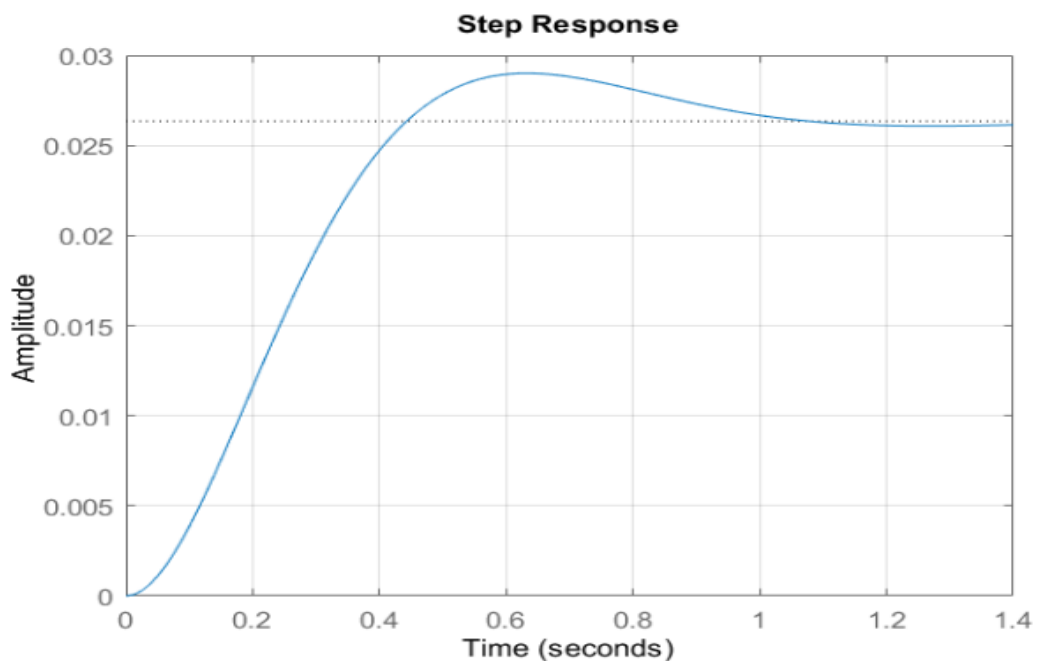
```
ans = struct with fields:
```

```

    RiseTime: 0.2973
  SettlingTime: 0.9646
  SettlingMin: 0.0238
  SettlingMax: 0.0290
  Overshoot: 10.1254
  Undershoot: 0
    Peak: 0.0290
  PeakTime: 0.6332

```

Na slici 3.71 prikazan je odziv sustava (prijenosna funkcija s dodanim polom) na step pobudu.



Sl. 3.72 – Odziv sustava (prijenosna funkcija s dodanim polom) na step pobudu

Vrijednost parametara regulatora određena je iz jednakosti:

$$A_{cont} = A - B \cdot K$$

Gdje je:

A_{cont} – zadana matrica stanja sustava na temelju $OS[\%] = 10\%$, $T_s = 1,1 \text{ sek}$ i $p = -3,01$

Vrijednost parametara regulatora K određuje se pomoću Ackermanove formula koja je dobila naziv po njemačkom profesoru Jurgen Ackermanu i koristi se u MatLabu kao kao rutina *acker* kako slijedi:

```
'4 - Određivanje parametara regulatora K'
z=- (log(os/100)/sqrt(pi^2+(log(os/100)^2)))
wn=4/(z*Ts)
[num,den]=ord2(wn,z)
r=roots(den)
poles=[r(1) r(2) -3.01]
K=acker(A,B,poles)
```

```
ans = '4 - Određivanje parametara regulatora K'
z = 0.5912
wn = 6.1513
num = 1
den = 1x3
      1.0000    7.2727    37.8383
r = 2x1 complex
      -3.6364 + 4.9614i
      -3.6364 - 4.9614i
poles = 1x3 complex
      -3.6364 + 4.9614i  -3.6364 - 4.9614i  -3.0100 + 0.0000i
K = 1x3
      112.8933    55.7292    5.2827
```

Ukoliko se zaokruže prije prikazane vrijednosti parametra regulatora K , one su iste kao i prethodno matematički određene vrijednosti parametara regulatora kako slijedi:

$$K = [112,9 \quad 55,73 \quad 5,28]$$

Ukoliko su ostvareni parametri zadovoljavajući tada je potrebno odrediti pojačanje kako bi izlaz iz reguliranog sustava bio „1“. Stoga slijedi:

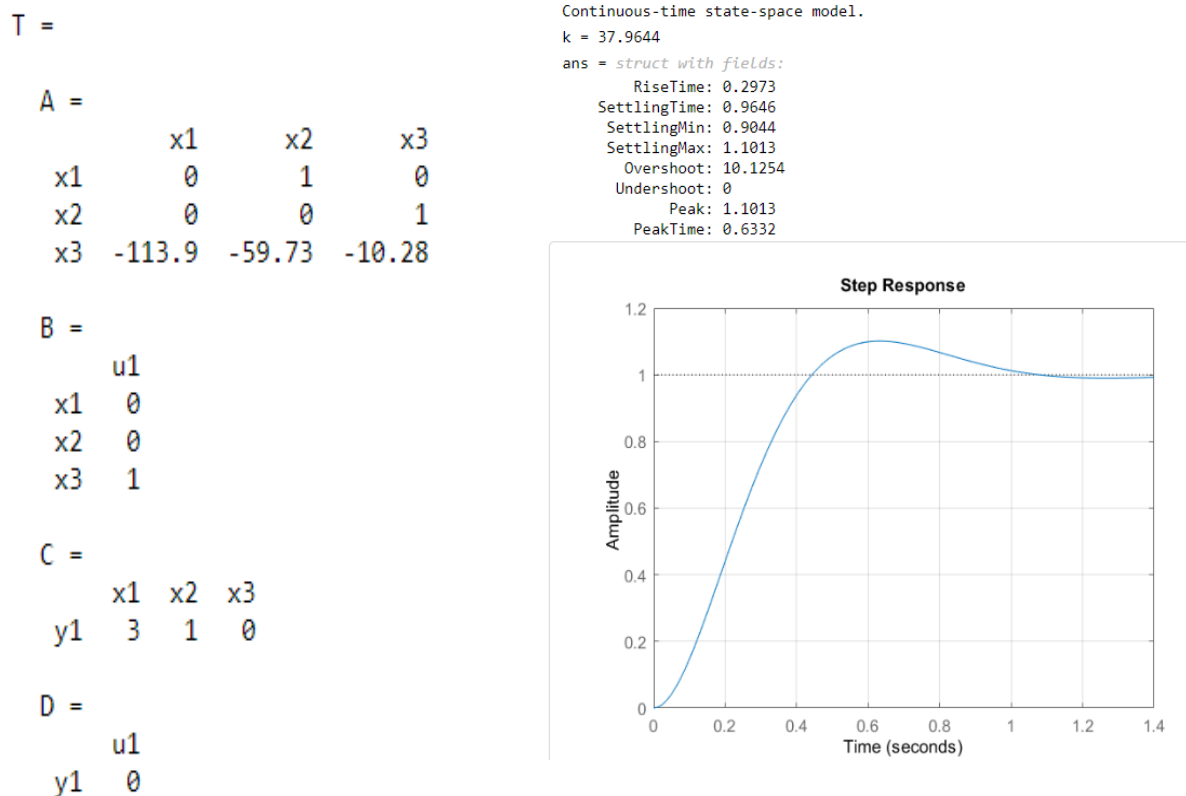
'5 - Regulirani zatvoreni krug'

```

AT=A-B*K;
T=ss(AT,B,C,D)
k=1/dcgain(T)
step(k*T)
stepinfo(k*T)
grid

```

Na slici 3.73 prikazan je regulirani odziv sustava u prostoru stanja (prijelazna funkcija) na step pobudu.



Sl. 3.73 - Regulirani odziv sustava u prostoru stanja (prijelazna funkcija) na step pobudu

Ostvareni su sljedeći parametri dinamike reguliranog sustava u prostoru stanja:

$$OS[\%] = 10,125\% \text{ i } T_{s_{max}} = 1,1013 \text{ sek}$$

Kroz prikaz sustava u prostoru stanja moguće je promjeniti dinamiku tog sustava u zatvorenom krugu bez potrebe povećanja reda sustava. Dodatno ovakav prikaz omogućava analizu upravljivosti (engl. Controllability) i osmotrivosti (engl. Observability) sustava, o čemu će biti više riječi u nastavku.

3.6.1 Upravlјivost i osmotrivost sustava

Važno je uočiti kako prijenosna funkcija sustava može opisati samo one djelove sustava koji su upravljivi i osmotrivi, dok o ostalim djelovima sustava ne postoji nikakva informacija. Sustav se zapravo može podijeliti u četiri djela i to: upravljiv i osmotriv, upravljiv i neosmotriv, neupravljiv i neosmotriv, i neupravljiv i neosmotriv dio. Analiza upravljivosti i osmotrivosti sustava posebno je važna za izbor i položaj detektora (senzora, analizatora ili nekog drugog mjernog elementa) u sustavu automatskog upravljanja.

Ključno pitanje koje se nameće u pogledu upravljivosti i osmotrivosti sustava vezano je uz ulazni (upravljački) signal i mjerenje signala. Važno je utvrditi - postoji li ili ne postoji varijabla sustava x_i koja nije pod utjecajem ulaznog (upravljačkog) signala u_i odnosno postoji li ili ne postoji varijabla sustava x_i koja se ne može pratiti na izlaznom signalu y_i ? Praktično, da bi sustav bio upravljiv potrebno je odrediti takav vektor upravljanja \mathbf{u}^* koji će dovesti sustav u po volji određeno stanje \mathbf{x}^* , a to znači da vektor \mathbf{u}^* može djelovati na svaku komponentu sustava. No, ne postoji jamstvo da se takav vektor \mathbf{u}^* može uistinu i odrediti!? Za razliku od upravljivosti, u slučaju osmotrivosti to praktično znači da se na temelju mjerenja signala na izlazu iz sustava može zaključiti o svim pojedinačnim stanjima sustava tj. da bi sustav bio osmotriv potrebno odrediti takav vektor \mathbf{y}^* koji će sadržavati sve mjerene podatke određenog stanja \mathbf{x}^* ? No, kao i u slučaju upravljivosti ne postoji jamstvo da se takav vektor \mathbf{y}^* može uistinu i odrediti. Stoga se upravljivost i osmotrivost sustava definiraju na drugačiji način.

Definicija upravljivosti sustava

Ako je zadan sustav n – tog reda, tada će sustav biti potpuno upravljiv ako je rang matrice upravljivosti (engl. *Controllability Matrix*, C_M) jednak n – tom redu sustava. Matrica upravljivosti C_M računa se na sljedeći način:

$$C_M = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$$

Sustav je upravljiv ako vrijedi:

$$\text{rank}(C_M) = n$$

Definicija osmotrivosti sustava

Ako je zadan sustav n – tog reda, tada će sustav biti potpuno osmotriv ako je rang matrice osmotrivosti (engl. *Observability Matrix*, O_M) jednak n – tom redu sustava. Matrica osmotrivosti O_M računa se na sljedeći način:

$$O_M = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Sustav je osmotriv ako vrijedi:

$$\text{rank}(O_M) = n$$

Vežano za primjer br. 21 vrijedi:

'6 - Određivanje upravljivosti i osmotrivosti sustava'

```
Cm=ctrb(A,B)
RangCm=rank(Cm)
n=order(T)
Om=obsv(A,C)
RangOm=rank(Om)
n=order(T)
```

```
ans = '6 - Određivanje upravljivosti i osmotrivosti sustava'
Cm = 3x3
     0     0     1
     0     1    -5
     1    -5    21

RangCm = 3
n = 3
Om = 3x3
     3     1     0
     0     3     1
    -1    -4    -2

RangOm = 3
n = 3
```

Prema dobivenim rezultatima može se zaključiti kako je sustav i upravljiv i osmotriv.

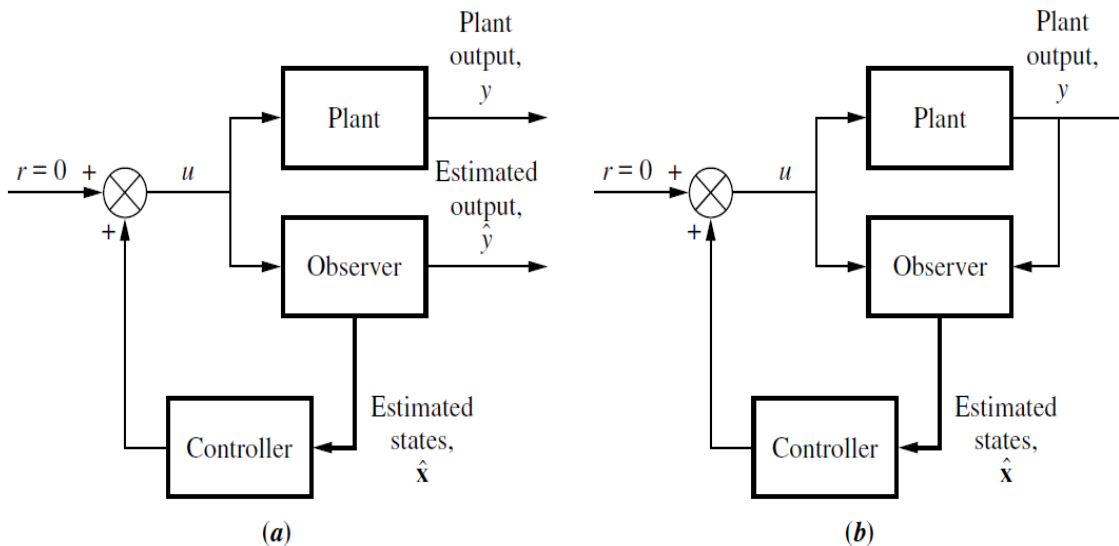
3.6.2 Observer u prostoru stanja i potpuni regulator

Uređaj ili sklop projektiran za procjenu stanja sustava naziva se *observer ili estimator*, a ugrađuje se u sustave onda kada postoji mogućnost neposrednog mjerenja stanja sustava. Razlozi zašto se ugrađuje observer (estimator) je nepostojanje senzora koji bi mogli neposredno (direktno) mjeriti stanje sustava ili su takvi senzori preskupi u odnosu na cijenu ukupnog sustava upravljanja.

Observeri ili estimatori stanja sustav koriste se u automatskom upravljanju ako su ispunjeni sljedeći uvjeti:

- da je proces u cijelosti osmotriv
- da matematički model kojim se simulira proces dobro opisuje dinamiku procesa

U tom slučaju koristi se observer prvog reda (asimptotski observer), a blok shema takvog sustava prikazana je na slici 3.74 (a) i (b) za slučaj otvorenog i zatvorenog kruga.

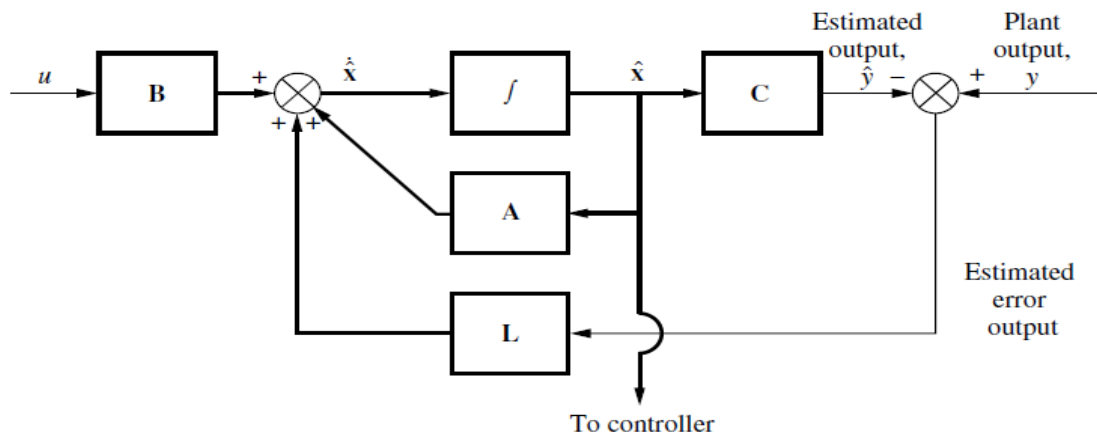


Sl. 3.74 (a) i (b) – Blok shem sustava sa observerom u otvorenom i zatvorenom krugu [Izvor: Norma S. Nise]

Legenda:

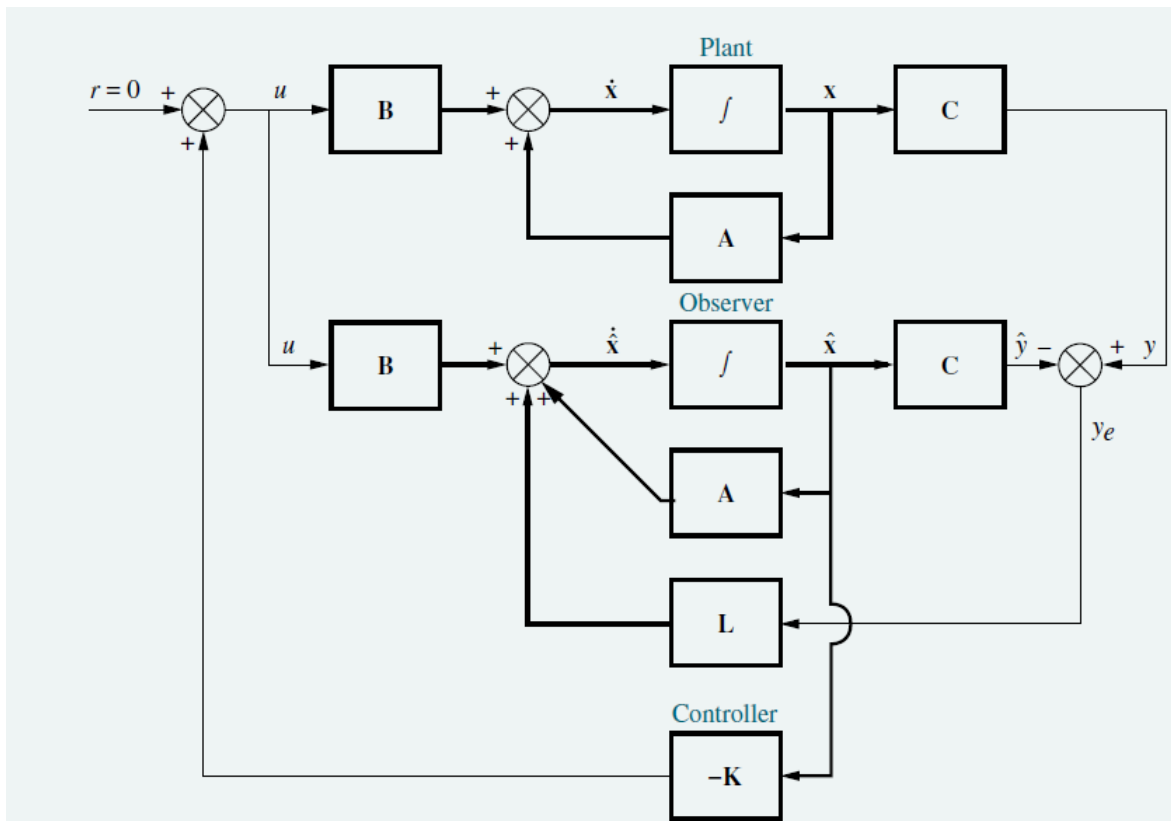
Plant (proces ili postrojenje), Plant output (izlaz procesa ili postrojenja), Observer (observer), Estimated output (procjenjeni izlaz), Controller (regulator), Estimated states (Procjenjena stanja)

Na slici 3.75 prikazan je observer (estimator) u prostoru stanja



Sl. 3.75 - Observer (estimator) u prostoru stanja [Izvor: Norma S. Nise]

Na slici 3.76 prikazana je konfiguracija procesa, observera i regulatora u prostoru stanja.



Sl. 3.76 - Konfiguracija procesa, observera i regulatora u prostoru stanja [Izvor: Norma S. Nise]

Naime, pristup regulacije i estimacije sustava u prostoru stanja ima sve nedostatke koje posjeduje sustava upravljanja u otvorenom krugu. Pa tako i greška estimacije ovisi o samoj dinamici procesa. Za razliku od toga, u zatvorenom krugu može se utjecati na željenu dinamiku pogreške upravo kroz vektor povratne veze estimacije L koji za sustav trećeg reda glasi:

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}$$

Na temelju prethodno prikazanog vrijede slijedeće jednadžbe:

a) Proces

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$$

$$y = C \cdot x$$

b) Observer (Estimator)

$$\dot{\hat{x}} = A \cdot \hat{x} + B \cdot u$$

$$\hat{y} = C \cdot \hat{x}$$

Oduzmu li se jednadžbe estimacije od jednadžbi procesa, dobija se:

$$\dot{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})$$

$$\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})$$

Dodavanjem vektora povratne veze estimacije \mathbf{L} mijenja se jednadžba estimacije i sada glasi:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{L} \cdot (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{C} \cdot \hat{\mathbf{x}}$$

Prema tome može se pisati:

$$\dot{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{L} \cdot (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})$$

$$\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})$$

Odnosno uvrštavanjem donje jednadžbe u gornju:

$$\dot{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{L} \cdot (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{L} \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})$$

Vrijedi dakle sustav jednadžbi:

$$\dot{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{LC}) \cdot (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})$$

$$\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})$$

Prema tome potrebno je odrediti matricu $\mathbf{A} - \mathbf{LC}$ pri čemu je:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{C} = [c_0 \quad c_1 \quad c_2]$$

Možemo pisati:

$$\mathbf{A} - \mathbf{LC} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} \cdot [c_0 \quad c_1 \quad c_2]$$

Sukladno primjeru 21. odnosno zadanoj prijenosnoj funkciji $G(s)$:

$$G(s) = \frac{(s + 3)}{s^3 + 5 \cdot s^2 + 4 \cdot s + 1}$$

vrijedilo bi:

$$\mathbf{A} - \mathbf{LC} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} \cdot [3 \quad 1 \quad 0]$$

Najvažnija karakteristika observera (estimatora) je brzina njegove reakcije i nastoji se da brzina observera bude bar 10 puta veća od brzine reakcije regulatora u zatvorenom krugu. Kako bi povećali brzinu reakcije observera nužno je povećati prirodnu frekvenciju $\omega_n = 6,1513 \frac{\text{rad}}{\text{sek}}$ za 10 puta, stoga će karakteristična jednadžba $A(s)$ iznositi:

$$A(s) = s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot 10 \cdot \omega_n + 100 \cdot \omega_n^2$$

Tada će nova zadana prijenosna funkcija $T_{obs}(s)$ iznositi:

$$T_{obs}(s) = \frac{s + 3}{(s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot 10 \cdot \omega_n + 100 \cdot \omega_n^2) \cdot (s + 3,01)}$$

Odnosno za $\zeta = 0,5912$ i $\omega_n = 6,1513 \frac{rad}{sek}$ vrijedit će:

$$T_{obs}(s) = \frac{s + 3}{s^3 + 75,74 \cdot s^2 + 4003 \cdot s + 11.390}$$

Matrica \mathbf{A}_{obs} sada iznosi:

$$\mathbf{A}_{obs} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -11.390 & -4003 & -75,74 \end{bmatrix}$$

Vrijednost parametara observera određena je iz jednakosti:

$$\mathbf{A}_{obs} = \mathbf{A} - \mathbf{LC}$$

Prema tome vrijedi:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -11.390 & -4003 & -75,74 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} \cdot [3 \quad 1 \quad 0]$$

Rješenje je moguće usporedbom koeficijenta karakteristične jednadžbe prijenosne funkcije $T_{obs}(s)$ i determinante $\det[(\lambda \cdot \mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{LC})]$ gdje je \mathbf{I} – jedinična matrica. Determinanta iznosi:

$$\begin{aligned} \det[(\lambda \cdot \mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{LC})] \\ = \lambda^3 + (3 \cdot l_1 + l_2 + 5) \cdot \lambda^2 + (15 \cdot l_1 + 8 \cdot l_2 + l_3 + 4) + (11 \cdot l_1 + 15 \cdot l_2 \\ + 3 \cdot l_3 + 1) \end{aligned}$$

Stoga vrijedi jednakost:

$$\begin{aligned} s^3 + 75,74 \cdot s^2 + 4003 \cdot s + 11.390 \\ = \lambda^3 + (3 \cdot l_1 + l_2 + 5) \cdot \lambda^2 + (15 \cdot l_1 + 8 \cdot l_2 + l_3 + 4) + (11 \cdot l_1 + 15 \cdot l_2 \\ + 3 \cdot l_3 + 1) \end{aligned}$$

Odnosno:

$$\begin{aligned} 75,74 &= 3 \cdot l_1 + l_2 + 5 \\ 4003 &= 15 \cdot l_1 + 8 \cdot l_2 + l_3 + 4 \\ 11.390 &= 11 \cdot l_1 + 15 \cdot l_2 + 3 \cdot l_3 + 1 \end{aligned}$$

Korištenjem MatLab-a rješenje iznosi:

```
P=[3 1 0;15 8 1;11 15 3]
Q=[70.74;3999;11389]
L=linsolve(P,Q)
```

$$L = \begin{bmatrix} -4,1 \\ 83 \\ 3.396,2 \end{bmatrix}$$

Potpuno identični podaci dobite će se korištenjem Ackermanove formula kako slijedi:

```
'7 - Određivanje parametara observera L'
os=10 %nadvišenje [%]
Ts=1.1 %vrijem smirivanja signala [%]
z=- (log(os/100)/sqrt(pi^2+(log(os/100)^2)))
wn=4/(z*Ts)
[num,den]=ord2(10*wn,z)
r=roots(den)
poles=[r' -3.01]
L=acker(A',C',poles)'
```

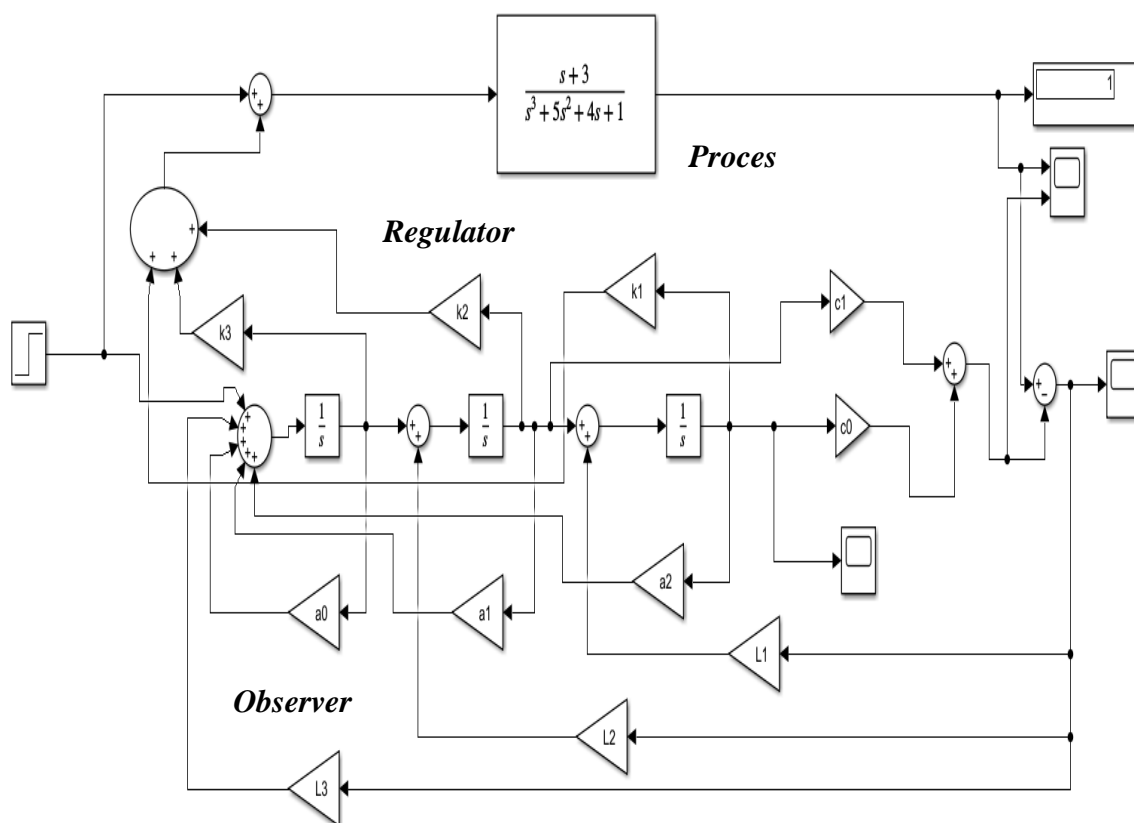
Rezultat je sljedeći:

```
L = 3x1
103 x
-0.0041
0.0831
3.3959
```

Na temelju ostvarenih rezultata u primjeru br. 21 izrađen je simulcijski model u SimuLinku na način kako je prikazamo na slici 3.77

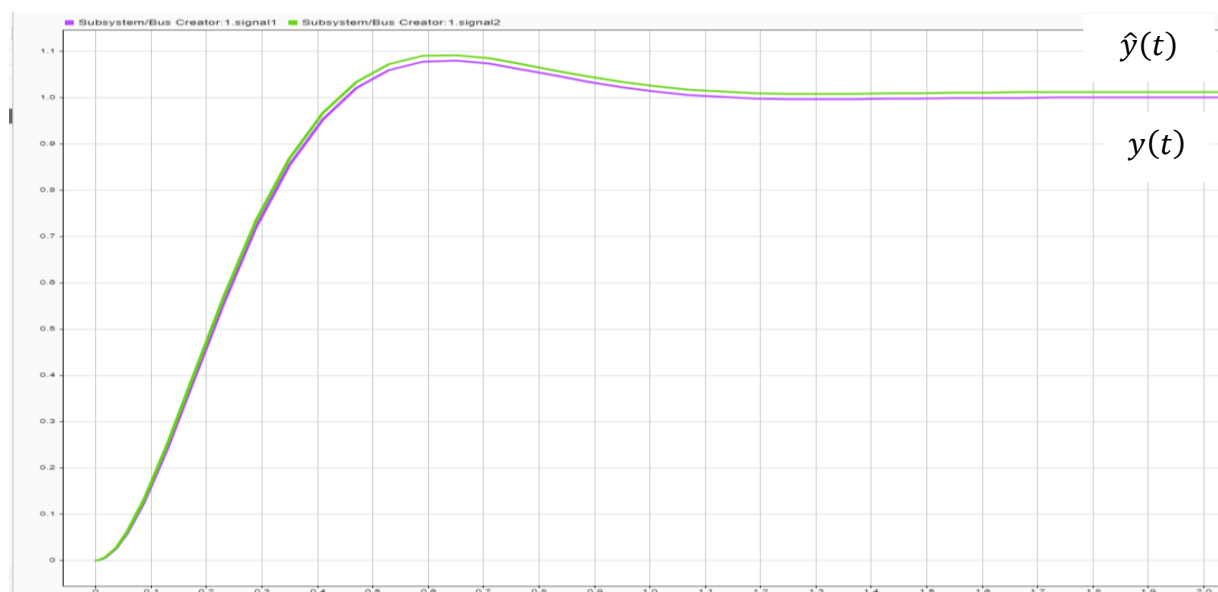
Ulazni podaci

```
a0=-1
a1=-4
a2=-5
c0=3
c1=1
k1=-112.9
k2=-55.73
k3=-5.28
L1=-4.1
L2=83
L3=3396.2
```

Simulacijski model

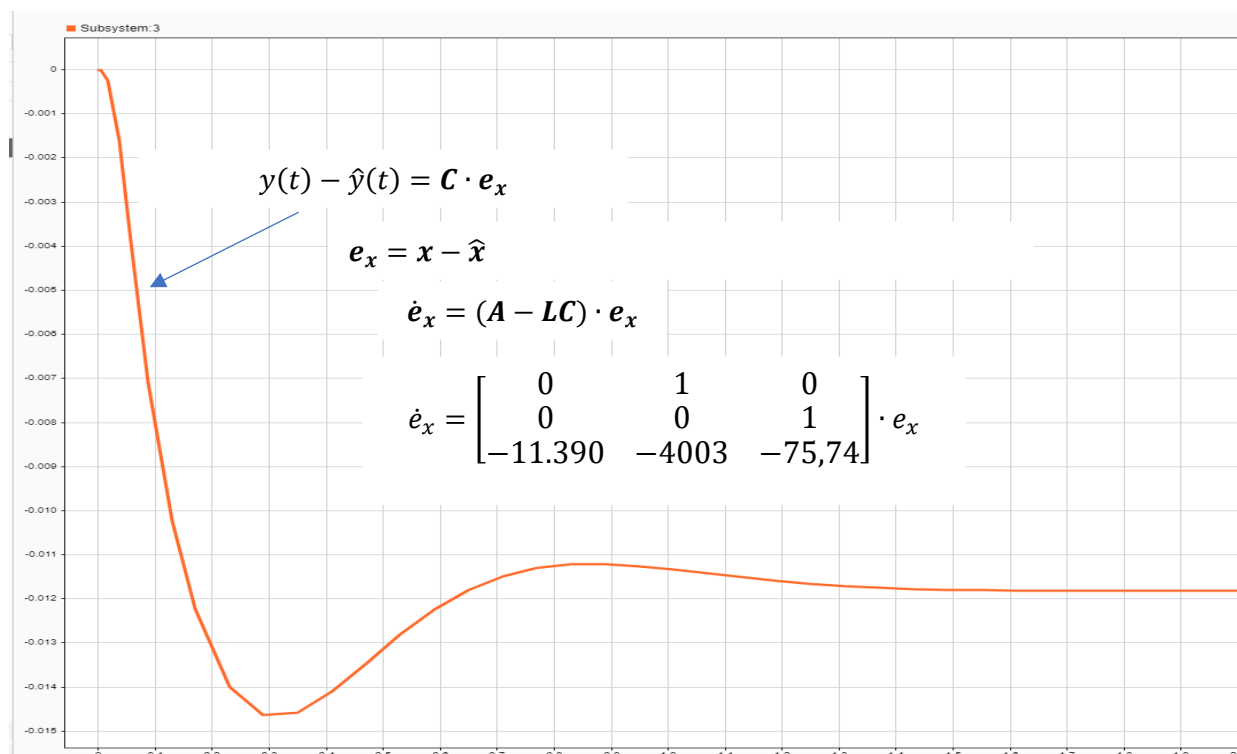
Sl. 3.77 - Simulacijski model u SimuLinku

Na slici 3.78 prikazan je odziv (prijenosna funkcija) na step pobudu aktualnog izlaznog signala $y(t)$ i estimiranog izlaznog signala $\hat{y}(t)$ na izlazu iz observera.



Sl. 3.78 – Prijenosna funkcija aktualnog i estimiranog izlaznog signala

Na slici 3.79 prikazana je pogreška između aktualnog i estimiranog izlaznog signala $y(t) - \hat{y}(t)$ odnosno prikazana je pogreška između aktualnog vektora i estimiranog vektora stanja e_x , kao i derivacija te pogreške \dot{e}_x . U konkretnom slučaju vrijede relacije prikazane na slici 3.79.



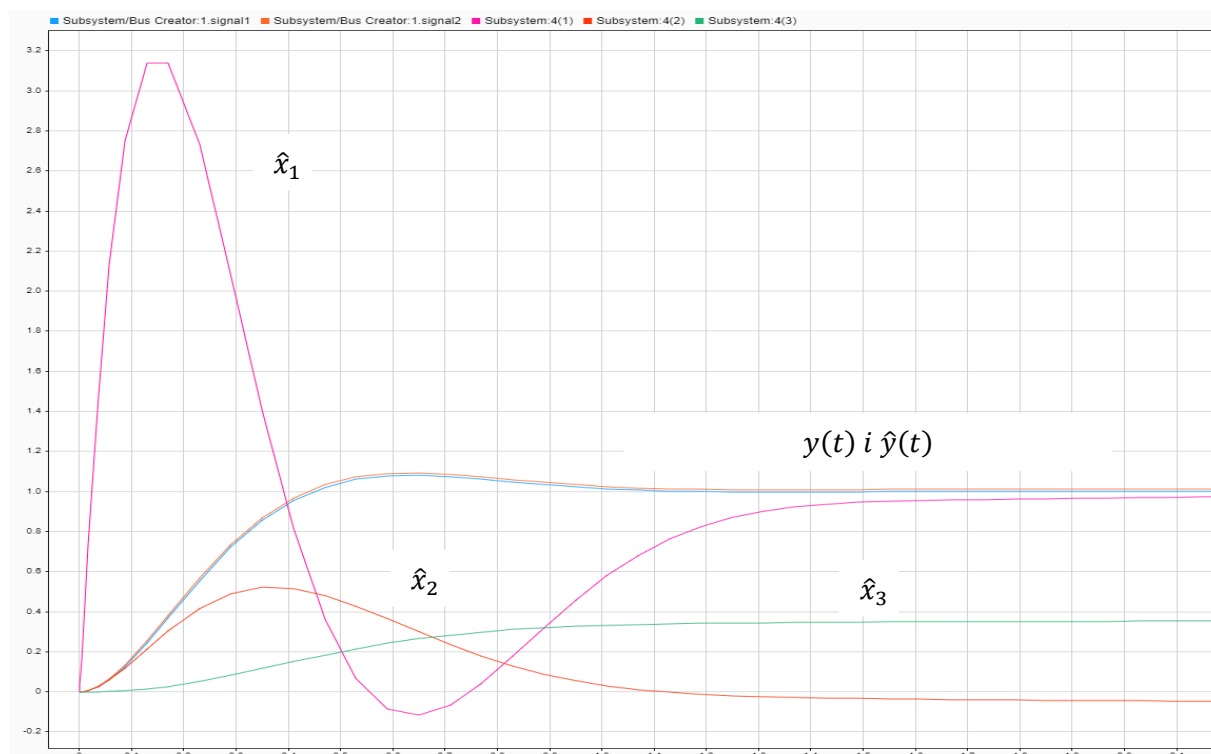
Sl. 3.79 - Pogreška između aktualnog i estimiranog izlaznog signala

Dakle, za razliku od otvorenog sustava, observer (estimator) u zatvorenom sustavu određen je vektorom povratne veze regulacije K i vektorom povratne veze estimacije L . Dinamička pogreška observera prvog reda u zatvorenom krugu ovisna je o svojstvenim vrijednostima matrice observera, a to znači kako se pogreška observera podešava pomoću vektora povratne veze estimacije L i da pogreška ovisi o početnim uvjetima $x_0 = x(0)$ i $\dot{x}_0 = \dot{x}(0)$ odnosno $\hat{x}_0 = \hat{x}(0)$ i $\hat{\dot{x}}_0 = \hat{\dot{x}}(0)$. Dva su moguća slučaja:

- početni uvjeti procesa $x_0 = x(0)$ i $\dot{x}_0 = \dot{x}(0)$ i početni uvjeti observera $\hat{x}_0 = \hat{x}(0)$ i $\hat{\dot{x}}_0 = \hat{\dot{x}}(0)$ su *identični* $x_0 = \hat{x}_0$ i $\dot{x}_0 = \hat{\dot{x}}_0$, i tada će pogreška estimacije biti konstantna od samog početka (težit će nuli),
- početni uvjeti procesa i observera se *razlikuju* $x_0 \neq \hat{x}_0$ i $\dot{x}_0 \neq \hat{\dot{x}}_0$ pri čemu je moguće da pogreška vrlo sporo teži nuli ili da divregira.

Zato je vrlo važno *dobro izabrati* početne uvjete jer će osmostrivost ili dohvatljivost unutarnjih stanja procesa ovisiti o tome.

Na slici 3.80 prikazan je izlazni signal iz sustava (aktualni i estimirani) i tri estimirana signala unutarnjeg stanja sustava (estimirane varijable stanja)



Sl. 3.80 - Izlazni signal iz sustava (aktualni i estimirani) i tri estimirana signala unutarnjeg stanja sustava (estimirane varijable stanja)

Jako važno i korisno svojstvo linearnih sustava je svojstvo *odvojivosti* jer omogućuje odvojeno projektiranje regulatora od observera, i zato takav regulator nazivamo *potpuni regulator*. Zahvaljujući tom svojstvu polovi koji definiraju dinamiku zatvorenog sustava i polovi koji definiraju pogrešku observera čine uniju dva podsustava (regulator + obsrver). Iako djeluju istodobno na sustav nije prisutno njihovo međudjelovanje i ne utječu jedan na drugi. Zato je moguće provesti odvojeno projektiranje regulatora, a zatim observera te ih promatrati kao dva odvojena čimbenika koja zajedničkim djelovanjem utječu na dinamiku zatvorenog sustava.

Neka je vektor pogreške varijabli stanja od strane observera e_x određen sljedećim izrazom:

$$e_x = x - \hat{x}$$

Na temelju slike 3.76 vrijede sljedeće jednačbe:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A \cdot x + B \cdot u \\ u &= -K \cdot \hat{x}\end{aligned}$$

Međusobnim uvrštavanjem slijedi

$$\dot{x} = A \cdot x - B \cdot K \cdot \hat{x} = A \cdot x - B \cdot K \cdot (x - \tilde{x})$$

Možemo se sada pisati:

$$\dot{x} = (A - B \cdot K) \cdot x + B \cdot K \cdot \tilde{x} = A_{cont} \cdot x + B \cdot K \cdot \tilde{x}$$

Dakle vrijedi:

$$\dot{x} = A_{cont} \cdot x + B \cdot K \cdot e_x$$

Jednako tako vrijede sljedeće jednadžbe:

$$\hat{x} = A \cdot \hat{x} + B \cdot u + L \cdot (y - \hat{y})$$

$$y - \hat{y} = C \cdot (x - \hat{x})$$

Međusobnim uvrštavanjem slijedi:

$$\hat{x} = A \cdot \hat{x} + B \cdot u + L \cdot C \cdot (x - \hat{x})$$

Neka je derivacija pogreške jednaka:

$$\dot{e}_x = \dot{x} - \dot{\hat{x}}$$

Sada vrijedi:

$$\dot{e}_x = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = A \cdot x + B \cdot u - [A \cdot \hat{x} + B \cdot u + L \cdot C \cdot (x - \hat{x})]$$

Odnosno kako je i prije napisano na slici 3.79 vrijedi da je:

$$\dot{x} - \dot{\hat{x}} = (A - LC) \cdot (x - \hat{x})$$

tj.

$$\dot{e}_x = (A - LC) \cdot e_x = A_{obs} \cdot e_x$$

Dobijamo sljedeći sustav jednadžbi:

$$\dot{x} = A_{cont} \cdot x + B \cdot K \cdot e_x$$

$$\dot{e}_x = 0 \cdot x + A_{obs} \cdot e_x$$

Matrični zapis bio bi:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{cont} & B \cdot K \\ 0 & A_{obs} \end{bmatrix}$$

Karakteristična jednadžba glasila bi:

$$N(\lambda) = \det \begin{vmatrix} \lambda \cdot I - A_{cont} & B \cdot K \\ 0 & \lambda \cdot I - A_{obs} \end{vmatrix} = 0$$

Odnosno:

$$N(\lambda) = (\lambda \cdot I - A_{cont}) \cdot (\lambda \cdot I - A_{obs}) - 0 \cdot B \cdot K = 0$$

Završno vrijedi:

$$N(\lambda) = (\lambda \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}_{cont}) \cdot (\lambda \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}_{obs}) = 0$$

Prema tome, dokazano je da se polovi ukupnog sustava sastoje od polova koji definiraju dinamiku zatvorenog kruga te polova koji definiraju pogrešku estimacije, što znači da projektiranje regulatora i observera može teći *neovisno jedno o drugome*.

Pogreška obsrvera bitno ovisi od dinamici procesa, ako je proces stabilan i inertan tada će se dugo čekati da se pogreška estimacije smanji na prihvatljivu razinu. Osim toga u realnim simulacijama moguća je i pojava poremećaja kada observer nemože dohvatiti stanje procesa. Stoga je izbor početnih uvjeta od posebne važnosti i isti moraju biti pažljivo izabrani osobito u slučaju većeg šuma mjerenja ili poremećaja. Katkad je bolje zakasniti s pokretanjem observera zbog početne identifikacije stanja, nego pokrenuti obserever iz krivih početnih uvjeta jer se može dogoditi da observer opće ne dosegne proces već započne oscilirati. Početni se uvjeti mogu proračunavati svaki put prije uključivanja sustava, ili se identifikacija početnih uvjeta može automatizirati ovisno o samom procesu.

Na kraju važno je naglasiti da sustav s regulatorom stanja daje bolja svojstva tražene dinamike nego potpuni regulator kada su sva stanja već identificirana jer observer ili estimator stanja samo procjenjuje odnosno identificira stanje sustava na temelju početnih uvjeta.

Literatura

- [1] Ambrožić V., Zajec P., *Električni servo sustavi*, Graphis 2019
- [2] Ban Ž., Matruško J., Petrović I., *Primjena programskog sustava MATLAB u rješavanju tehničkih problema*, Graphis 2010.
- [3] Berger H., *SIMATIC automatizacijski sustavi*, Graphis 2013
- [4] Flegar I., *Sklopovi energetske elektronike*, Graphis 1996.
- [5] Flegar I., *Elektronički energetske pretvarači*, Kigen 2010
- [6] Grilec J., *Električni strojevi i pogoni*, Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2005
- [7] Nise S. Norman., *Control system engineering*, Jhon Wiley & Sons, inc., 2015
- [8] Madić I., Tomljanović V., Pužar M., *Sinhroni i asinhroni električni strojevi*, Tehničko veleučilište u Zagrebu, 2012.
- [9] Matika D., *Sustavi digitalnog upravljanja*, Graphis 2005
- [10] Mišković N. et al., *Automatsko upravljanje – zbirka zadataka*, Fakultet elektrotehnike i računarstva, 2012
- [11] Srb N., *Elektromotori i elektromotorni pogoni*, Graphis 2007
- [12] Vukić Z., Kuljača Lj., *Automatsko upravljanje – analiza lineranih sustava* : Kigen 2005

Popis određenih oznaka i skraćenica

AC – izmjenično napajanje (engl. *Alternating Current*)

A/D – analogni – digitalni pretvornik (engl. *Analog/Digital*)

D/A – digitalno – analogni pretvornik

DC – istosmjerno napajanje (engl. *Direct Current*)

DOF – stupnjevi slobode (engl. *Degree of Freedom*)

FER – Fakultet elektrotehnike i računarstva

HMI – sučelje čovjek - stroj (engl. *Human Machine Interface*)

IEC – međunarodni standard (engl. *International Electrotechnical Commission*)

L – Laplasova transformacija (engl. *Laplace Transform*)

MIMO – sustav s više ulaza i više izlaza (engl. *Multiple Input Multiple Output System*)

PIDF - regulator (Proporcionalno-Integracijsko-Derivacijski regulator s filterom prvog reda na derivacijskom vremenu)

PLC – programibilni logički kontroler (eng. *Programmable Logic Controller*)

PWM – pulsno širinska modulacija (engl. *Puls With Modulation*)

SCADA – sustava za nadzor, upravljanje i prikupljanje podataka (eng. *Supervisory Control And Data Acquisition System*).

SISO - sustav s jednim izlazom i jednim ulazom (engl. *Single Input Single Output System*),

s – Laplasov operator, klizanje asinhronog stroja

Z – diskretna transformacija

FOC - vektorsko upravljanje (engl. *Field Oriented Control*)

TIA – Simenov portal (engl. *Totally Integrated Automation Portal*)

VFD - varijabilni frekvencijski pretvarač (engl. *Variable Frequency Driverv*)